# LE VARIETÀ A CURVE SEZIONI ELLITTICHE

Le ricerche dei professori CASTELNUOVO ed ENRIQUES sulle superficie e sulle varietà tridimensionali a curve sezioni ellittiche facevano prevedere che aumentando la dimensione il numero dei casi possibili di varietà a curve sezioni ellittiche dovesse andare diminuendo.

Questo lavoro conferma appunto una tale previsione, in quanto dimostra che, eccettuate le forme cubiche, le quartiche intersezioni di due quadriche e le varietà costituite da una $\infty^1$ ellittica di spazi lineari, non si hanno, all'infuori dei coni, altre varietà a curve sezioni ellittiche la cui dimensione superi 6.

Più precisamente, riunendo in un enunciato unico i risultati di questa Memoria con quelli già ottenuti dai Professori CASTELNUOVO ed ENRIQUES, si ha il seguente teorema:

*Ogni $V_k^n$ irriducibile non conica di $S_r$ a curve sezioni ellittiche è:*

*a) una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-1}$, oppure*

*b) una forma cubica di $S_{k+1}$, oppure*

*c) è razionale ed è proiezione di una $W_k^n$ normale non conica di uno spazio a $n+k-2$ dimensioni, con $k$ qualunque se $n=4$ e con $k \leq 6$ se $4 < n \leq 9$.*

*Le $W_k^n$ normali non coniche di $S_{n+k-2}$ si riducono poi:*

*c') per $n=4$ e $k$ qualunque alle $W_k^n$ basi dei fasci di quadriche di $S_{k+2}$;*

*c'') per $k=2$ [compreso il caso di $n=3$ che rientra in b) e di $n=4$ che rientra in c')] alle $W_2^n$ di $S_n$ $(n \leq 9)$ studiate dal prof.* DEL PEZZO *e rappresentabili sul piano o mediante il sistema di tutte le cubiche piane per $9-n$ punti base, o anche, se $n=8$, mediante il sistema di tutte le quartiche piane con due punti doppi assegnati;*

*c''') per $k=3$ ed $n>4$ alle $W_3$ determinate dal prof.* ENRIQUES, *le quali danno luogo a sei tipi (generali) diversi, cioè a un tipo pel quale $n=5$, tre tipi pei quali $n=6$ e infine due tipi pei quali si ha rispettivamente $n=7,\ 8$;*

$c^{IV}$) *per* $k = 4, 5, 6$ *ed* $n = 5$, *alla* $W_6^5$ *di* $S_9$ *che rappresenta nel solito modo la varietà delle rette di un* $S_4$ *e alle* $W_5^5$ *e* $W_4^5$ *che se ne ottengono tagliandola mediante spazi a* 8 *e* 7 *dimensioni;*

$c^{V}$) *per* $k = 4$ *ed* $n = 6$ *alla* $W_4^6$ (*di* $S_8$) *del prof.* SEGRE, *che rappresenta, senza eccezione, le coppie di punti di due piani, e alla* $W_4^6$ (*di* $S_8$) *intersezione residua di un cono* $W_5^4$ *projettante da un piano una superficie di Veronese e di una quadrica che passa pel vertice di* $W_5^4$ *ed ha comune con esso uno dei suoi* $\infty^2$ *coni quadrici a quattro dimensioni.*

Particolari più minuti sui vari tipi possibili, come anche le necessarie citazioni bibliografiche, si troveranno a suo luogo più innanzi; qui basti aver presentato, per comodità del lettore, in rapido quadro riassuntivo, le varie ricerche che esauriscono ormai la questione della determinazione delle varietà a curve sezioni ellittiche.

Aggiungeremo soltanto che mediante i risultati di questo lavoro si può passare facilmente alla determinazione dei tipi, irriducibili per trasformazioni cremoniane, di sistemi lineari (semplici e di grado $n > 3$) di forme di un $S_r$ a curve sezioni variabili ellittiche, e che lo studio delle $W_k^5$ ($k \leq 6$) mentre dà luogo a nuove proprietà, che pajono interessanti, dello spazio rigato a quattro dimensioni, conduce, per $k = 3$, a una costruzione *diretta* di un notevolissimo gruppo $\infty^3$ di trasformazioni cremoniane incontrato per la prima volta dai professori ENRIQUES e FANO.

## § I.

## GENERALITÀ.

1. Consideriamo una varietà qualsiasi irriducibile $V_k^n$, d'ordine $n$ e dimensione $k$, appartenente a uno spazio $S_r$, che dagli $S_{r-k+1}$ dello spazio ambiente sia tagliata in curve ellittiche.

Se $r > k + 1$, proiettando la $V_k^n$ da un $S_{r-k-2}$ generico sopra un $S_{k+1}$ si ottiene in quest'ultimo spazio una $V_k^{*n}$, in corrispondenza birazionale con $V_k^n$, che dai piani dello spazio stesso è tagliata in curve ellittiche d'ordine $n$, quindi:

*Ogni* $V_k^n$ (*irriducibile*) *di* $S_r$ ($r > k + 1$) *a curve sezioni ellittiche si può trasformare birazionalmente in una ipersuperficie* $V_k^{*n}$ *di un* $S_{k+1}$ *a sezioni piane ellittiche.*

2. Ciò posto, sia $V_k^n$ una forma (o ipersuperficie) irriducibile di $S_{k+1}$ a sezioni piane ellittiche e supponiamo di tagliarla con un

piano generico. La sezione sarà una curva ellittica d'ordine $n$ e quindi, se $n > 3$, ammetterà *una* curva aggiunta d'ordine $n-3$, $\varphi_{n-3}$, che non la incontrerà in alcun punto fuori dei punti multipli.

Ora dico che, se $V_k^n$ non è una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-1}$, al variare del piano secante la curva $\varphi_{n-3}$ descrive una $\Phi_k^{n-3}$ *sub-aggiunta* a $V_k^n$, ossia una forma d'ordine $n-3$ che nelle varietà multiple di $V_k^n$ di dimensione $k-1$ (e non, eventualmente, in quelle di dimensione minore) si comporta come le forme aggiunte a $V_k^n$; inoltre tale $\Phi_k^{n-3}$ non taglia $V_k^n$ fuori delle varietà multiple.

Supponiamo che il teorema sia vero per le $V_{k-1}^n$ di $S_k$ e dimostriamolo vero anche per le $V_k^n$ di $S_{k+1}$; dopo ciò, essendo vero per $k=2$, per una nota dimostrazione del prof. CASTELNUOVO (¹), sarà vero in generale.

Per questo si considerino nello spazio ambiente $S_{k+1}$ un $S_{k-1}$ generico e il fascio di iperpiani che lo ha per asse. In ognuno degli iperpiani del fascio la $V_k^n$ avrà per traccia una $V_{k-1}^n$ che non potrà essere una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-2}$ e quindi tale $V_{k-1}^n$ ammetterà (per ipotesi) una forma sub-aggiunta $\Phi_{k-1}^{n-3}$ che non la taglierà fuori delle varietà multiple. Di più le $\infty^1$ $\Phi_{k-1}^{n-3}$ relative agli $\infty^1$ iperpiani del fascio taglieranno tutte l'$S_{k-1}$ asse del fascio nella *stessa* $\Phi_{k-2}^{n-3}$ sub-aggiunta alla $V_{k-2}^n$ ove l'asse in discorso taglia la data $V_k^n$; quindi il luogo di quelle $\infty^1$ $\Phi_{k-1}^{n-3}$ sarà una $\Phi_k^{n-3}$, purchè nessuna di esse si spezzi nel considerato $S_{k-1}$ e in una residua $\Phi_{k-1}$ d'ordine $n-4$.

Ma si vede subito che nelle ipotesi fatte un tal caso non può presentarsi. Se infatti per un $S_{k-1}$ generico dell'$S_{k+1}$ passasse qualche iperpiano secante $V_k^n$ in una $V_{k-1}^n$ con una $\Phi_{k-1}^{n-3}$ sub-aggiunta spezzata nell'$S_{k-1}$ e in una residua $\Phi_{k-1}^{n-4}$, la $V_{k-1}^n$ sarebbe tagliata dalla $\Phi_{k-1}^{n-3}$ in tutti i punti della sua intersezione con l'$S_{k-1}$, e quindi anche in punti esterni alle sue varietà multiple di dimensione $k-2$, cioè essa non sarebbe irriducibile. Allora tagliando $V_k^n$ con un $S_3$ generico si otterrebbe una superficie $V_2^n$ tale che per ogni retta del suo spazio passerebbe qualche piano secante la $V_2^n$ in una curva spezzata, cioè $V_2^n$ sarebbe una rigata oppure la superficie romana di STEINER (²).

(¹) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (Rendic. R. Accad. dei Lincei, 1º semestre, 1894).

(²) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (Atti della R. Accad. dei Lincei, 1894, 1º semestre).

Di queste due alternative, la prima contrasta con l'ipotesi che $V_k^n$ non sia una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-1}$, la seconda (che porterebbe a $n=4$ e più precisamente a coni ottenuti per proiezione da un cono che proietta da un $S_{k-3}$ una superficie di VERONESE [1]) con l'ipotesi che $V_k^n$ sia a curve sezioni ellittiche, dunque è dimostrato che il luogo di quelle $\infty^1$ $\Phi_{k-1}^{n-3}$ è una $\Phi_k^{n-3}$.

Tale $\Phi_k^{n-3}$ non taglia $V_k^n$ fuori delle sue varietà multiple, dunque ogni piano dell'$S_{k+1}$ taglia $V_k^n$ e $\Phi_k^{n-3}$ in una curva d'ordine $n$ ellittica e *nella* corrispondente curva aggiunta $\varphi_{n-3}$ d'ordine $n-3$; e questo basta per dimostrare il teorema enunciato.

3. Consideriamo ora una $V_k^n$ di $S_{k+1}$ a curve sezioni ellittiche che non sia una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-1}$ e dimostriamo che, se $n>3$, si può sempre costruire un sistema lineare $\infty^{n+k-2}$ di $V_k^{n-2}$ sub-aggiunte a $V_k^n$ che tagliano su $V_k^n$, fuori delle varietà multiple di dimensione $k-1$ (eventualmente esistenti), un sistema lineare $\infty^{n+k-2}$ di $V_k^{n-1}$.

Poichè il teorema è vero per $k=2$ (nel qual caso, anzi, si riconosce [2] che per ognuna delle $\varphi_{n-2}$, sezioni di $V_2^n$ coi piani dello spazio ambiente, passano $\infty^1$ superficie $\Phi_2^{n-2}$ sub-aggiunte a $V_2^n$), per dimostrarlo in generale basterà far vedere che esso è vero per una $V_k^n$ di $S_{k+1}$ quando sia vero per una $V_{k-1}^n$ di $S_k$, e riguardo a questa sarà inoltre lecito supporre che per ogni $V_{k-2}^{n-2}$ sub-aggiunta a una sezione iperpiana passino $\infty^1$ $V_{k-1}^{n-2}$ sub-aggiunte a $V_{k-1}^n$.

Consideriamo dunque un $S_{k-1}$ generico di $S_{k+1}$, la varietà $V_{k-2}^n$ secondo cui esso taglia $V_k^n$ e una $\Phi_{k-2}^{n-2}$ sub-aggiunta a questa. Un iperpiano $\alpha$ che passi per l'$S_{k-1}$ taglia $V_k^n$ in una $V_{k-1}^n$ che contiene la $V_{k-2}^n$; quindi per la $\Phi_{k-2}^{n-2}$ passano $\infty^1$ $\Phi_{k-1}^{n-2}$ sub-aggiunte alla $V_{k-1}^n$ e di queste $\infty^1$ $\Phi_{k-1}^{n-2}$ una potrà essere fissata imponendo che essa tocchi in un punto $A$ di $\Phi_{k-2}^{n-2}$, esterno alla $\Phi_k^{n-3}$ sub-aggiunta a $V_k^n$ un iperpiano $\tau$ condotto comunque per l'$S_{k-2}$ tangente in $A$ a $\Phi_{k-2}^{n-2}$, ma che però non contenga l'$S_{k-1}$ considerato. Variando $\alpha$ intorno all'$S_{k-1}$, la $\Phi_{k-1}^{n-2}$ così fissata descriverà una $\Phi_k^x$, il cui ordine $x$ non potrà differire da $n-2$, perchè (non potendo essere evidentemente inferiore a $n-2$) se fosse maggiore di $n-2$, per qualche posizione di $\alpha$ la corrispondente $\Phi_{k-1}^{n-2}$ dovrebbe spezzarsi in un $S_{k-1}$ e in una residua $\Phi_{k-1}^{n-3}$ passante per $A$; e questo

[1] ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* (Math. Annalen, Bd. 46), n. 9.

[2] CASTELNUOVO, loc. cit. n. 2.

non può accadere, se, come appunto si è supposto, $A$ non si trova sulla $\Phi_k^{n-3}$ sub-aggiunta alla $V_k^n$. La $\Phi_k^n$ che così si ottiene è dunque una $\Phi_k^{n-2}$ che lungo le varietà multiple di dimensione $k-1$ di $V_k^n$ si comporta come le forme aggiunte; e di tali $\Phi_k^{n-2}$ per ogni $\Phi_{k-1}^{n-2}$ sub-aggiunta a una sezione iperpiana di $V_k^n$ ne passano $\infty$, perchè la costruzione precedente ne fornisce appunto $\infty^1$ quando si prenda per $S_{k-1}$ un $S_{k-1}$ dell'iperpiano considerato, per $\Phi_{k-2}^{n-2}$ la $\Phi_{k-2}^{n-2}$ secondo cui tale $S_{k-1}$ taglia la $\Phi_{k-1}^{n-2}$ in discorso e per iperpiano $\tau$ uno degli $\infty^1$ iperpiani passanti per l'$S_{k-1}$ tangente a $\Phi_{k-1}^{n-2}$ in un punto generico $A$ della $\Phi_{k-2}^{n-2}$. Più di $\infty^1$ $\Phi_k^{n-2}$ per una $\Phi_{k-1}^{n-2}$ sub-aggiunta e una sezione iperpiana non possono passare, perchè di esse una sola si spezza nell'iperpiano della sezione e in una residua $\Phi_k^{n-3}$ sub-aggiunta, dunque le $\Phi_k^{n-2}$ sub-aggiunte a $V_k^n$ saranno $\infty^{\delta+1}$ se $\infty^\delta$ sono le $\Phi_{k-1}^{n-2}$ sub-aggiunte a una $V_{k-1}^n$. Ma per ipotesi queste sono $\infty^{n+k-3}$, dunque le $\Phi_k^{n-2}$ formano un sistema lineare $\infty^{n+k-2}$ ed è chiaro che esse tagliano sulla $V_k^n$ un sistema lineare $\infty^{n+k-2}$ di $V_{k-1}^n$, poichè $n$ è il numero dei punti in cui si tagliano fuori dei punti multipli una curva piana ellittica d'ordine $n$ e una sua curva aggiunta d'ordine $n-2$.

