XXXVI.

SULLA INTRODUZIONE DI VINCOLI OLONOMI NELLE EQUAZIONI DINAMICHE DI HAMILTON

« Atti Ist. Ven. », ser. 7ª, t. LXXV (1915-16), parte 2ª,

pp. 387-395.

È dato un sistema olonomo S soggetto a forza conservative, e si introducono ulteriori legami olonomi, costituendo un sistema maggiormente vincolato, che diremo S'. La costruzione delle equazioni del moto di S' è immediata, se si suppone assegnata la funzione lagrangiana L dell'originario sistema S: basta notoriamente ridurre la L a norma dei vincoli addizionali, per trarne la funzione lagrangiana L' di S'. Ma se — come spesso accade in dinamica analitica — si parte dalle equazioni del moto di S sotto forma canonica, se si suppone cioè che, fra i dati della questione, figuri propriamente la funzione hamiltoniana H (anzichè la L), e si vuol arrivare all'analoga funzione H' conseguente all'introduzione dei nuovi vincoli, non si trova, per quanto è a mia conoscenza, negli scritti che trattano questa materia, un procedimento altrettanto semplice e diretto che individui H', in funzione di H e delle equazioni dei vincoli.

Naturalmente i precetti classici consentono di procurarsi, quando si voglia, la H' nel modo seguente: Si passa da H ad L, cioè dall'assegnata funzione hamiltoniana alla lagrangiana di S; in questa si introducono i vincoli, cioè si forma L'; finalmente si ripassa da L' alla corrispondente funzione hamiltoniana H'. È chiaro tuttavia che la questione non è così risolta nel modo concettualmente più semplice, nè algoritmicamente più opportuno. Ed è pur chiaro che vale la pena di esplicitare il risultato evitando i giri viziosi.

Tale è lo scopo della presente breve comunicazione.

1. – Indichino x_i ed y_i ($i = 1, 2, ..., N$) coordinate lagrangiane e momenti cinetici di un sistema olonomo S con N gradi di libertà; $H(x|y|t)$ (¹)

(¹) La notazione comprensiva $H(x|y|t)$ sta ovviamente per $H(x_1; x_2; ..., x_N | y_1; y_2; ..., y_N | t)$.

l'energia totale del sistema (in cui t non figura esplicitamente, se i legami imposti al sistema sono indipendenti dal tempo). La H è notoriamente un polinomio di secondo grado nelle y, la cui parte quadratica H_2 costituisce una forma definita positiva.

Le equazioni del moto, cioè il sistema canonico di funzione caratteristica H:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

possono essere compendiate nella relazione differenziale

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^N{}_i\,(dx_i\,\delta y_i - dy_i\,\delta x_i) = dt\,\delta H\,,$$

in cui si risguardino arbitrari gli incrementi δx_i, δy_i e si intenda con δH il differenziale da essi subordinato in H (senza far variare t).

2. – Ciò posto, si immagini di introdurre nuovi vincoli olonomi, che riducano il grado di libertà del sistema da N a $n < N$. Siano $q_1, q_2, \ldots, q_n$ coordinate lagrangiane del sistema S' che così si determina, e

$$\text{(1)} \qquad x_i = x_i(q\,|\,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

le equazioni parametriche dei vincoli. L'ipotesi che le q rappresentano effettive coordinate lagrangiane si rispecchia formalmente nel fatto che è proprio n la caratteristica della matrice funzionale costituita dalle Nn derivate parziali

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_h}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\; h = 1, 2, \ldots, n).$$

Le equazioni del moto di S' risultano dall'esprimere che la (I) è verificata, compatibilmente coi vincoli (1) imposti alle x_i, per incrementi *affatto arbitrari* delle y_i. È questo un immediato corollario del principio dei lavori virtuali, purchè gli si faccia preventivamente subire la perspicua trasformazione al tipo hamiltoniano dovuta a MORERA ([2]).

Applichiamolo al caso nostro, immaginando di introdurre in entrambi i membri, al posto delle x_i, le loro espressioni (1), con che H diviene funzione delle q, oltre che delle y e di t.

([2]) *Sulle equazioni dinamiche di Hamilton*, « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. XXXIV, 1904, pp. 3-16.