4. Il sistema lineare di $V_{k-1}^n$ tagliato sulla $V_k^n$ $(n > 3)$ dalle forme sub-aggiunte di ordine $n-2$ è un sistema che contiene le sezioni iperpiane di $V_k^n$, dunque è semplice e di grado $n$ e può servire a trasformare birazionalmente la $V_k^n$ in una $W_k^n$ *normale* di uno spazio a $n+k-2$ dimensioni, di cui la $V_k^n$ può pensarsi (a meno di una trasformazione omografica) come proiezione.

Ora si osservi in primo luogo che se $W_k^n$ è la varietà normale di $S_{n+k-2}$ da cui può dedursi per proiezione la $V_k^n$ di $S_{k+1}$ ottenuta proiettando sopra l'$S_{k+1}$ da punti esterni una $V_k^{*n}$ di $S_r$, il sistema lineare completo che contiene le sezioni iperpiane di $V_k^{*n}$ si muta nel sistema lineare completo che contiene le sezioni iperpiane di $V_k^n$, cioè in quello delle sezioni iperpiane di $W_k^n$; quindi $V_k^{*n}$ può pensarsi anch'essa come proiezione della $W_k^n$ da punti esterni. In secondo luogo è chiaro che la $W_k^n$ normale di $S_{n+k-2}$, essendo tagliata da un $S_n$ in una $V_2^n$, per una osservazione del prof. ENRIQUES [1], conterrà sempre una curva razionale normale irriducibile d'ordine $n-3$ o, se $n=8$, d'ordine $n-4$; ed è pur chiaro che dallo spazio di una tal curva la $W_k^n$ si proietta biunivocamente sopra un $S_k$ o

[1] ENRIQUES, loc. cit. al n. 2 di questo lavoro.

sopra una quadrica di $S_{k+1}$. Infatti se la $W_k^n$ contiene una curva razionale normale d'ordine $n-3$, un $S_n$ che passi per l'$S_{n-3}$ di questa curva taglia $W_k^n$ in una $V_2^n$ che può proiettarsi dall'$S_{n-3}$ biunivocamente sopra un piano e se la $W_k^n$ contiene una curva razionale normale d'ordine $n-4$ un $S_n$ che passi per lo spazio $S_{n-4}$ di questa taglia $W_k^n$ in una $V_2^n$ che dall'$S_{n-4}$ stesso viene proiettata biunivocamente sopra una quadrica.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

*Una $V_k^n$ di $S_r$ a curve sezioni ellittiche o è una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-1}$ o, se non è una forma cubica* (¹), *è razionale. In quest'ultimo caso può pensarsi come proiezione da punti esterni di una $V_k^n$ normale di $S_{n+k-2}$ a curve sezioni ellittiche normali.*

5. Col prof. ENRIQUES distinguiamo in *specie* le $V_k^n$ $(n > 3)$ normali di $S_{n+k-2}$ chiamando della *1ª specie* quelle che contengono delle curve razionali normali d'ordine $n-3$ e della *2ª specie* quelle che contengono soltanto delle curve razionali normali d'ordine $n-4$ e che quindi sono dell'ordine $n = 8$.

Dimostreremo più innanzi che quelle di 2ª specie per $k > 3$ sono tutte dei coni, quindi per il momento rivolgeremo la nostra attenzione alle $V_k^n$ di 1ª specie.

6. Sia $V_k^n$ una varietà di 1ª specie e sia $C^{n-3}$ una sua curva razionale normale d'ordine $n-3$. Se dall'$S_{n-3}$, $\alpha$, che contiene la $C^{n-3}$ si proietta la $V_k^n$ sopra un $S_k$, la proiezione risulta, come già si è detto, biunivoca, le $V_2^n$ sezioni della $V_k^n$ con gli $S_n$ passanti per $\alpha$ si proiettano nei piani di $S_k$ e le sezioni di $V_k^n$ con gli iperpiani per $\alpha$ si proiettano negli iperpiani di $S_k$.

Invece un iperpiano generico taglia $V_k^n$ in una $V_{k-1}^n$ che ha soltanto $n-3$ punti comuni con la $C^{n-3}$ di $\alpha$, quindi tale $V_{k-1}^n$ si proietta in una forma cubica di $S_k$, e si ha il teorema:

*Ogni $V_k^n$ normale di 1ª specie si può rappresentare punto per punto sopra un $S_k$ per modo che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le forme cubiche di un sistema lineare completo. Fra queste forme ve ne sono $\infty^k$ spezzate in un iperpiano qualunque dell'$S_k$ e in una quadrica fissa $V_{k-1}^2$.*

Alla quadrica $V_{k-1}^2$ che compare in questo enunciato si può pervenire anche in altra maniera.

(¹) Notisi che se una $V_k^3$ è a curve sezioni ellittiche essa *appartiene* necessariamente a un $S_{k+1}$, cioè è una *forma* cubica.

Essa è infatti la varietà dei punti dell'$S_k$ rappresentativo che corrispondono ai punti di $V_k^n$ infinitamente vicini ai punti della $C^{n-3}$ contenuta in $\alpha$; quindi può riguardarsi come il luogo degli $\infty^1$ spazi lineari di $S_k$ i cui punti corrispondono alle direzioni delle tangenti a $V_k^n$ uscenti dai punti della $C^{n-3}$. Ora le tangenti di $V_k^n$ uscenti da un punto di $C^{n-3}$ riempiono un $S_k$ che ha in comune una retta (cioè la tangente a $C^{n-3}$ in quel punto) con $\alpha$, dunque esse sono proiettate da $\alpha$ secondo spazi a $n-2$ dimensioni situati in un $S_{n+k-4}$ e che pertanto tagliano lo spazio rappresentativo $S_k$ nei punti di un $S_{k-2}$. Segue da ciò che la quadrica $V_{k-1}^2$ contiene $\infty^1$ $S_{k-2}$ e quindi essa è specializzata almeno $k-3$ volte e ammetterà almeno un $S_{k-4}$ doppio.

Se supponiamo che $V_{k-1}^2$ sia irriducibile (e, in generale, questo appunto accade) e che essa ammetta un $S_{k-4}$ doppio ma non uno spazio doppio di dimensione superiore, essa conterrà una seconda serie $\infty^1$ di $S_{k-2}$ e questi $S_{k-2}$, come vedremo, avranno nella rappresentazione della $V_k^n$ ufficio ben diverso dai precedenti. Risulterà anche dal seguito che mentre per $n=4, 5$ lo spazio doppio della $V_{k-1}^2$ è realmente un $S_{k-4}$, in altri casi la dimensione dello spazio doppio aumenta.

7. Due forme cubiche del sistema rappresentativo di una $V_k^n$ di 1ª specie si tagliano in una $V_{k-2}$ immagine della $V_{k-2}^n$, sezione di $V_k^n$ con un $S_{n+k-4}$; ma tale immagine si ottiene mediante una proiezione da $\alpha$, dunque quelle due forme cubiche debbono tagliarsi fuori della varietà base del sistema, in una varietà d'ordine $n$, e la varietà base è una $V_{k-2}^{9-n}$ dell'ordine $9-n$ (donde segue che deve essere $n \leq 9$). Questa $V_{k-2}^{9-n}$ è naturalmente situata sulla quadrica $V_{k-1}^2$ che insieme con gli iperpiani di $S_k$ dà $\infty^k$ forme cubiche del sistema rappresentativo, e, come risulterà dall'esame dei singoli casi particolari, passa per lo spazio doppio di $V_{k-1}^2$.

Riassumendo possiamo dire:

*Proiettando una $V_k^n$ di 1ª specie dall'$S_{n-3}$ di una sua $C^{n-3}$ razionale normale sopra un $S_k$ si ottiene una rappresentazione biunivoca di $V_k^n$ sopra questo $S_k$. Le sezioni iperpiane di $V_k^n$ si proiettano nelle forme cubiche di un sistema lineare completo avente per varietà base una $V_{k-2}^{9-n}$ situata sopra una $V_{k-1}^2$ con un $S_\delta$ $(\delta \geq k-4)$ doppio, e la $V_{k-2}^{9-n}$ passa per questo $S_\delta$.*

8. Nei numeri successivi enumereremo i vari tipi possibili di $V_k^n$ corrispondenti alle varie ipotesi che possono farsi sui valori di

$k$ ed $n$, ma è bene osservare fin d'ora che per $n = 4$ si hanno delle $V_k^4$ di dimensione $k$ elevata quanto si vuole.

Infatti per un teorema del prof. ENRIQUES (1), esse si trovano come la loro curva sezione (spaziale) generica, sopra $\infty^1$ quadriche e quindi sono le quartiche base di fasci di quadriche. Allora la rappresentazione che se ne può ottenere sopra un $S_k$ proiettandole da una loro retta è quella che è stata già studiata dal prof. ROSATI in un suo lavoro di qualche anno fa (2). Essa comprende come caso particolare una notissima rappresentazione delle rette di un complesso quadratico sui punti dello spazio ordinario.

## § II.

### LE $V_3^n$ NORMALI A CURVE SEZIONI ELLITTICHE.

9. Le $V_3$ normali a curve sezioni ellittiche sono state già enumerate dal prof. ENRIQUES in un lavoro citato; qui non si riprendono che per assegnarne delle costruzioni e dimostrarne alcune nuove proprietà proiettive.

Il prof. ENRIQUES distingue, come già si è detto, le $V_3$ a curve sezioni ellittiche in due specie; se immaginiamo di considerare soltanto le $V_3$ normali che non sono coni, le $V_3$ di 1ª specie sono:

*a*) la $V_3^5$ di $S_6$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema $\infty^6$ dalle superficie cubiche che passano per una quartica di 2ª specie (che può degenerare, sotto la condizione di mantenersi di 2ª specie);

*b*) la $V_3^6$ di $S_7$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema $\infty^7$ delle superficie cubiche che passano per tre rette a due a due sghembe;

*c*) la $V_3^6$ di $S_7$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema $\infty^7$ delle superficie cubiche che passano per una cubica gobba (che può degenerare) e hanno in un suo punto fisso un punto doppio;

*d*) la $V_3^6$ di $S_7$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema $\infty^7$ delle superficie cubiche che passano per una cubica piana

(1) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Rend. R. Accad. dei Lincei, 1894, 1º sem.). n. 3 in nota.

(2) *Rappresentazione della quartica*, etc. (Annali di Mat., 1 (3) 1899).

con un punto doppio ed hanno in questo punto un punto doppio biplanare con un piano osculatore fisso;

*e*) la $V_3^7$ di $S_8$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema $\infty^8$ delle quadriche che passano per un punto.

La varietà *e*) si ottiene, per proiezione da un suo punto, dalla $V_3^8$ di $S_9$ rappresentata nello spazio ordinario dal sistema di tutte le quadriche e questa $V_3^8$ è l'unica $V_3$ di 2ª specie che non sia un cono.

Questa $V_3^8$ di $S_9$ è caso particolare della $V_r^{2^r}$ di $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ rappresentata punto per punto sull'$S_r$ così che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le quadriche di $S_r$, varietà che, per una ragione ovvia, proporrei di chiamare *varietà di* VERONESE. Per alcune questioni lo studio delle varietà di VERONESE non presenta alcuna difficoltà e basta tener presenti i notissimi lavori dei proff. VERONESE e SEGRE sulla superficie di VERONESE e la Nota del prof. SEGRE su « *gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* » (1) per risolverle immediatamente. Perciò credo inutile trattenermi qui sulla $V_3^8$ di $S_9$, una cui proprietà notevole e non immediata estensione di proprietà analoga per la superficie di VERONESE si trova in una mia Nota recente (2).

10. Volendo considerare un po' da vicino le proprietà della $V_3^5$ di $S_6$ del caso *a*), chiamiamo (in questo n. e nei successivi) $K$ la quartica di 2ª specie base del sistema rappresentativo di superficie cubiche $L$ e $Q$ la quadrica che la contiene.

Le corde di $K$ sono tagliate dalle superficie $L$ in un sol punto variabile, quindi rappresentano rette della varietà obbiettiva. Poichè questa osservazione può senz'altro invertirsi e poichè 3 è il numero dei punti doppi apparenti di una quartica di 2ª specie, abbiamo:

La $V_3^5$ *contiene* $\infty^2$ *rette; per ogni suo punto ne passano, in generale, tre.*

Un iperpiano qualunque taglia $V_3^5$ in una $V_2^5$ razionale normale, rappresentata su un piano mediante il sistema lineare $\infty^5$ delle cubiche passanti per quattro punti, dunque, rammentando una nota proprietà di questa superficie:

*Ogni iperpiano contiene 10 rette del sistema costituito dalle rette di* $V_3^5$ *o ne contiene infinite.*

(1) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1900, 2° sem.

(2) SCORZA, *Determinazione delle varietà a tre dimensioni di* $S_r$ $(r \geq 7)$ *i cui* $S_3$ *tangenti si tagliano a due a due* (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, XXV, 1908).

Per brevità chiameremo $\Delta$ il sistema d'ordine 3 e classe 10 costituito da queste rette.

11. Le rette delle due schiere rigate della quadrica $Q$ secano $K$, quelle di una schiera in tre punti, quelle dell'altra in un punto solo.

Ora la rappresentazione della $V_3^5$ sullo spazio ordinario si ottiene per proiezione dal piano di una sua conica $C^2$, da ogni punto della quale escono tre rette di $\Delta$ contenute nello $S_3$ ivi tangente alla $V_3^5$, dunque:

*Le rette di $Q$, ciascuna delle quali rappresenta i punti di $V_3^5$ infinitamente vicini a uno dei punti della conica $C^2$, sono date dalle trisecanti di $K$ e ogni punto di $K$ rappresenta tutti i punti di una retta di $V_3^5$.*

12. Per precisare ancora meglio questi teoremi, osserviamo che la $V_3^5$ contiene un sistema $\infty^4$ di coniche tale che per una coppia di punti generici della $V_3^5$ passa una conica ed una sola.

Questa osservazione può giustificarsi in varia maniera. Può dirsi, per es., che se $O$ è un punto generico dello spazio ambiente, ogni iperpiano per $O$ taglia la $V_3^5$ in una $V_2^5$ dotata di un sol punto doppio apparente (1), quindi le $\infty^1$ corde di $V_3^5$ che passano per $O$ stanno in un piano $\omega$, e la $V_3^5$ contiene $\infty^4$ curve disposte in piani di cui ne passa uno ed uno solo per ogni punto dello spazio ambiente. Ma allora queste $\infty^4$ curve sono necessariamente coniche (in caso contrario ogni corda di $V_3^5$ sarebbe almeno una trisecante) e per una coppia di punti generici della $V_3^5$ non ne passerà che una sola.

Si deduce incidentalmente di qui un teorema noto, del quale del resto avremmo potuto servirci per dimostrare l'esistenza su $V_3^5$ di un sistema $\infty^4$ di coniche. Si vede subito infatti che le $\infty^4$ coniche in discorso sono rappresentate nello spazio ordinario dalle $\infty^4$ coniche quadrisecanti $K$ e quindi:

*Per due punti generici dello spazio di una quartica di 2ª specie passa una ed una sola conica quadrisecante la quartica* (2).

(1) SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* (Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, t. XV), n. 9.

(2) Teorema del prof. MONTESANO, cfr. *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* (Rendic. della R. Accad. di Scienze fis. e mat. di Napoli, 1895;

13. Ciò posto si può supporre che la conica $C^2$ sia una qualunque delle $\infty^4$ coniche della $V_3^5$; d'altra parte gli $S_4$ che proiettano dal piano di $C^2$ gli $S_3$ tangenti alla $V_3^5$ nei punti di $C^2$ costituiscono un cono quadrico che ha per traccia sullo spazio ordinario rappresentativo la quadrica $Q$, dunque:

*Gli $S_3$ tangenti alla $V_3^5$ nei punti di una sua conica sono proiettati dal piano di questa secondo gli $S_4$ di una schiera di un cono quadrico avente per vertice quel piano.*

Le tracce sullo spazio rappresentativo degli $S_4$ di cui si parla in questo enunciato, quando ci si riferisca alla conica $C^2$, sono le trisecanti di $K$; le tracce degli $S_4$ dell'altra schiera appartenente al cono quadrico sono le generatrici di $Q$ unisecanti $K$, quindi tali $S_4$ tagliano la $V_3^5$ in una curva del $5^0$ ordine che si spezza in una conica contata due volte e in una retta residua.

Il cono quadrico in discorso contiene poi la rigata delle rette di $\Lambda$ uscenti dai punti della conica; d'altra parte esso taglia la $V_3^5$ in una $V_2^{10}$, dunque:

*La rigata costituita dalle rette di $\Lambda$ uscenti dai punti di una conica della $V_3^5$ è una rigata (razionale, perchè in corrispondenza biunivoca con $K$) del $10^o$ ordine avente nella conica una direttrice tripla.*

È utile osservare che l'ordine di questa rigata poteva esser calcolato diversamente: bastava considerare perciò o che un iperpiano per una conica della $V_3^5$ taglia la $V_3^5$ in una $V_2^5$ per la conica con quattro rette appoggiate ad essa, oppure che un $S_4$ generico taglia la $V_3^5$ in una curva del $5^0$ ordine rappresentata dalla ulteriore intersezione di due superficie cubiche passanti per $K$, e che tale intersezione è del $5^0$ ordine e del genere 1, per modo da avere 10 punti a comune con $K$ (¹).

14. Se chiamiamo *rigate $\theta$* le rigate costituite dalle rette di $\Lambda$ uscenti dai punti delle $\infty^4$ coniche della $V_3^5$, si ha subito che:

*Le rigate $\theta$ costituiscono nella varietà $\infty^2$ delle rette di $\Lambda$ (varietà razionale perchè in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di $K$) un sistema lineare $\infty^4$.*

Nota II). Vedi anche per l'inversione di questo teorema: BERZOLARI, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche* (Rendic. del R. Ist. Lombardo, vol. XXXIII, 1900), nota I, n. 11.

(¹) Per la notissima formula (di NOETHER) che dà il genere (virtuale) di una curva spezzata.

Infatti siano $a$, $b$, $c$, $d$ quattro rette generiche di $V_3^5$. Le prime tre $a$, $b$, $c$ sono congiunte da un $S_5$ che taglia la $V_3^5$ in una $V_2^5$ razionale normale contenente le tre rette $a$, $b$, $c$ e secante la retta $d$ in un punto $D$.

Questa $V_2^5$ contiene un solo fascio di coniche che siano appoggiate ad $a$, $b$, $c$ e di questo fascio *una* conica passa per $D$, dunque la sola rigata $\vartheta$ che ha questa conica per direttrice tripla passa per le quattro rette $a$ ,$b$, $c$, $d$.

Guardando allo spazio rappresentativo si ricava incidentalmente il teorema:

*Data una quartica di 2ª specie e quattro sue corde generiche esiste una ed una sola conica che si appoggi alle quattro corde e tagli la quartica in quattro punti.*

Il grado del sistema lineare costituito dalle rigate $\vartheta$ entro la varietà delle rette di $\Lambda$ si calcola con tutta facilità.

Si osservi per questo che, se $k_1$ e $k_2$ sono due coniche generiche di $V_3^5$, l'iperpiano che le contiene sega la $V_3^5$ in una $V_2^5$ su cui $k_1$ e $k_2$ (non avendo alcun punto comune) appartengono a uno stesso dei cinque fasci di coniche in essa contenuti (¹). Dunque vi sono quattro rette di $\Lambda$ appoggiate a $k_1$ e $k_2$, cioè le due rigate $\vartheta$ aventi $k_1$ e $k_2$ per direttrici triple hanno quattro generatrici in comune e il grado richiesto è 4.

15. Insieme con le rigate $\vartheta$ giova considerare entro la varietà $\Lambda$ le rigate $\vartheta_1$, ciascuna delle quali è costituita dalle $\infty^1$ coppie di rette di $\Lambda$ che escono dai punti di una retta della $V_3^5$. Una rigata $\vartheta_1$ è rappresentata dalle corde di $K$ appoggiate a una sua corda fissa e queste costituiscono una rigata cubica passante per $K$, dunque la rigata obbiettiva costituisce una sezione iperpiana della $V_3^5$ ed è una $V_2^5$ razionale (normale in un $S_6$) dotata di una retta direttrice doppia:

Si ricava di qui che:

*Per ogni retta della $V_3^5$ passa un iperpiano che la tocca in tutti i punti della retta stessa.*

Una rigata razionale $V_2^5$ di $S_5$ che abbia una retta direttrice doppia è proiezione di una $V_2^5$ di $S_6$ da un punto del piano di una sua conica direttrice, dunque sulla direttrice doppia vi sono due punti uniplanari.

(¹) Cfr. CAPORALI, *Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine* (Memorie di Geometria, Napoli, Pellerano, 1888).

A due corde generiche di $K$ si appoggia sempre una ed una sola corda della curva stessa (due $g_2^1$ in un ente razionale hanno sempre una coppia comune), dunque:

*Entro $\Lambda$ le rigate $\vartheta_1$ costituiscono una rete omaloidica.*

Infine poichè una conica e una retta generiche della $V_3^5$ sono congiunte da un $S_4$ che taglia la $V_3^5$ in due rette ulteriori appoggiate ad esse, od anche, poichè due rigate $\vartheta_1$ corrispondenti a rette incidenti della $V_3^5$ possono considerarsi come costituenti insieme una rigata $\vartheta_1$ si conclude che:

*Una rigata $\vartheta$ e una rigata $\vartheta_1$ hanno in generale due rette in comune.*

16. I teoremi precedenti dànno luogo a una importante deduzione relativamente alla $V_3^5$.

Infatti si immagini di riferire proiettivamente le rigate $\vartheta$ agli iperpiani di un $S_4$: le rette del sistema $\Lambda$ verranno mutate nei punti di una superficie del $4^0$ ordine di $S_4$, la quale conterrà $\infty^2$ coniche, corrispondentemente alle rigate $\vartheta_1$ di $\Lambda$, dunque questa superficie, che chiameremo $F_2^4$, sarà proiezione da un punto esterno di una superficie di VERONESE.

Ora si osservi che le tre rette di $\Lambda$ uscenti da un punto della $V_3^5$ impongono *due* sole condizioni a una rigata $\vartheta$ che debba contenerle, quindi i tre punti di $F_2^4$ che le rappresentano impongono due sole condizioni agli iperpiani che debbono contenerli, ossia sono allineati. Ne segue che, come le rette di $\Lambda$ vengono riferite biunivocamente ai punti di $F_2^4$, così i punti della $V_3^5$ vengono riferiti biunivocamente alle sue trisecanti. Ma le trisecanti della $F_2^4$ costituiscono il sistema $\infty^3$ di rette comuni a tre (e quindi a una rete di) complessi lineari in $S_4$ (1), dunque:

*I punti della $V_3^5$ possono rappresentarsi biunivocamente sul sistema $\infty^3$ delle rette comuni a tre complessi lineari di uno spazio a quattro dimensioni.*

17. Per approfondire ancora lo studio delle proprietà della $V_3^5$, rammentiamo che in una $F_2^4$ di $S_4$ con $\infty^2$ coniche (come del resto si verifica subito o direttamente o ricorrendo alla rappresentazione della $F_2^4$ mediante un sistema lineare $\infty^4$ di coniche), il piano

(1) CASTELNUOVO, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti del R. Ist. Veneto di scienze, lettere ed arti, serie VII, t. II), n. 7, 8.

di una conica taglia ulteriormente la $F_2^4$ in un punto, centro del fascio delle $\infty^1$ trisecanti della superficie situate in quel piano, e che il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte ad una conica dal punto in cui il suo piano taglia ulteriormente la $F_2^4$ è una curva del quart'ordine $C^4$ razionale normale. Questa $C^4$ è anche il luogo dei punti della $F_2^4$ per i quali le $\infty^1$ trisecanti riduconsi a $\infty^1$ tangenti-secanti e infine il piano tangente alla $F_2^4$ in un punto della $C^4$ è osculatore a questa ultima (1).

Le trisecanti di $F_2^4$ che sono delle tangenti-secanti corrispondono, nel modo che si è detto precedentemente, ai punti della $V_3^5$ da cui escono due, anzi che tre rette di $\Lambda$, e poichè tali trisecanti si distribuiscono in $\infty^1$ fasci coi centri nei punti di $C^4$, così questi punti della $V_3^5$ si distribuiranno sopra $\infty^1$ rette costituenti una rigata (2), la rigata $\Phi$ di $\Lambda$ che corrisponde ai punti della linea $C^4$ di $F_2^4$.

Se $h$ è una generatrice di $\Phi$, da ogni punto di $h$ esce una sola ulteriore retta di $\Lambda$, come dal corrispondente punto $H$ di $F_2^4$ (e $C^4$) escono soltanto delle tangenti-secanti di $F_2^4$: e come da $H$ esce *una* retta (la tangente alla conica situata nel piano ivi tangente alla $F_2^4$, ossia la tangente a $C^4$) che ha un contatto tripunto in $H$ con $F_2^4$, così vi è su $h$ *un* punto dal quale *non* escono ulteriori rette di $\Lambda$.

Se diciamo $\varphi$ la curva di $\Phi$ luogo dei punti di $V_3^5$ da cui esce una sola retta di $\Lambda$, per cercare l'ordine di $\varphi$ converrà osservare che le sezioni iperpiane di $V_3^5$ corrispondono, nella rappresentazione dei punti di questa varietà sulle trisecanti di $F_2^4$, alle congruenze staccate sulla varietà delle trisecanti di $F_2^4$ dai complessi lineari dell'$S_4$ cui appartiene la $F_2^4$.

Infatti una tale congruenza è ad es. quella delle trisecanti uscenti dai punti di una conica di $F_2^4$ che sono (si vede subito) tutte e sole le trisecanti della $F_2^4$ appoggiate al piano della conica, e quindi appartenenti al complesso lineare speciale che ha un tal piano per asse, e, per quanto è stato detto, alle rette di questa

(1) Cfr. Segre, *Sulle varietà cubiche*, etc. (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1888) n. 43 e 44; od anche: Bertini, *Introduzione alla geom. proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 347-8.

(2) In generale i punti di una retta di $\Lambda$ corrispondono alle trisecanti di $F_2^4$ del fascio avente il centro in un suo punto. I punti di appoggio di queste trisecanti sulla $F_2^4$ fuori del centro del fascio stanno poi sulla conica che rappresenta la rigata $\vartheta_1$ avente quella retta per direttrice doppia.

congruenza corrispondono i punti di $V_3^5$ situati sulle rette di una rigata $\vartheta_1$, ossia di una certa sezione iperpiana di $V_3^5$.

E allora poichè i punti di $\varphi$ corrispondono alle tangenti di $C^4$, l'ordine di $\varphi$ uguaglierà il numero delle tangenti di $C^4$ appartenenti a un complesso lineare, o, in particolare, al numero delle tangenti di $C^4$ appoggiate a un $S_2$ generico dell'$S_4$ che la contiene. Tale numero è 6, dunque $\varphi$ è una sestica razionale normale, perchè come le tangenti di $C^4$ non appartengono ad uno stesso complesso lineare, così $\varphi$ non è contenuta in un $S_5$.

Si osservi che per trovare i punti di contatto delle 6 tangenti di $C^4$ appartenenti a un dato complesso lineare basta, per es., costruire le coincidenze della corrispondenza simmetrica (3, 3) che si ottiene sulla $C^4$ chiamando omologhi due punti $X$ ed $X'$ quando $X'$ sta nell'$S_3$ che contiene le rette del complesso uscenti da $X$. Ne segue che se si considera un complesso lineare il quale contenga tutte le rette del fascio avente il centro nel punto $H$ e situato nel piano ivi tangente ad $F_2^4$, essendo questo piano osculatore a $C^4$, due coincidenze della corrispondenza (3, 3) in discorso cadono in $H$, poichè $H$ coincide con due dei punti ad esso omologhi (1). Ma alla congruenza che un tal complesso lineare stacca dalla varietà delle trisecanti di $F_2^4$ corrisponde sulla $V_3^5$ una sezione iperpiana passante per $h$, dunque un iperpiano che passi per $h$ ha un contatto bipunto con $\varphi$ nel punto che questa curva ha a comune con $h$, ossia $h$ è tangente a $\varphi$ e $\Phi$ è la rigata (sviluppabile) delle rette tangenti a $\varphi$.

Di qui segue che $\Phi$ è del $10^0$ ordine e costituisce la completa intersezione della $V_3^5$ con la quadrica $\Psi$ rispetto alla quale ogni punto di $\varphi$ ha per iperpiano polare l'iperpiano in esso osculatore a $\varphi$.

18. Fra le trisecanti di $F_2^4$ appoggiate a una sua conica generica due sole sono tangenti a $C^4$, poichè se una tangente $a$ di $C^4$ si appoggia alla conica considerata, tale tangente dovendo avere un contatto tripunto con $F_2^4$ in un punto appartenente alla conica sarà una delle due rette tangenti a $C^4$ nei punti ove essa taglia il piano della conica.