Dovremo naturalmente ritenere gli incrementi δx_i (in numero di N) indotti da un numero minore n di arbitrarie δq_h, a norma della formula

$$\delta x_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, N); \tag{2}$$

del pari sarà

$$dx_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \qquad (i = 1, 2, \dots, N). \tag{3}$$

Nel secondo membro della (I) figurerà in definitiva il differenziale

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h + \sum_1^N {}_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i\,.$$

Con ciò la (I) stessa, ove si eguaglino i coefficienti d'ogni δq_h e δy_i nei due membri, porge

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^N {}_i \dot{y}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}\,, && (h = 1, 2, \dots, n), && (4)\\ &\sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}\,, && (i = 1, 2, \dots, N), && (5) \end{aligned}\right.$$

il punto sovrapposto designando ovviamente derivazione rispetto a t.

Queste $n+N$ equazioni definiscono complessivamente le derivate delle altrettante funzioni y e q [3], individuando così il moto di S': non però ancora sotto la voluta forma canonica d'ordine $2n$. Avviamoci a conseguirla.

3. – All'uopo giova riprendere l'equazione comprensiva (I), e trasformarne intanto il primo membro mercè l'introduzione delle n ausiliarie

$$p_h = \sum_1^N {}_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h}\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{6}$$

e conseguenti incrementi

$$\delta p_h = \sum_1^N {}_i \delta y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \sum_1^N {}_i y_i \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right),$$

$$dp_h = \sum_1^n {}_i dy_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \sum_1^N {}_i y_i d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right).$$

[3] L'effettiva risolubilità del sistema lineare (4), (5) rapporto alle $\dot{y}$, $\dot{q}$ risulta ovviamente dal fatto che il determinante dei coefficienti si identifica col quadrato della matrice funzionale delle $\partial x_i / \partial q_h$: quadrato certo non nullo, dacchè, come è stato rilevato nel testo, la caratteristica della matrice è n.

Ove in

$$\Delta = \sum_1^N {}_i\, (dx_i\, dy_i - dy_i\, dx_i)$$

si sostituiscano, al posto di dx_i e δx_i, le loro espressioni (3) e (2) si ha tosto

$$\Delta = \sum_1^n {}_h\, (dq_h \delta p_h - dp_h \delta q_h) + dt \sum_1^N {}_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\, \delta y_i$$
$$- \sum_1^N {}_i\, y_i \sum_1^n {}_h \left\{ dq_h\, \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right) - \delta q_h\, d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right)\right\}.$$

Notiamo poi che

$$\sum_1^n {}_h\, dq_h\, \delta\left(\frac{\delta x_i}{\partial q_h}\right),$$

può essere scritto (attesa l'indipendenza degli incrementi δ dai d)

$$\delta\left(\sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h}\, dq_h\right),$$

ossia, per la (3),

$$\delta\left(dx_i - \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt\right) = \delta\, dx_i - dt\, \delta\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right).$$

Analogamente si ha, in base alla (2),

$$\sum_1^n {}_h\, \delta q_h\, d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right) = d\left(\sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h}\, \delta q_h\right) = d\, \delta x_i = \delta\, dx_i\,.$$

Il primo membro della (I), ossia Δ, torna così ad assumere una forma compendiosa, risultando

$$\Delta = \sum_1^n {}_h\, (dq_h \delta p_h - \delta q_h\, dp_h) + dt\, \delta\left(\sum_1^N {}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\right).$$

Pongasi

$$H' = H - \sum_1^N {}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\,, \tag{7}$$

con che manifestamente H' non differisce da H ogni qualvolta i vincoli addizionali (1) sono indipendenti dal tempo.

La (I), cioè

$$\Delta = dt\,\delta H\,,$$

diviene

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n{}_h\,(dq_h\,\delta p_h - dp_h\,\delta q_h) = dt\,\delta H'\,.$$

5. – A norma delle (6), le p_ν sono n combinazioni lineari delle y, certo indipendenti, dacchè (n. 2) la matrice dei coefficienti $\partial x_i/\partial q_h$ ha per caratteristica n. È dunque lecito trattare le δp_h quali combinazioni indipendenti delle δy; siccome poi queste sono a loro volta indipendenti dalle δq, si possono in definitiva risguardare arbitrari ed indipendenti tutti i $2n$ incrementi δp_h, δq_h. Perciò, se si riesce ad esprimere anche il secondo membro della (II) mediante le sole δp_h, δq_h, dovranno risultare eguali i singoli coefficienti nei due membri. L'eguaglianza va intesa nel senso di necessaria conseguenza della stessa (II) e delle posizioni (6); o, se si vuole, della originaria (I) e delle (6); o infine delle (6) e delle equazioni (del moto) (4), (5) equivalenti alla (I).

D'altra parte va rilevato che, formando sistema delle (5) e (6) (le quali costituiscono complessivamente $N+n$ equazioni *lineari* nelle N funzioni y e nelle n derivate $\dot q$), si può immaginare di ricavarne così le y, come le $\dot q$, espresse per le p, q, t [4].