Che se poi la conica in discorso è, per es., quella che sta nel piano tangente a $F_2^4$ nel punto $H$, allora l'unica tangente di $C^4$ appoggiata ad essa è quella che tocca $C^4$ nel punto $H$.

(1) Vedi Bertini, *Introduzione*, etc., pag. 205.

Si conclude che gli iperpiani contenenti le rigate $\vartheta_1$ che hanno per direttrici doppie le rette di $\Lambda$ appoggiate ad $h$ hanno tutti un contatto tripunto con la curva $\varphi$ nel punto che essa ha a comune con $h$, mentre la rigata $\vartheta_1$ costituita dalle rette di $\Lambda$ che escono dai punti di $h$ è la sezione di $V_3^5$ con l'iperpiano osculatore a $\varphi$ in quel punto stesso.

Ciò posto, sia $d$ una retta qualunque della $V_3^5$ e siano $h$ ed $i$ le due generatrici di $\Phi$ appoggiate a $d$. Se $H'$ ed $I'$ sono i punti ove $h$ ed $i$ toccano $\varphi$, gli iperpiani osculatori a $\varphi$ in $H'$ ed $I'$ passano per $d$, quindi gli iperpiani polari dei punti $dh$ e $di$ rispetto a $\varphi$ passano per $H'$ ed $I'$ e, precisamente, il primo passerà semplicemente per $I'$ mentre avrà con $\varphi$ un contatto 5-punto in $H'$ [1] e il secondo passerà semplicemente per $H'$ mentre avrà con $\varphi$ un contatto 5-punto in $I'$.

Ne segue che l'involuzione $I_1^6$ del 6° ordine e di 1ª specie tagliata su $\varphi$ dagli iperpiani polari dei punti di $d$ avrà per equazione sull'ente razionale $\varphi$

$$x_1 x_2 (k_1 x_1^4 + k_2 x_2^4) = 0$$

se i punti fondamentali $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ sono $H'$ ed $I'$ e quindi ogni gruppo della $I_1^6$ sarà una sestica ottaedrica, cioè una sestica binaria costituita da tre coppie separantisi a due a due armonicamente.

Deduciamo di qui che:

*La $V_3^5$ di $S_6$ a curve sezioni ellittiche è il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a una curva del 6° ordine razionale normale $\varphi$ tagliano la curva stessa in una sestica binaria ottaedrica.*

Le $\infty^3$ collineazioni che mutano in sè la curva $\varphi$ mutano pure in sè la $V_3^5$ e viceversa; quindi:

*La $V_3^5$ ammette un gruppo $\infty^3$ di trasformazioni omografiche in sè.*

Questo gruppo si riflette nello $S_3$ rappresentativo in un gruppo $\infty^3$ di trasformazioni cremoniane che in una ricerca dei proff. Enriques e Fano si è presentato come uno dei pochi tipi di gruppi imprimitivi irriducibili (per trasformazioni cremoniane) a gruppi di Jonquières generalizzati [2].

[1] Si ricordi che nella polarità individuata dalla curva $\varphi$ nello $S_6$ una retta tangente a $\varphi$ ha per $S_4$ polare l'$S_4$ osculatore a $\varphi$ nel suo punto di contatto.

[2] F. Enriques e G. Fano, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (Annali di Matematica, 1897), n. 26. In questo lavoro le equazioni

19. Abbiamo osservato che una rigata $\vartheta_1$ ha per immagine nell'$S_3$ rappresentativo della $V_3^5$ la rigata di 3° grado costituita dalle corde di $K$ appoggiate a una sua corda fissa. Finchè questa corda è generica la rigata di 3° grado ad essa relativa ha in essa soltanto la direttrice doppia, ma se la corda considerata $b$ è immagine di una retta di $\Lambda$ appartenente a $\Phi$, da ogni punto della corda deve partire soltanto una corda ulteriore di $K$ e deve esistere su $b$ un punto pel quale $b$ sia l'unica corda di $K$ passante per esso; quindi $b$ deve essere la retta congiungente i punti di contatto di un piano bitangente a $K$ e la rigata relativa a $b$ deve risultare una rigata di CAYLEY.

Ora $\Phi$ essendo situata sulla quadrica $\Psi$ ha in comune quattro punti con (ogni conica e quindi con) la conica di cui si fa la proiezione, dunque l'immagine di $\Phi$ è una rigata sviluppabile razionale del 6° grado.

Questo, poichè è chiaro che l'immagine di $\Phi$ è la sviluppabile bitangente a $K$, collima col fatto noto che la sviluppabile bitangente di $K$ è del 6° ordine e della 4ª classe. Il suo spigolo di regresso è poi una sestica gobba razionale $C^6$, proiezione della sestica normale $\varphi$.

Come il gruppo delle trasformazioni proiettive della $V_3^5$ in sè è determinato dalla curva $\varphi$, così il gruppo delle trasformazioni cremoniane ad esso corrispondente nello spazio rappresentativo si può costruire partendo dalla sestica $C^6$.

Si osservi dapprima che i punti in cui una retta $d$ di $\Lambda$ incontra la rigata $\Phi$ hanno per immagini i due punti uniplanari della rigata gobba di 3° grado contenente $K$ e avente per direttrice doppia l'immagine $d'$ di $d$, ossia le intersezioni di $d'$ con la sviluppabile bitangente di $K$ non situate sulla curva $K$. Le due tangenti di $C^6$ passanti poi per questi punti vanno a toccare $C^6$ nei punti immagini di quelli che $\varphi$ ha sulle rette di $\Phi$ tagliate da $d$.

La definizione di $V_3^5$ assegnata nel numero precedente dà allora il teorema:

*Se per un punto qualunque dello spazio (ordinario) contenente $K$ si conducono le tre corde che vi passano, e poi si costruiscono sullo*

della $V_3^5$ vengono scritte utilizzando la teoria delle forme binarie, ma alle stesse equazioni si arriva anche tenendo conto del teorema da noi dimostrato che la $V_3^5$ può rappresentarsi sulla varietà delle rette comuni a tre complessi lineari di $S_4$.

*spigolo di regresso* $C^6$ *della sviluppabile bitangente i punti di contatto delle tangenti di* $C^6$ *che si appoggiano a quelle corde fuori di* $K$, *si ottengono sopra* $C^6$ *tre coppie di punti che si separano armonicamente due a due.*

Allora le $\infty^3$ trasformazioni cremoniane in discorso si ottengono stabilendo che per ogni trasformazione proiettiva della $C^6$ in sè stessa si dicano omologhi i due punti $X$ ed $X'$ dello spazio che dànno luogo su $C^6$ a due sestiche binarie ottaedriche corrispondenti nella data proiettività.

20. Passiamo ora alla considerazione della $V_3^6$ di $S_7$ a curve sezioni ellittiche rappresentata dalle superficie cubiche $L$ passanti per tre rette $a_1, a_2, a_3$ sghembe fra di loro a due a due. La quadrica $Q$ che passa per $a_1, a_2, a_3$ è la quadrica fondamentale dello spazio rappresentativo che corrisponde ai punti di $V_3^6$ infinitamente vicini alla cubica gobba $C^3$ di $V_3^6$ da cui si fa la proiezione.

Si riconosce subito che la $V_3^6$ contiene tre sistemi di rette $\infty^2$ tali che per ogni punto della $V_3^6$ passa una retta per ogni sistema; tali rette hanno per immagini quelle delle tre congruenze lineari aventi per direttrici $(a_1, a_2)$, $(a_2, a_3)$, $(a_3, a_1)$. Poi, siccome ogni superficie cubica $L$ passante per $a_1, a_2, a_3$ contiene due rette appoggiate a due di queste tre e non alla terza, così quei tre sistemi $\infty^2$ di rette sono ciascuno della $2^a$ classe.

Un piano dello spazio rappresentativo che passi, per es., per $a_1$, taglia le superficie cubiche $L$ fuori di $a_1$ in coniche residue passanti per i punti ove esso incontra le rette $a_2, a_3$: quindi è immagine di una quadrica $V_2^2$ di $V_3^6$. Risulta così che la $V_3^6$ contiene tre fasci di quadriche corrispondentemente ai tre fasci di piani $a_1, a_2, a_3$.

Le quadriche passanti, per es., per $a_1, a_2$, poichè con ogni piano passante per $a_3$ costituiscono una superficie $L$, rappresenteranno le sezioni residue della $V_3^6$ con gli iperpiani passanti per le quadriche del fascio corrispondente a quello dei piani per $a_3$; quindi si avranno sopra $V_3^6$ tre sistemi $\infty^3$ di $V_2^4$ razionali normali (rigate). Ognuno di questi sistemi è residuo di uno dei tre precedenti fasci di quadriche rispetto a quello delle sezioni iperpiane.

Le rette dei tre sistemi di $V_3^6$ uscenti dai punti della $C^3$ da cui si fa la proiezione costituiscono tre rigate distinte razionali normali appartenenti ai tre sistemi ora considerati; ma ai punti di una generatrice di una di esse non corrisponde nello spazio rappresentativo che un unico punto di una delle tre rette $a_1, a_2, a_3$.

Per fissare le idee chiamiamo $A_1$, $A_2$, $A_3$ i tre sistemi di rette di $V_3^6$ rappresentati dalle congruenze lineari $(a_2, a_3)$. $(a_3, a_1)$ $(a_1, a_2)$; $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ i tre fasci di quadriche rappresentate dai piani per $a_1$, $a_2$, $a_3$ e infine $\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$ i tre sistemi lineari $\infty^3$ di $V_2^4$ corrispondenti alle rigate quadriche contenute nelle congruenze $(a_2, a_3)$, $(a_3, a_1)$, $(a_1, a_2)$ rispettivamente.

Allora si vede subito che le rigate $\Psi_i$ sono formate con le rette del sistema $A_i$, mentre le due schiere di rette di una quadrica $\Phi_i$ appartengono l'uno al sistema $A_h$, l'altra al sistema $A_k$, se $i$, $h$, $k$ costituiscono una permutazione qualsiasi dei numeri 1, 2, 3.

Una quadrica $\Phi_i$ e una rigata $\Psi_i$ prese insieme costituiscono una sezione iperpiana di $V_3^6$ e si tagliano lungo una conica (le $\infty^1$ coniche direttrici di una $\Psi_i$ sono appunto tagliate su questa dalle quadriche del fascio $\Phi_i$).

Due quadriche dello stesso fascio non hanno punti comuni; invece due quadriche di fasci differenti si tagliano secondo una retta e tre quadriche appartenenti ai tre fasci hanno un sol punto comune. Due quadriche $\Phi_i$ sono punteggiate proiettivamente dalle rette del sistema $A_i$; etc., etc.

21. Dalle osservazioni fatte si deduce una facile costruzione proiettiva della $V_3^6$ che stiamo studiando.

Prendiamo infatti in un $S_7$ due $S_3$ indipendenti $\alpha'$, $\alpha''$ e riferiamoli collinearmente. È chiaro che le rette congiungenti i punti omologhi formano una $V_4^4$ razionale normale contenente $\infty^1$ $S_3$ (di cui due sono appunto $\alpha'$ e $\alpha''$) e $\infty^3$ rette: gli $S_3$ tagliano sulle $\infty^3$ rette $\infty^3$ punteggiate proiettive e le rette punteggiano collinearmente gli $\infty^1$ $S_3$. Allora segue subito che, se entro $\alpha'$ e $\alpha''$ si considerano due quadriche omologhe $\Phi_1'$ e $\Phi_1''$, le rette che ne congiungono i punti omologhi si appoggiano ad $\infty^1$ altre quadriche $\Phi_1'''$ ... e formano un sistema $A_1$ di una $V_3^6$.

Gli altri sistemi di rette della $V_3^6$ sono costituiti dalle rette dei due sistemi di schiere delle $\Phi_1'$, $\Phi_1''$, $\Phi_1'''$... etc.

I tre fasci di quadriche appartenenti alle $V_3^6$ permettono di determinare facilmente le trasformazioni proiettive in sè della $V_3^6$. È chiaro, infatti, che una omografia la quale muti in sè la $V_3^6$ muta in sè o scambia fra di loro, proiettivamente, i tre fasci di quadriche; e d'altra parte se si stabiliscono, per es., delle proiettività nei singoli fasci di quadriche $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ verrà stabilita fra i punti della $V_3^6$ una corrispondenza biunivoca, quando si supponga che siano omologhi due punti che si trovino su quadriche omologhe dei fasci. Tale corrispondenza biunivoca è poi una proiettività perchè muta la sezione iperpiana formata da tre quadriche prese una per fascio in una analoga sezione iperpiana, quindi:

*La $V_3^6$ di $S_7$ che stiamo esaminando ammette $\infty^9$ omografie (costituenti gruppo) che mutano in sè ciascuno dei tre fasci di quadriche; tre sistemi $\infty^6$ di omografie che mutano in sè le quadriche di un fascio ma scambiano fra di loro quelle degli altri due, e infine un altro sistema $\infty^6$ di omografie che scambiano fra di loro i tre fasci di quadriche.*

22. Non ci fermiamo più minutamente sullo studio di questa $V_3^6$ poichè come è chiaro esso è estremamente semplice. Osserveremo soltanto che essa può assumersi come la varietà di $S_7$ rappresentante, nel modo che fu indicato dal prof. SEGRE [1], la varietà delle terne di punti di tre rette; quindi una sua sezione iperpiana, cioè una $F_2^6$ di $S_6$ razionale normale può riguardarsi come rappresentante la varietà delle terne di punti omologhi in tre punteggiate in corrispondenza trilineare; allora lo studio della $F_2^6$ diventa quello della varietà di queste terne e viceversa.

In particolare si osservi come il fatto che un iperpiano il quale passi per cinque punti della $V_3^6$ la taglia in un sesto individuato dai precedenti diventa il teorema noto [2]:

*Date su tre rette a, b, c cinque terne di punti omologhi vi sono $\infty^2$ corrispondenze trilineari che le contengono e le corrispondenze stesse hanno in comune una sesta terna individuata da quelle.*

23. Più interessanti risultano le $V_3^6$ di $S_7$ rappresentate nello spazio ordinario dalle superficie cubiche per una cubica gobba e con un punto doppio in un punto di questa o dalle superficie cubiche per una cubica piana nodale con un punto biplanare nel nodo della cubica e in esso un piano osculatore fisso.

Così ho dimostrato in una Nota già citata che esse sono insieme con la $V_3^8$ di 2ª specie e le sue proiezioni sopra un $S_8$ o un $S_7$ alcune delle poche $V_3$ di $S_r$ $(r \geq 7)$ a $S_3$ tangenti mutuamente secantisi. Qui piuttosto che riprodurre quel ragionamento preferisco notarne qualche altra proprietà.

[1] SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, V, 1891).

[2] CASTELNUOVO, *Studio sulla omografia di seconda specie* (Atti del R. Ist. Veneto di scienze, lettere ed arti, t. V, serie VI), n. 28.

24. Consideriamo in primo luogo la $V_3^6$ rappresentata dalle superficie cubiche $L$ che passano per una cubica gobba $K$ e hanno in un suo punto $O$ un punto doppio.

Tale $V_3^6$ contiene due sistemi $\infty^2$ di rette: l'uno, che diremo $A$, è rappresentato dalle rette della stella $O$, l'altro che diremo $M$, dalle corde della cubica $K$. Per ogni punto di $V_3^6$ passa una retta di $A$ e una retta di $M$, invece in ogni iperpiano vi sono tre rette di $A$ e tre rette di $M$.

I piani dello spazio rappresentativo che passano per $O$ e le quadriche che contengono $K$ rappresentano due reti di rigate cubiche normali di $V_3^6$, mutuamente residue rispetto al sistema lineare delle sezioni iperpiane. Le direttrici delle rigate cubiche corrispondenti ai piani per $O$, cioè delle rigate formate con rette di $A$ appartengono al sistema $M$ e così le direttrici delle rigate riempite da rette di $M$ appartengono a $A$ (1).

Due rigate appartenenti a una medesima rete si tagliano in una retta che è una loro generatrice comune; invece due rigate appartenenti a reti diverse si tagliano in una conica rappresentata dalla conica intersezione di una quadrica per $K$ con un piano per $O$.

Può dirsi pertanto:

*Date due rette della $V_3^6$ appartenenti a uno stesso sistema esiste sempre una ed una sola retta dell'altro che si appoggia ad entrambe.*

25. Alla $V_3^6$ appartengono anche $\infty^4$ coniche e per due suoi punti generici ne passa una ed una sola. Esse sono rappresentate dalle $\infty^4$ coniche dello spazio rappresentativo che passano per $O$ e si appoggiano in due punti ulteriori a $K$, e come ognuna di queste sta sopra una quadrica per $K$ e un piano per $O$, così ognuna delle coniche di $V_3^6$ sta sopra due rigate cubiche normali, formate l'una dalle rette di $A$ che escono dai suoi punti e l'altra dalle rette di $M$ che escono dai punti medesimi.

26. Un iperpiano che contenga una rigata di una rete taglia

(1) La cosa si vede subito nell'$S_3$ rappresentativo. Così un piano per $O$ taglia $K$ in due punti ulteriori $A$ e $B$ e le superficie $L$ in un sistema lineare $\infty^4$ di cubiche per $O, A, B$ con un punto doppio in $O$. Queste rappresentano adunque le sezioni iperpiane di una $V_2^3$ razionale normale, la cui direttrice ha per immagine $AB$ e $AB$ è appunto una corda di $K$. Se si considera una quadrica per $K$, la direttrice della $V_2^3$ corrispondente è l'unisecante di $K$ che appartiene alla quadrica ed esce dal punto $O$.

$V_3^6$ in una rigata dell'altra rete e quindi tocca $V_3^6$ in tutti i punti della conica secondo cui le due rigate si tagliano. Viceversa, un iperpiano che sia costretto a toccare $V_3^6$ in due punti taglia la $V_3^6$ in una superficie rappresentata da una superficie cubica per $K$, con un punto doppio in $O$ e due altri punti doppi $A$ e $B$, cioè da una superficie spezzata nel piano $O\,A\,B$ e nella quadrica che passa per $K$ ed $A, B$; dunque:

*Se un iperpiano tocca $V_3^6$ in più di un punto la tocca in $\infty^1$ e precisamente in tutti i punti di una conica. Viceversa la $V_3^6$ è toccata lungo ogni sua conica da un iperpiano.*

27. Siano $a_1, a_2, a_3$ tre rette qualunque di $\Lambda$ e $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ le tre rigate cubiche normali che contengono (come generatrici) $a_2, a_3$; $a_3, a_1$; $a_1, a_2$ rispettivamente. Se diciamo $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ gli $S_4$ che le contengono, si può fissare nell'$S_7$ una corrispondenza fra gli $S_5$ passanti per $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ chiamando omologhi tre $S_5$ che congiungono questi tre spazi con una stessa retta di $M$ [1].

Se si conduce per $\Sigma_1$ un iperpiano $\alpha_1$, esso taglia $V_3^6$ in una rigata residua $\Psi_1$ di rette di $M$ che insieme con $\Phi_2$ e $\Phi_3$ dà l'intersezione completa di $V_3^6$ con altri due iperpiani $\alpha_2$ e $\alpha_3$, dunque agli $S_5$ per $\Sigma_1$ che proiettano le rette di $\Psi_1$ e formano un fascio nell'iperpiano $\alpha_1$ corrispondono nelle stelle $\Sigma_2$ e $\Sigma_3$ gli $S_5$ che proiettano le rette di $\Psi_1$ e formano dei fasci negli iperpiani $\alpha_2$ e $\alpha_3$; ossia le tre stelle $\Sigma_1, \Sigma_2$, e $\Sigma_3$ sono riferite omograficamente.

Ne deduciamo, dopo una facile inversione del ragionamento ora fatto:

*Se in un $S_7$ si riferiscono proiettivamente gli $S_5$ passanti per tre $S_4$ generici, le $\infty^2$ rette secondo cui si intersecano le terne di $S_5$ omologhi riempiono una $V_3^6$ a curve sezioni ellittiche. Essa contiene un secondo sistema di $\infty^2$ rette che è generabile nello stesso modo, e anzi i tre $S_4$, centri di tre stelle proiettive generanti la $V_3^6$, sono gli spazi che contengono tre rigate cubiche normali qualunque di una delle due reti di tali rigate che possono formarsi con le rette dei due detti sistemi.*

Poichè una $F_3^6$ razionale normale di $S_6$, rappresentata su un piano dal sistema $\infty^6$ di cubiche che passano per tre punti, può sempre pensarsi come una sezione iperpiana della $V_3^6$, così segue

[1] Notisi che ogni retta di $M$ si appoggia in un punto a una rigata cubica costituita da rette di $\Lambda$.

senz'altro da questo teorema la generazione proiettiva della $F_2^6$ che fu indicata dal prof. BORDIGA (¹).

28. Una cubica gobba incontra complessivamente in tre punti due rigate cubiche (di reti diverse) costituenti insieme una sezione iperpiana: quindi, per un noto ragionamento, incontra in un punto ciascuna rigata di una rete e in due punti ciascuna rigata dell'altra rete.

Segue che, se si prendono due punti della cubica e si conduce per essi la rigata della 1ª rete che li contiene, tale rigata contiene la cubica per intero.

Adunque:

*Sulla $V_3^6$ si hanno due sistemi $\infty^6$ di cubiche gobbe. Essi sono costituiti dalle cubiche gobbe situate rispettivamente sulle rigate cubiche normali formate con le rette di $\Lambda$ e $M$. Le cubiche situate sulle rigate di $\Lambda$ sono rappresentate dalle cubiche piane che hanno in $O$ un nodo e bisecano altrove la cubica $K$; quelle dell'altro sono rappresentate dalle cubiche gobbe che passano per $O$ e quadrisecano altrove la cubica $K$. Tra le prime si trovano pertanto le cubiche gobbe che hanno per immagini le rette dello spazio rappresentativo.*

29. Dai punti di una cubica gobba situata sopra la $V_3^6$ escono due serie $\infty^1$ di rette: una è la serie delle generatrici di una $V_2^3$ normale, ma l'altra non può essere che la serie delle generatrici di una rigata d'ordine più elevato.

Per trovare quest'ordine supponiamo che la cubica di cui si tratta si trovi sopra una rigata cubica della rete costruita con rette di $\Lambda$ e, per facilitare ancora più la ricerca, supponiamo, come è possibile, che essa abbia per immagine una retta $r$ dello spazio rappresentativo. Allora la rigata delle rette di $M$ uscenti dai punti della cubica ha per immagine la rigata delle corde di $K$ uscenti dai punti di $r$, e questa è dell'ordine 4, ha in $K$ una direttrice doppia e in $r$ una direttrice semplice.

D'altra parte, due superficie cubiche $L$ si tagliano oltre che in $K$ in una sestica residua con un punto triplo in $O$ e appoggiata in altri sei punti a $K$, quindi questa sestica taglia la rigata quartica precedente in $4 \times 6 - 3 \times 2 - 6 \times 2 = 6$ punti fuori di $K$ e la rigata di cui questa è immagine è dell'ordine 6.

(¹) BORDIGA, *Di alcune superficie*, etc. (Atti Ist. Veneto, t. IV, serie 6ª, 1886).

In particolare delle due rigate formate dalle rette di $A$ e $M$ uscenti dai punti della cubica da cui si fa la proiezione della $V_3^6$ sullo spazio rappresentativo, la seconda, che è una $V_2^3$, ha per immagine il solo punto $O$, la prima, che è una $V_2^6$, ha per immagine la curva $K$, ogni sua generatrice proiettandosi in un punto di $K$. Questo dimostra che la $V_2^6$ appartiene all'$S_7$ (altrimenti $K$ sarebbe una cubica piana) ed è una $V_2^6$ razionale normale con $\infty^1$ direttrici minime d'ordine 3.

Riassumendo abbiamo:

*Le rette di $V_3^6$ uscenti dai punti di una sua cubica gobba costituiscono due rigate razionali normali. Una è una $V_2^3$ e l'altra è una $V_2^6$ con $\infty^1$ direttrici minime d'ordine 3; quest'ultima è incontrata in due punti da ogni retta del sistema $A$ se è costituita da rette di $M$, e viceversa.*

Tenendo presente ancora la cubica gobba da cui si fa la proiezione si ricava inoltre che:

*La $V_2^3$, contata due volte, e la $V_2^6$ formate dalle rette di $V_3^6$ uscenti dai punti di una sua cubica costituiscono la completa intersezione della $V_3^6$ col cono quadrico (cinque volte specializzato) proiettante dallo spazio della cubica gli spazi tangenti alla $V_3^6$ nei punti della cubica stessa.*

30. Una rappresentazione della $V_3^6$, di cui stiamo occupandoci, sopra un $S_3$ può ottenersi anche in un altro modo, utilizzando la proprietà che essa contiene $\infty^4$ coniche di cui ne passa una per ogni coppia di punti generici della $V_3^6$; proprietà che, sotto certe restrizioni, è conseguenza dell'altra, di cui pure essa è dotata, che gli $S_3$ ad essa tangenti in due punti generici $A$ e $B$ si incontrano in un punto.

Consideriamo infatti un punto $A$ della $V_3^6$ e l'$S_3$, $\alpha$, che la tocca in questo punto: allora la $V_3^6$ è rappresentata biunivocamente su $\alpha$ quando si faccia corrispondere al punto $X$ di $V_3^6$, il punto $X'$ di $\alpha$ ove la tangente in $X$ alla conica di $V_3^6$ che passa per $A$ e per $X$ taglia la retta tangente alla conica stessa nel punto $A$. Infatti per ogni coppia di punti di $V_3^6$ passa una sola sua conica e quindi in particolare per ogni retta di $\alpha$ uscente da $A$ vi è una sola conica di $V_3^6$ che le risulti tangente in $A$.

31. Per esaminare brevemente le proprietà della rappresentazione così ottenuta ([1]) chiamiamo $l_a$ ed $m_a$ le rette di $A$ e $M$, rispet-

([1]) Una considerazione analoga a quella del testo dà subito una *costruzione* tivamente, uscenti dal punto $A$, e cerchiamo l'immagine di una retta generica $l$ (o $m$) di $A$ (o $M$).

Per le due rette $l_a$ ed $l$ di $A$ passa una rigata cubica $V_2^3$ di rette dello stesso sistema avente per direttrice una retta $m$ di M appoggiata ad $l_a$ nel punto $D$, per conseguenza i punti di $\alpha$ corrispondenti ai punti di $V_3^6$ situati su tale $V_2^3$ si potranno considerare come ottenuti tagliando il piano $m\, l_a$ coi piani tangenti alla $V_2^3$ nei suoi singoli punti.

Ma con tale costruzione [2] le generatrici di $V_2^3$ vengono ad

della nota rappresentazione della superficie di VERONESE mediante il sistema di tutte le coniche di un piano (e più in generale, di *ogni varietà di Veronese* mediante il sistema delle quadriche di un $S_r$). Se infatti, preso un punto $A$ della superficie di VERONESE e il piano $\alpha$ ad essa tangente in $A$, si fa corrispondere ad ogni altro punto $X$ della superficie il punto $X'$ di $\alpha$ che è il polo della retta $A\,X$ rispetto alla conica della superficie che passa per $A$ e per $X$, si vede che la corrispondenza fra $X$ e $X'$ è biunivoca *senza eccezioni* e che le sezioni iperpiane della superficie sono rappresentate dalle coniche di $\alpha$.

[2] Se la costruzione indicata nella nota precedente si applica a una $V_2^3$ di $S_4$ la conclusione a cui si perviene è del tutto analoga. Se infatti (tenute le notazioni precedenti), $D$ è la traccia della direttrice $d$ sul piano $\alpha$ (per modo che $A\,D$ è la generatrice contenuta in $\alpha$) i piani tangenti alla $V_2^3$ nei punti di una generatrice $l$, formando un fascio di asse $l$ in un $S_3$ passante per $d$, hanno per tracce su $\alpha$ i punti di una retta $l'$ passante per $D$, ed $l'$ sarà l'immagine di $l$ nella rappresentazione eseguita. Allora una sezione iperpiana qualunque incontrando ogni generatrice in un punto e ogni conica della $V_2^3$ passante per $A$ in due punti, avrà per immagine la curva generata dai fasci $A$ e $D$ di $\alpha$ riferiti in corrispondenza $(1, 2)$ col raggio unito $A\,D$: ma questa è una conica per il punto $D$, dunque le immagini delle sezioni iperpiane sono le $\infty^4$ coniche $\alpha$ per il punto $D$.

È utile scriver le formule della corrispondenza biunivoca così stabilita fra i punti della $V_2^3$ e quelli del piano $\alpha$ ad essa tangente in $A$.