Portando questi valori delle y nella H' e ritenendovi, ben si intende, anche le x sostituite coi secondi membri delle (1), la stessa H' diviene una funzione delle sole p, q, t; e la (II) dà luogo al sistema canonico

$$\text{(8)} \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_h}\,, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Esso si presenta — abbiamo notato or ora — quale necessaria conseguenza delle equazioni del moto e delle posizioni (6). Reciprocamente — e questo è l'essenziale — le (8) costituiscono da sole un sistema d'ordine $2n$ nelle q e nelle ausiliarie p, atto a determinarle. Ne rimane in pari tempo determinato il moto del sistema S', essendo le x fornite dalle (1), e le y dalla eliminazione delle $\dot q$ fra le (5) e (6), od anche (per la conseguita conoscenza delle $\dot q$) da N equazioni indipendenti, scelte a piacere fra le (5) e (6).

Riassumendo, si ha la seguente regola.

---

[4] La univoca risolubilità sarà provata al n. 7.

6. – REGOLA per introdurre (conformemente al principio dei lavori virtuali) in un sistema canonico, di funzione caratteristica $H(x|y|t)$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

ulteriori vincoli olonomi

$$(1) \qquad x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_n|t),$$

in modo da presentare il risultato sotto forma pure canonica.

Si riducono, a norma dei vincoli, le equazioni che definiscono le dx_i/dt, scrivendole

$$\sum_1^n{}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

e si pone

$$p_h = \sum_1^N{}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h}. \qquad (h = 1, 2, ..., n).$$

Da queste $N+n$ relazioni si eliminano le $\dot{q}$, ricavandone le y in funzione delle p, q, t.

Mercè le (1) *e le espressioni ricavate per le y, si forma*

$$H'(p|q|t) = H - \sum_1^N{}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

e si ha così la funzione caratteristica del sistema ridotto ad n gradi di libertà, per effetto dei vincoli addizionali (1).

7. – *Constatazione di risolubilità* delle $N+n$ equazioni (5), (6) rapporto alle y, $\dot{q}$.

Ricordiamo (n. 1) che H è funzione di secondo grado nelle y, la cui parte quadratica H_2 costituisce una forma definita. Indicandone con $a^{(ij)}$ i coefficienti, sarà manifestamente

$$\frac{\partial H_2}{\partial y_i} = \sum_1^N{}_j\, a^{(ij)} y_j, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

e questa forma lineare differirà da $\partial H/\partial y_i$ per termini indipendenti dalle y.

Con ciò le (5) assumono l'aspetto

$$(5') \qquad \sum_1^N {}_j\, a^{(ij)} y_j = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \alpha^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

raccogliendosi in $\alpha^{(i)}$ tutto ciò che, nella i-esima equazione (5), non dipende dalle incognite y, $\dot{q}$.

Introduciamo i coefficienti

$$a_{il} \qquad (i, l = 1, 2, \dots, N)$$

della forma reciproca ad H_2, che sarà essa pure definita positiva, e in particolare avrà un discriminante a (determinante delle a_{il}) certo diverso da zero.

Indichiamo per brevità con α_l le somme

$$\sum_1^N {}_i\, a_{il} \alpha^{(i)} \qquad (l = 1, 2, \dots, N),$$

che rappresentano ancora termini noti rispetto alle nostre incognite y, $\dot{q}$, e moltiplichiamo le (5') per a_{il}, sommando rispetto all'indice i da 1 ad N.

Si ricava ovviamente (cambiando nel risultato l in i, i in j e h in k)

$$(5'') \qquad y_i = \sum_1^n {}_k\, \dot{q}_k \sum_1^N {}_j\, a_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} + \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

le quali equazioni sono ancora equivalenti alle (5). Ma, sotto questa forma, riesce assai facile combinarle colle (6), in modo da ricavarne le $\dot{q}$; dopo di che le stesse (5'') determinano le y.

Per esplicitare le $\dot{q}$, introduciamo nella (6) le espressioni (5'') delle y_i. Ponendo

$$(9) \qquad a'_{hk} = \sum_1^N {}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_h}, \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

avremo

$$(6') \qquad \sum_1^n {}_k\, a'_{hk} \dot{q}_k = p_h - \sum_1^N {}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \alpha_i, \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e basterà evidentemente assicurarsi che non si annulla il determinante dei coefficienti a'_{hk}. Ora, dalla stessa definizione (9) delle a'_{hk}, apparisce che il loro determinante è prodotto di a per il quadrato della solita matrice funzione dei vincoli (1): l'uno e l'altro diversi da zero; c. d. d.