Fissando opportunamente i vertici 01234 della piramide fondamentale si può fare in modo che le coordinate del punto generico della $V_2^3$ siano date, al variare dei parametri $\lambda$ e $\mu$, dalle formule:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \lambda,\ x_2 = \lambda^2,\ x_3 = \mu,\ x_4 = \mu\,\lambda;$$

allora il piano 124 risulta tangente alla $V_2^3$ nel punto 2, e la retta 34 è la direttrice, cosicchè possiamo supporre $A \equiv 2$, $\alpha \equiv 124$ e $D \equiv 4$. Le quadriche:

$$(1) \qquad x_0\, x_2 - x_1^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad (2) \qquad x_0\, x_4 - x_1\, x_3 = 0$$

contengono la $V_2^3$, quindi il piano $\xi$ tangente alla $V_2^3$ nel punto $Y \equiv y_i$ sarà rappresentato dalle equazioni degli iperpiani tangenti in $Y$ alle quadriche (1) e (2) avere come immagini le rette del piano $m\, l_a$ uscenti da $D$ e le sezioni iperpiane della $V_2^3$ vengono ad avere per immagini le coniche di $m\, l_a$ passanti per $D$, dunque:

*Nella indicata rappresentazione della $V_3^6$ sullo spazio $\alpha$, le rette di $\Lambda$ vengono rappresentate da rette appoggiate ad $l_a$, le rette di $M$ da rette appoggiate ad $m_a$. Le rette di $\Lambda$ (di $M$) costituenti una $V_2^3$ passante per $l_a$ hanno per immagini le rette di un fascio avente il centro su $l_a$ (su $m_a$) e situata in un piano per $l_a$ (per $m_a$) e allorchè la $V_2^3$ descrive il fascio delle rigate di $\Lambda$ (di $M$) contenenti $l_a$ $(m_a)$ il centro e il piano del fascio di rette ora nominato descrivono su $l_a$ $(m_a)$ e intorno ad $l_a$ $(m_a)$ due forme proiettive. Per conseguenza le rette di $\Lambda$ e $M$ hanno per immagini in $\alpha$ le rette di due congruenze lineari speciali aventi per assi $l_a$ e $m_a$.*

ossia dalle:

$$y_2 x_0 - 2\, y_1 x_1 + y_0 x_2 = 0, \qquad y_4 x_0 - y_3 x_1 + y_0 x_4 = 0.$$

Le coordinate del punto ove $\xi$ taglia $\alpha$ sono allora:

$$x_0 = 0,\ x_1 = y_0,\ x_2 = 2\, y_1,\ x_3 = 0,\ x_4 = y_3,$$

e di qui, tenendo anche conto delle (1) e (2), si ricavano le formule della rappresentazione:

$$\nu\, y_0 = 4\, x_1^2;\ \nu\, y_1 = 2\, x_1 x_2;\ \nu\, y_2 = x_2^2;\ \nu\, y_3 = 4\, x_1 x_4;\ \nu\, y_4 = x_2 x_4 .$$

Queste dimostrano che alla sezione di $V_2^3$ ottenuta coll'iperpiano:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = 0$$

corrisponde nel piano $\alpha$ la conica:

$$4\, \alpha_0 x_1^2 + 2\, \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + 4\, \alpha_3 x_1 x_4 + 2\, \alpha_4 x_2 x_4 = 0$$

conica che taglia la retta $24 \equiv AD$ nel punto $4 \equiv D$ e nel punto $C$ la cui coordinata $\frac{x_2}{x_4}$ sopra la retta $AD$ è data da $-\frac{2\, \alpha_4}{\alpha_2}$. La coordinata invece del punto $I$ in la retta $AD$ è tagliata dall'iperpiano $\xi$ è data da $-\frac{\alpha_4}{\alpha_2}$, quindi le coppie $AI$ e $CD$ si separano armonicamente; cioè si ha il teorema:

*L'ulteriore punto d'intersezione della retta $AD$ colla conica passante per $D$ e rappresentante nel modo che si è detto la sezione della $V_2^3$ con un iperpiano $\xi$ è il coniugato armonico di $D$ rispetto ad $A$ e al punto d'incontro di $\xi$ con la retta $AD$.*

Per brevità indicheremo nel seguito queste due congruenze coi simboli $[l_d]$ ed $[m_a]$.

32. Consideriamo ora una $V_2^3$ di $A$ che non contenga la retta $l_a$ e che abbia per direttrice la retta $m_1$ di $M$. Le immagini delle sue generatrici saranno le rette della congruenza $[l_a]$ appoggiate alla retta $m_1'$ di $[m_a]$ che corrisponde ad $m_1$, cioè le rette d'una rigata quadrica passante per $m_a$, dunque:

*Le due reti di $V_2^3$ della $V_3^6$ sono rappresentate in $\alpha$ dalle due reti di quadriche contenute nelle congruenze lineari speciali $[l_a]$ ed $[m_a]$ e passanti per $m_a$ od $l_a$ rispettivamente, quindi le $\infty^4$ coniche della $V_3^6$ sono rappresentate dalle $\infty^4$ coniche appoggiate ad $l_a$ ed $m_a$ secondo cui si tagliano a due a due le quadriche di queste due reti.*

Due $V_2^3$ qualsiansi della $V_3^6$ appartenenti a reti diverse dànno, prese insieme, una sezione iperpiana, e le loro immagini costituiscono complessivamente una superficie del quart'ordine, quindi:

*Le sezioni iperpiane della $V_3^6$ hanno per immagini in $\alpha$ un sistema lineare $\infty^7$ di superficie $N$ del quart'ordine.*

Una qualunque superficie $N$, essendo immagine di una sezione iperpiana, seca un piano $\pi$ che passi per $l_a$ (od $m_a$), oltre che nella retta $l_a$ (o $m_a$), in una conica residua immagine della linea comune al considerato iperpiano e alla $V_2^3$ rappresentata da $\pi$; e d'altra parte le rette della congruenza $[l_a]$ (od $[m_a]$) non incontrano la superficie $N$ fuori di $l_a$ (od $m_a$) che in un sol punto ulteriore, dunque:

*Le superficie $N$ hanno tutte in $l_a$ ed $m_a$ due rette doppie ed in $A$ un punto doppio uniplanare col piano osculatore fisso $l_a m_a$. Inoltre in ogni punto di $l_a$ (od $m_a$) uno dei piani osculatori è costituito dal piano che contiene le rette di $[l_a]$ (od $[m_a]$) uscenti dal punto.*

Una sezione iperpiana della $V_3^6$ si può considerare come il luogo delle $\infty^1$ cubiche gobbe segnate su di essa dalle $\infty^1$ $V_2^3$ formate con le rette di $A$ (di $M$) che passano per $l_a (m_a)$, quindi la corrispondente immagine $N$ è il luogo di $\infty^1$ coniche situate in piani passanti per $l_a$ (od $m_a$) e secanti $l_a$ (od $m_a$) nelle coppie di una involuzione quadratica avente per punti doppi il punto $A$ e l'intersezione di $l_a$ $(m_a)$ col considerato iperpiano.

33. Se diciamo $\beta$ lo spazio su cui la $V_3^6$ è rappresentata mediante il sistema delle superficie cubiche $L$ passanti per la cubica gobba $K$ e aventi un punto doppio in un suo punto $O$, tra lo spazio $\beta$ e lo spazio $\alpha$ dei n. 30, 31 e 32 viene stabilita mediante la $V_3^6$ una corrispondenza cremoniana, quando si dicano omologhi due punti di $\beta$ ed $\alpha$ che rappresentano uno stesso punto della $V_3^6$.

Poichè i piani di $\beta$ insieme col cono quadrico projettante $K$ da $O$ costituiscono delle supèrficie cubiche $L$ anzi le superficie cubiche $L$ che rappresentano le sezioni della $V_3^6$ con gli iperpiani passanti per una sua certa cubica gobba $C^3$, così ad essi corrisponderanno in $\alpha$ le superficie $N$ di un sistema lineare $\infty^3$ passanti per l'immagine di $C^3$ in $\alpha$. Tale immagine poi essendo l'ulteriore intersezione, fuori di $l_a$ ed $m_a$, di una superficie $N$ con una quadrica della congruenza $[m_a]$ passante per $m_a$, è ancora una cubica gobba.

D'altra parte anche in $\alpha$ un piano variabile insieme col piano $l_a\, m_a$ contato tre volte costituisce una superficie $N$, dunque ai piani di $\alpha$ corrisponde in $\beta$ un sistema lineare $\infty^3$ di superficie cubiche $L$ e si conclude che la trasformazione cremoniana di $\beta$ in $\alpha$ è in un senso del 4° ordine e nell'altro del 3°.

Ora è interessante cercare le formule di una corrispondenza cremoniana atta a trasformare il sistema di superficie quartiche $N$ in un sistema di superficie cubiche del tipo $L$, perchè così troveremo incidentalmente una nuova proprietà delle superficie $N$.

34. Per questo, cominciamo dallo stabilire in $\alpha$ un sistema di coordinate prendendo il punto $l_a\, m_a$ come vertice 1 della piramide fondamentale, un punto qualunque di $l_a$ come vertice 2, un punto qualunque di $m_a$ come vertice 3, il piano che contiene le rette di $[l_a]$ uscenti da 2 come piano 124, il piano che contiene le rette di $[m_a]$ uscenti da 3 come piano 134, e infine scegliamo il punto 4 (sulla retta intersezione di questi due piani) e il punto unità $U$, in modo che il piano 12 $U$ sia quello che contiene le rette di $[l_a]$ uscenti dal punto ove 12 taglia il piano 34 $U$.

Allora, se indichiamo con $\varphi_3$ e $\varphi_4$ delle forme di 3° e 4° ordine nelle tre variabili $x_2, x_3, x_4$, l'equazione di una superficie $N$ sarà intanto del tipo:

$$a\, x_4^2\, x_1^2 + \varphi_3\, x_1 + \varphi_4 = 0$$

poichè il punto 1 è per essa un punto doppio uniplanare col piano osculatore in 123; e poichè essa deve anche avere in 12 e 13 delle rette doppie mancheranno in $\varphi_3$ i termini in $x_2^3$, $x_2^2 x_3$, $x_2^2 x_4$, $x_3^3$, $x_3^2 x_2$, $x_3^2 x_4$ e in $\varphi_4$ i termini in $x_2^4$, $x_2^3 x_3$, $x_2^3 x_4$, $x_3^4$, $x_3^3 x_2$, $x_3^3 x_4$, cioè l'equazione sarà del tipo:

$$(1)\quad \begin{cases} a x_4^2 x_1^2 + (b x_4^3 + c x_4^2 x_2 + d x_4^2 x_3 + e x_2 x_3 x_4) x_1 + f x_4^4 + g x_4^3 x_2 + \\ + h x_4^3 x_3 + i x_2^2 x_3^2 + j x_2^2 x_4^2 + k x_3^2 x_4^2 + l x_2^2 x_3 x_4 + m x_2 x_3^2 x_4 + n x_2 x_3 x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Ora si osservi che la proiettività stabilita dalla congruenza $[l_a]$ fra i punti e i piani di $l_a$ per le ipotesi fatte sulla piramide fondamentale, è rappresentata analiticamente scrivendo che al punto rappresentato *sopra* 12 dall'equazione

$$x_1 - \lambda x_2 = 0$$

corrisponde nel fascio 12 il piano di equazione:

$$x_3 - \lambda x_4 = 0$$

quindi se si cerca la conica, residua intersezione di $N$ con questo piano e poi si cercano le coordinate dei due punti ove essa taglia la retta 12, le coordinate di uno di questi debbono essere $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$, $x_3 = x_4 = 0$.

Ponendo nella (1) $x_3 = \lambda x_4$, dividendo per $x_4^2$ e poi facendo $x_4 = 0$, resta:

$$ax_1^2 + (c + e\lambda)\, x_1 x_2 + (i\lambda^2 + l\lambda + j)\, x_2^2 = 0 \tag{2}$$

pertanto la (2) deve rimanere soddisfatta, qualunque sia $\lambda$, ponendo $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$; cioè deve essere

$$a + e + i = 0\,; \quad c + l = 0\,; \quad j = 0. \tag{3}$$

Dopo ciò la (2) si può scrivere:

$$[ax_1 - (i\lambda - c)\, x_2]\, [x_1 - \lambda x_2] = 0$$

e i due punti che sulla retta 12 hanno per coordinate $\frac{x_1}{x_2} = \frac{i\lambda - c}{a}$ e $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ debbono corrispondersi in una involuzione quadratica avente un punto doppio in 1, dunque:

$$a + i = 0 \tag{4}$$

e, combinando con la prima delle (3),

$$e = 0. \tag{5}$$

Infine, osserviamo che la proiettività stabilita dalla congruenza $[m_\alpha]$ fra i punti e i piani di $m_\alpha$, è rappresentata analiticamente da una relazione del tipo:

$$\mu - v\lambda = 0$$

fra il parametro $\mu$ del punto

$$x_1 - \mu x_3 = 0$$

della retta 13 e il parametro $\lambda$ del piano corrispondente

$$x_2 - \lambda x_4 = 0,$$

$v$ essendo una opportuna costante, poichè per le ipotesi fatte ai valori 0 e $\infty$ di $\mu$ corrispondono i valori 0 e $\infty$ di $\lambda$.

Allora, se nella (1), poniamo $x_2 = \lambda x_4$ e dopo aver diviso per $x_4^2$ facciamo $x_4 = 0$, resterà, tenuto conto delle (3), (4) e (5):

$$ax_1^2 + dx_3 x_1 - (a\lambda^2 - m\lambda - k) x_3^2 = 0$$

e questa equazione deve esser soddisfatta, qualunque sia $\lambda$, da $\dfrac{x_1}{x_3} = v\lambda$. Ciò porta che deve essere identicamente:

$$a(v^2 - 1)\lambda^2 + (dv + m)\lambda + k = 0$$

ossia

$$a(v^2 - 1) = 0, \quad dv + m = 0, \quad k = 0. \tag{6}$$

Ma $a$ non può essere zero, perchè altrimenti il piano $l_\alpha m_\alpha$ si staccherebbe dalla superficie $N$, dunque deve essere:

$$v = \pm 1 \tag{7}$$

e per conseguenza:

$$d = \mp m. \tag{8}$$

35. Facciamo vedere, prima di procedere innanzi, che non può essere $v = +1$.

Per questo osserviamo che l'equazione di una quadrica di $[l_\alpha]$ passante per $m_\alpha$, cioè rappresentante una $V_2^3$ della $V_3^6$, è del tipo:

$$\alpha(x_4 x_1 - x_2 x_3) + \beta x_4^2 + \gamma x_4 x_3 = 0 \tag{9}$$

e quindi il piano:

$$x_2 - \lambda x_4 = 0$$

la taglia fuori di $m_{\dot{a}}$ nella retta ove è tagliato dal piano:

$$\alpha x_1 + (\gamma - \alpha\lambda)\, x_3 + \beta x_4 = 0.$$

Ora, se si volesse trovare il valore di $\lambda$ per il quale accade che questo ultimo piano passa per il punto corrispondente sulla 13 al piano

$$x_2 - \lambda x_4 = 0,$$

avendosi per tale punto (nell'ipotesi $v = 1$) $\frac{x_1}{x_3} = \lambda$, si arriverebbe per $\lambda$ all'equazione:

$$\alpha\lambda + (\gamma - \alpha\lambda) = 0,$$

cioè, non potendo essere $\gamma = 0$ per la genericità della quadrica considerata, si troverebbe sempre la soluzione $\lambda = \infty$.

Tale conseguenza è per quanto è stato detto nei n. precedenti assurda, poichè la quadrica generica di $[l_{\dot{a}}]$ contenente $m_\alpha$ deve avere una delle sue direttrici in una retta *generica* di $[m_\alpha]$, dunque non può essere, nel caso nostro,

$$v = +1$$

e si conclude che

$$v = -1,\ d = +m,$$

ossia che l'equazione d'una superficie $N$ è del tipo:

$$ax_4^2\, x_1^2 + (bx_4^3 + cx_4^2\, x_2 + dx_4^2\, x_3)\, x_1 + fx_4^4 + gx_4^3\, x_2 + hx_4^3\, x_3 - ax_2^2\, x_3^2 -$$
$$- cx_2^2\, x_3\, x_4 + dx_2\, x_3^2\, x_4 + nx_2\, x_3\, x_4^2 = 0.$$

In questa equazione compaiono omogeneamente otto parametri lineari, quindi essa è appunto l'equazione del sistema lineare $\infty^7$ di superficie $N$.

36. Nell'ipotesi $v = 1$, la quadrica

$$\alpha\,(x_4\, x_1 - x_2\, x_3) + \beta x_4^2 = 0,$$

qualunque siano $\alpha$ e $\beta$, è tale che rispetto ad essa ogni punto di $l_\alpha$ (od $m_\alpha$) ha per piano polare (tangente) il piano che ad esso corrisponde nel fascio $l_\alpha$ (od $m_\alpha$), in virtù della congruenza $[l_\alpha]$ (od $[m_\alpha]$), quindi la reciprocità che resta determinata fra i punti del piano $l_\alpha m_\alpha$ e i piani della stella avente per centro il punto $l_\alpha m_\alpha$ dalle coppie di forme proiettive ora nominate è contenuta in una (anzi in $\infty^1$) polarità dello spazio $\alpha$.

Invece, nell'ipotesi $v = -1$, la reciprocità determinata fra il piano $l_\alpha m_\alpha$ (nel quale le coordinate sono $x_1, x_2, x_3$) e la stella $l_\alpha m_\alpha$ (nella quale le coordinate di piano sono $\xi_2, \xi_3, \xi_4$) dalle punteggiate e dai fasci proiettivi $l_\alpha, m_\alpha$ è rappresentata dalle formule:

$$\xi_2 = x_3\,, \quad \xi_3 = -x_2\,, \quad \xi_4 = x_1$$

e quindi è contenuta in *un* sistema nullo dello spazio $\alpha$.

Ora le ipotesi $v = \pm 1$ sono le sole compatibili con l'altra $a \neq 0$, quando debba essere:

$$a\,(v^2 - 1) = 0,$$

pertanto ricaviamo incidentalmente il teorema:

*Date in uno spazio (ordinario) due congruenze lineari speciali con le direttrici a e b uscenti da un punto O e contenenti entrambe il fascio determinato da a e b, non esistono, in generale, superficie (irriducibili) del quart'ordine con due rette doppie in a e b, che abbiano su queste un contatto tripunto con ogni retta delle due congruenze e che siano tagliate dai piani per a e b in coniche appoggiate a queste rette nelle coppie di una involuzione quadratica con un punto doppio in O. Fanno eccezione soltanto i casi in cui le due congruenze appartengono al complesso delle rette tangenti a una quadrica, oppure a un complesso lineare, nei quali ne esistono infinite ($\infty^7$) aventi in O un punto doppio uniplanare col piano osculatore ab.*

In particolare deduciamo di qui che le due congruenze lineari speciali $[l_\alpha]$ ed $[m_\alpha]$ appartengono a uno stesso complesso lineare.

37. La quadrica, della rete (9), rappresentata dall'equazione:

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

contiene la retta

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$$

della congruenza $[m_\alpha]$, e un piano variabile intorno a questa retta:

$$x_1 - \mu x_2 = 0$$

taglia ulteriormente la quadrica nella retta:

$$(10) \qquad x_1 - \mu x_2 = 0 \quad x_3 - \mu x_4 = 0.$$

Ora consideriamo la superficie $N$ rappresentata dall'equazione:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & a_0 x_4^2 x_1^2 + (b_0 x_4^3 + c_0 x_4^2 x_2 + d_0 x_4^2 x_3) x_1 + g_0 x_4^3 x_2 + h_0 x_4^3 x_3 - a_0 x_2^2 x_3^2 - c_0 x_2^2 x_3 x_4 + \\ & \qquad + d_0 x_2 x_3^2 x_4 + n_0 x_2 x_3 x_4^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

e cerchiamo le coordinate del punto, comune ad essa e alla retta (10), non situato sulla retta 12.

Si trova facilmente che tali coordinate sono:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \sigma x_1 = - h_0 \mu^2 \quad \sigma x_2 = - h_0 \mu \quad \sigma x_3 = \mu [2 d_0 \mu^2 + (b_0 + n_0) \mu + g_0] \\ & \qquad \sigma x_4 = 2 d_0 \mu^2 + (b_0 + n_0) \mu + g_0 \end{aligned} \right.$$

e se in queste formule si fa variare il parametro $\mu$, il punto corrispondente descrive la cubica gobba secondo cui si tagliano, fuori delle rette $l_\alpha$ ed $m_\alpha$, la quadrica e la superficie $N$ considerata.

Se nelle (12) si mutano $h_0$, $d_0$, $(b_0 + n_0)$, $g_0$ rispettivamente in $\varrho h_0$, $\varrho d_0$, $\varrho (b_0 + n_0)$, $\varrho g_0$, essendo $\varrho$ un qualsiasi fattore di proporzionalità, la cubica da essa rappresentata non muta, per conseguenza l'equazione:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & a x_4^2 x_1^2 + (b x_4^3 + c x_4^2 x_2 + \varrho d_0 x_4^2 x_3) x_1 + \varrho g_0 x_4^3 x_2 + \varrho h_0 x_4^3 x_3 - \\ & - a x_2^2 x_3^2 - c x_2^2 x_3 x_4 + \varrho d_0 x_2 x_3^2 x_4 + [\varrho (b_0 + n_0) - b] x_2 x_3 x_4^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

coi quattro parametri indipendenti $a$, $b$, $c$, $\varrho$ rappresenta il sistema lineare $\infty^3$ delle superficie $N$ passanti per la cubica gobba rappresentata dalle equazioni (12).

Scritta la (13) sotto la forma:

$$\begin{aligned} & a (x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2) + b x_4^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + c x_2 x_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + \\ & \qquad + \varrho x_4 [d_0 x_1 x_3 x_4 + g_0 x_4^2 x_2 + h_0 x_4^2 x_3 + d_0 x_2 x_3^2 + (b_0 + n_0) x_2 x_3 x_4] = 0 \end{aligned}$$

basta porre:

$$(14)\quad \begin{cases} \sigma y_1 = x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2 \\ \sigma y_2 = x_4^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) \\ \sigma y_3 = x_2 x_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) \\ \sigma y_4 = x_4 [d_0 x_1 x_3 x_4 + g_0 x_4^2 x_2 + h_0 x_4^2 x_3 + d_0 x_2 x_3^2 + (b_0 + n_0) x_2 x_3 x_4] \end{cases}$$

per avere le formule d'una trasformazione cremoniana che muti il sistema delle superficie $N$ in un sistema di superficie cubiche del tipo $L$.

Le formule inverse delle (14) sono le:

$$(15)\quad \begin{cases} \tau x_1 = y_1 y_3 y_4 + d_0 y_1^2 y_2 + h_0 y_1 y_2^2 + (b_0 + n_0) y_1 y_2 y_3 + g_0 y_2 y_3^2 \\ \tau x_2 = 2y_3^2 y_4 + d_0 y_1 y_2 y_3 + h_0 y_2^2 y_3 + (b_0 + n_0) y_2 y_3^2 \\ \tau x_3 = y_1 y_2 y_4 - g_0 y_2^2 y_3 \\ \tau x_4 = 2y_2 y_3 y_4 + d_0 y_1 y_2^2 + h_0 y_2^3 + (b_0 + n_0) y_2^2 y_3 \end{cases}$$

dalle quali si deduce che il sistema delle $\infty^3$ superficie cubiche corrispondenti nello spazio $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ai piani dello spazio $\alpha \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ha per linee basi le rette:

$$y_2 = 0, \; y_4 = 0 \quad \text{e} \quad y_2 = 0, \; y_3 = 0$$

e la cubica gobba:

$$(16)\quad \begin{cases} \nu y_1 = - g_0 h_0 \lambda^3 ; \; \nu y_2 = \lambda [d_0 g_0 \lambda^2 + (b_0 + n_0) \lambda + 2] ; \\ \nu y_3 = - h_0 \lambda^2 ; \; \nu y_4 = d_0 g_0 \lambda^2 + (b_0 + n_0) \lambda + 2 . \end{cases}$$

Questa cubica gobba passa pel punto (0, 0, 0, 1), come si vede facendo nelle (16) $\lambda = 0$, e questo punto è doppio per le superficie cubiche in discorso.

38. Le cose dette fin qui permettono facilmente di risolvere un'altra questione sollevata dalla mia Nota già citata di Palermo.

Risulta da essa che uno dei gruppi più notevoli di $V_3$ di un $S_r\,(r \geq 7)$ a $S_3$ tangenti mutuamente secantisi è quello costituito dalla $V_3^6$ di $S_7$, che stiamo studiando, e dalla $V_3^8$ di $S_9$ di Veronese e sue proiezioni su spazi a 7 o 8 dimensioni.

Nel caso della $V_3^8$ di $S_9$ due $S_3$ tangenti generici sono tagliati da tutti gli altri in coppie di punti corrispondentisi in una omografia: si presenta quindi spontanea la questione di studiare la trasformazione cremoniana stabilita fra due $S_3$ tangenti generici della $V_3^6$ dai punti di appoggio di tutti gli altri.

Per questo, osserviamo che se $\gamma$ è l'$S_3$ tangente alla $V_3^6$ in un suo punto generico $C$ ed $l_c$, $m_c$ sono le rette della $V_3^6$ uscenti da $C$, la $V_3^6$ può riferirsi biunivocamente ai punti di $\gamma$ nel modo stesso che è stato indicato per riferirla biunivocamente ai punti di $\alpha$ e che due punti di $\alpha$ e $\gamma$ i quali rappresentino uno stesso punto della $V_3^6$ sono precisamente due punti di $\alpha$ e $\gamma$ omologhi nella trasformazione cremoniana $\Sigma$ che si tratta di caratterizzare.

La corrispondenza $\Sigma$ muta evidentemente le superficie $N$ di $\alpha$ nelle analoghe $N'$ di $\gamma$; ma al sistema delle $N$ (delle $N'$) appartengono i piani di $\alpha$ (di $\gamma$), insieme col piano $l_a\, m_a$ $(l_c\, m_c)$ contato tre volte, dunque la corrispondenza $\Sigma$ è, in ambedue i sensi, del 4° ordine.

I piani dello spazio $\alpha$, insieme col piano $l_\alpha\, m_\alpha$, costituiscono delle quadriche del sistema $\infty^4$:

$$bx_1\, x_4 + fx_4^2 + gx_2\, x_4 + hx_3\, x_4 + nx_2\, x_3 = 0 \tag{17}$$

la cui equazione si ottiene da quella del sistema $N$ facendovi $a = c = d = 0$ e sopprimendo il fattore $x_4^2$, e queste quadriche rappresentano il sistema $\infty^4$ delle sezioni iperpiane della $V_3^6$ passanti per le rette $l_\alpha$, $m_\alpha$, dunque ai piani dello spazio $\alpha$ corrispondono in $\gamma$ $\infty^3$ superficie $N'$ passanti (oltre che, doppiamente, per $l_c$, $m_c$) per le due rette delle congruenze $[l_c]$ ed $[m_c]$ [1], rispettivamente, che rappresentano, in $\gamma$, le rette $l_a$ ed $m_\alpha$.

Nello stesso modo, ai piani di $\gamma$ corrispondono in $\alpha$ le superficie $N$ di un sistema omaloidico $\infty^3$ avente per rette basi (fuori di $l_a$ ed $m_a$) le due rette di $[l_a]$ ed $[m_a]$ immagini di $l_c$ ed $m_c$.

Supponiamo (e con questo non si vien meno in nulla alla generalità) che le immagini di $l_c$ ed $m_c$ sieno in $\alpha$ precisamente le rette 24 e 34; le superficie $N$ che le contengono sono allora quelle del sistema $\infty^4$:

$$\left\{\begin{aligned} &a\,(x_1^2\, x_4^2 - x_2^2\, x_3^2) + bx_1\, x_4^3 + cx_2\, x_4\,(x_1\, x_4 - x_2\, x_3) + \\ &\quad + dx_3\, x_4\,(x_1\, x_4 + x_2\, x_3) + nx_2\, x_3\, x_4^2 = 0 \end{aligned}\right. \tag{18}$$

[1] Cioè delle due congruenze che rappresentano in $\gamma$ i sistemi $A$ e $M$ della $V_3^6$.

ed entro questo sistema $\infty^4$ è contenuto il sistema omaloidico corrispondente ai piani di $\gamma$.

Poichè il sistema (18) è del grado 2 [1] se ne possono estrarre $\infty^3$ sistemi omaloidici considerando quelle delle sue superficie che passano per un punto fissato a piacere in $\alpha$; ma il sistema dei piani di $\gamma$ corrisponde a un sistema omaloidico di sezioni iperpiane della $V_3^6$ che si ottiene da quello delle $\infty^4$ sezioni iperpiane passanti per $l_c$ ed $m_c$ considerando le sezioni iperpiane che passano per un punto della $V_3^6$ avvicinatosi infinitamente al punto $l_c\,m_c$, dunque, per avere le superficie $N$ di $\alpha$ corrispondenti ai piani di $\gamma$, dobbiamo considerare nel sistema (18) le superficie che passano per un punto avvicinatosi infinitamente al punto 4, immagine, in $\alpha$, del punto $l_c\,m_c$.

Considerando che il piano $x_1 = 0$ taglia le superficie del sistema (18), fuori di 24 e 34, nel sistema di coniche:

$$ax_2\,x_3 + cx_2\,x_4 - dx_3\,x_4 - nx_4^2 = 0$$

si conclude che, per avere le superficie $N$ richieste, bisogna fare nella (18) $n = 0$.

Dopo ciò si vede subito che, con una conveniente scelta della piramide fondamentale in $\gamma$, chiamando $y_1, y_2, y_3, y_4$ le coordinate correnti di punto in $\gamma$, le formule della corrispondenza $\Sigma$ sono, in un senso, le formule:

$$(19)\qquad \begin{cases} \sigma y_1 = x_1\,x_4^3 \\ \sigma y_2 = x_3\,x_4\,(x_1\,x_4 + x_2\,x_3) \\ \sigma y_3 = x_2\,x_4\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) \\ \sigma y_4 = x_1^2\,x_4^2 - x_2^2\,x_3^2 \end{cases}$$

e, nell'altro, quelle perfettamente analoghe:

$$(20)\qquad \begin{cases} \tau x_1 = y_1\,y_4^3 \\ \tau x_2 = y_3\,y_4\,(y_1\,y_4 + y_2\,y_3) \\ \tau x_3 = y_2\,y_4\,(y_1\,y_4 - y_2\,y_3) \\ \tau x_4 = y_1^2\,y_4^2 - y_2^2\,y_3^2\,. \end{cases}$$

[1] Infatti il sistema omologo in $\gamma$ è rappresentato da una equazione analoga alla (1).

39. Tenendo presente la rappresentazione della $V_3^6$ sopra uno spazio ordinario mediante le superficie cubiche per $K$ con un punto doppio nel punto $O$ di $K$, si trovano subito le omografie dell'$S_7$ che mutano la $V_3^6$ in sè.

Infatti una tale omografia o

*a*) scambia in sè i sistemi $\Lambda$ e $M$, o

*b*) scambia fra di loro $\Lambda$ e $M$.

Nell'ipotesi *a*) l'omografia considerata $\Omega$ subordina fra le rette di $\Lambda$ una corrispondenza biunivoca che si riflette in una corrispondenza biunivoca fra le rette di $O$, e questa corrispondenza è una proiettività, perchè i piani per $O$ rappresentano le $V_2^3$ di $\Lambda$ e queste, per l'omografia $\Omega$, si scambiano fra di loro.

Inversamente, si immagini di considerare una qualsiasi proiettività $\omega$ fra le rette della stella $O$. Si avrà fra le rette di $\Lambda$ una corrispondenza biunivoca che muta le $V_2^3$ in $V_2^3$ e poichè le rette di $M$ non sono altra cosa che le direttrici delle $V_2^3$ di $\Lambda$, così anche fra le rette di $M$ si avrà una corrispondenza biunivoca, che si tradurrà in quella fra le corde di $K$ che si ottiene chiamando omologhe due corde di $K$ situate in piani per $O$ corrispondenti in $\omega$. Ora se una corda di $K$ descrive una schiera rigata di una delle $\infty^2$ quadriche per $K$, essa si appoggerà costantemente a una certa retta $l$ uscente da $O$; quindi la corda ad essa omologa nella corrispondenza considerata si appoggerà costantemente alla retta $l'$ di $O$ omologa ad $l$ nella proiettività $\omega$. Ciò significa che la corrispondenza costruita fra le rette di $M$ muta le $V_2^3$ in $V_2^3$ e allora le due corrispondenze stabilite in $\Lambda$ e $M$ dànno luogo a una trasformazione in sè della $V_3^6$ che è evidentemente contenuta in una omografia dell'$S_7$, perchè una sezione iperpiana della $V_3^6$ spezzata in due $V_2^3$ si muta per essa in una analoga sezione iperpiana.

A una conclusione simile si arriva quando si faccia l'ipotesi *b*), purchè si tengano presenti due rappresentazioni della $V_3^6$ del tipo di quella considerata, per modo che nell'una siano rappresentate da raggi di una stella le rette di $\Lambda$, nell'altra da raggi di una stella le rette di $M$.

40. Ed ora passiamo a considerare la $V_3^6$ di $S_7$ rappresentata sullo spazio ordinario dalle superficie cubiche che passano per una cubica piana nodale $H$ ed hanno un punto biplanare nel nodo $O$ di questa cubica e un piano osculatore fisso in un piano $\omega$ passante per una delle due rette tangenti ad $H$ nel punto $O$.

Le rette per $O$ dello spazio rappresentativo corrispondono a rette della $V_3^6$, dunque:

*Sulla $V_3^6$ esiste un sistema $\infty^2$ di rette, tale che per ogni punto della $V_3^6$ ne passa una ed una sola.*

Le $\infty^5$ superficie cubiche spezzate nel piano della cubica $H$ e in un cono quadrico col vertice in $O$ rappresentano le sezioni iperpiane della $V_3^6$ ottenute con gli $\infty^5$ $S_6$ passanti per una certa retta $d$. Poi due coni quadrici col vertice in $O$ non si tagliano ulteriormente che in quattro rette, dunque un $S_5$ generico per $d$ taglia la $V_3^6$ fuori di $d$ soltanto in quattro rette, ossia:

*La $V_3^6$ ha una retta doppia $d$ ed è formata di $\infty^2$ rette appoggiate tutte a $d$.*

Si trova allora facilmente la *classe* del sistema di rette della $V_3^6$, cioè il numero di esse contenute in un iperpiano.

Infatti un iperpiano generico taglia la $V_3^6$ in una $V_2^6$ dotata di un punto doppio conico e rappresentabile su un piano mediante un sistema di cubiche con tre punti-base allineati (¹), quindi:

*Un iperpiano generico contiene tre rette della $V_3^6$ concorrenti in un punto della retta $d$.*

I piani dello spazio rappresentativo uscenti da $O$ corrispondono a rigate cubiche normali della $V_3^6$ e poichè due tali piani presi insieme dànno un cono quadrico (degenere) passante per $O$ si conclude che:

*La $V_3^6$ ammette una rete di rigate cubiche normali autoresidua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane. Le rigate hanno poi tutte per direttrice la retta doppia $d$.*

Di qui segue in particolare che gli $S_3$ tangenti alla $V_3^6$ nei punti di una sua rigata cubica stanno tutti in un $S_6$, e, come ho dimostrato altrove, questo fatto si riconnette con la circostanza che essa sta sopra una $V_4^4$ ottenuta proiettando da $d$ una superficie di Veronese.

Per stabilire la verità di questa asserzione si immagini di proiettare dalla retta $d$ le $\infty^2$ rette della $V_3^6$. Si otterranno, nella stella dell'$S_7$ avente per centro $d$, $\infty^2$ piani e in questa varietà di piani esisteranno, corrispondentemente alla rete di rigate cubiche della $V_3^6$, $\infty^2$ coni quadrici con retta doppia. Ma allora la superficie che si ottiene tagliando con un $S_5$ la varietà di punti riempita da questi

(¹) Del Pezzo, *Sulle superficie dell'n⁰ ordine*, etc. (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1, 1887).

$\infty^2$ piani sarà una superficie con $\infty^2$ coniche e quindi una superficie di VERONESE.

41. Cerchiamo di invertire la considerazione ora fatta e ne ricaveremo una semplice costruzione della $V_3^6$ di cui ci stiamo occupando.

Sia $V_4^4$ la varietà di $S_7$ che si ottiene proiettando da una retta $d$ una superficie di VERONESE, e sia $V_6^2$ una quadrica (non specializzata) che passi per $d$, tale che dei suoi $\infty^2$ piani passanti per $d$ e costituenti, nell'$S_5$ tangente alla $V_6^2$ lungo $d$, una $V_4^2$ con la retta doppia $d$, $\infty^1$ coincidano con gli $\infty^1$ piani della $V_4^4$ costituenti su questa una $V_3^2$ con la retta doppia $d$. La residua intersezione della $V_4^4$ e della quadrica sarà una $V_3^6$ con retta doppia in $d$ e si comporrà di $\infty^2$ rette appoggiate a $d$.

Uno qualunque degli $\infty^2$ coni quadrici della $V_4^4$ diverso da quello contenuto nella $V_6^2$ taglia la $V_6^2$ in una $V_2^4$ dalla quale si stacca il piano che esso ha a comune con quest'ultimo, quindi taglia la $V_3^6$ in una $V_2^3$ rigata normale. E dopo ciò è facile riconoscere che la $V_3^6$ ottenuta è proprio quella di cui si è discorso nei numeri precedenti.

42. Anche la ricerca delle omografie dell'$S_7$ che trasformano in sè quest'ultimo tipo di $V_3^6$ non presenta alcuna difficòltà. Si vede subito infatti che se una omografia $\Omega$ dell'$S_7$ trasforma in sè la $V_3^6$, per la $\Omega$ le rette della $V_3^6$ si scambieranno fra di loro per modo che ogni $V_2^3$ rigata normale si muterà in un'altra $V_2^3$; quindi nella stella $O$ le rette immagini delle rette della $V_3^6$ saranno accoppiate in una corrispondenza proiettiva. D'altra parte questo ragionamento è evidentemente invertibile, quindi:

*Le omografie che mutano in sè la $V_3^6$ formano un gruppo $\infty^8$.*

## § III.

## LE $V_4^n$ A CURVE SEZIONI ELLITTICHE.

43. Supponiamo che $V_4^n (n \geq 5)$ sia una varietà normale di 1ª specie di $S_{n+2}$ a curve sezioni ellittiche, e sia $C^{n-3}$ la curva razionale normale dalla quale si suppone di proiettarla sopra un $S_4$.

Le sezioni iperpiane passanti per la $C^{n-3}$ sono delle $V_3^n$ normali di 1ª specie che si proiettano sopra gli $S_3$ dello spazio rappresentativo, quindi se chiamiamo $Q$ la quadrica che appartiene parzialmente al sistema lineare delle forme cubiche che rappresentano le sezioni iperpiane di $V_4^n$ e $K$ la $V_2^{9-n}$ situata sopra $Q$ e base del sistema lineare medesimo, basta tener presente l'enumerazione dei tipi delle $V_3^n$ di 1ª specie eseguita dal prof. ENRIQUES per concludere che:

Se si prescinde dalle $V_4^n$ che si riducono a coni, le sezioni iperpiane generiche della quadrica $Q$ e della superficie $K$ sono rispettivamente:

*a*) per $n = 5$ una quadrica ordinaria $Q'$ e una quartica di 2ª specie $K'$;

*b*) per $n = 6$ una quadrica ordinaria $Q'$ e una terna di rette a due a due sghembe; oppure un cono ordinario $Q'$ e una cubica gobba $K'$; o infine, una quadrica $Q'$ spezzata in una coppia di piani e una cubica piana nodale $K'$;

*c*) per $n = 7$ un cono quadrico ordinario $Q'$ e una conica $K'$; e in ogni caso la curva $K'$ sarà naturalmente situata sulla quadrica $Q'$.

44. Per esaminare partitamente i vari casi cominciamo dal supporre che sia $n = 5$.

Allora, poichè la sezione iperpiana generica $K$ è una quartica di 2ª specie, la superficie $K$ sarà una superficie del $4^0$ ordine a curve sezioni razionali e quindi proiezione sopra un $S_4$ da un punto esterno di una superficie di VERONESE o d'una rigata razionale normale del $4^0$ ordine. La prima ipotesi è da escludere perchè altrimenti $K$ o non sarebbe situata sopra il cono quadrico $Q$, o conterrebbe una retta doppia e allora starebbe sopra infinite anzi che sopra *una* quadrica; dunque resta la seconda, cioè $K$ è una rigata razionale del $4^0$ ordine di $S_4$, dotata di un punto doppio improprio nel vertice $O$ dell'unico cono quadrico $Q$ che la contiene.

Ne segue che sarà dimostrata l'esistenza di una $V_4^5$ a curve sezioni ellittiche di $S_7$ quando si sia fatto vedere che per una rigata $K$ del quart'ordine di $S_4$ (e quindi razionale) passano $\infty^7$ forme cubiche.

Ora questo può dimostrarsi in doppia maniera; calcolando cioè la postulazione di $K$ per le forme cubiche del suo spazio, oppure costruendo direttamente le forme cubiche che passano per $K$ e trovando così che esse sono $\infty^7$.

45. Il calcolo della postulazione di $K$ si fa rapidamente ricorrendo ad alcuni teoremi stabiliti dal prof. SEVERI.

Si conducano infatti per la superficie $K$ dotata del punto doppio improprio $O$ due forme cubiche generiche $L_1$ ed $L_2$ (di tali forme ne esistono certo, poichè il loro sistema deve contenere gli $\infty^2$ coni cubici che si ottengono proiettando $K$ dai suoi punti): la loro intersezione residua sarà una superficie del $5^0$ ordine $K_1$ con un punto doppio improprio in $O$ avente a comune con $K$ una curva del $10^0$ ordine (e della $26^a$ classe) con un punto quadruplo in $O$ (1).

Poichè il punto $O$ presenta evidentemente *una* condizione agli iperpiani che debbono contenerlo, segue, per un teorema del prof. SEVERI (2), che $K$ e $K_1$ sono entrambe regolari e che per calcolare la postulazione di $K$ per le forme cubiche si può far uso della formula:

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 - d$$

facendovi $m = 4$, $l = 3$, $p = P_a = 0$, $d = 1$. Si trova così, come valore della postulazione in discorso, 27, e quindi, le forme cubiche dell'$S_4$ essendo $\infty^{34}$, per la superficie $K$ passano appunto $\infty^7$ forme cubiche.

46. Ma allo stesso risultato si può arrivare, come abbiamo detto, per un'altra via, meno rapida, ma assai più elementare.

Si taglino, per questo, la rigata $K$ e il cono quadrico $Q$ che la proietta dal suo punto doppio improprio $O$, con un $S_3$ generico $\alpha$ e siano $K'$ e $Q$ rispettivamente la quartica di $2^a$ specie e la quadrica sezioni di $K$ e $Q$.

Nello spazio $\alpha$ per la curva $K'$ passano $\infty^6$ superficie cubiche $L'$ e se si chiamano $A, B, C, D$ i punti ove $K'$ è tagliata da un piano generico $\pi$ di $\alpha$, queste $\infty^6$ superficie $L'$ tagliano $\pi$ nel sistema lineare (completo) delle $\infty^5$ cubiche passanti per $A$, $B$, $C$, $D$.

Ora si prenda a considerare una determinata superficie $L'_1$ di quelle $\infty^6$ e detta $\lambda_1$ la sua traccia su $\pi$, sia $\tau$ il piano ad essa tangente in un punto $M$ di $\lambda_1$ esterno alla conica sezione di $\pi$ con $Q$, e $\beta$ un $S_3$ generico passante per $\tau$. Se $\alpha''$ è un altro $S_3$ del fascio avente per asse $\pi$ e $\tau''$ è la sua sezione con $\beta$, $\tau''$ taglierà $\tau$ nella retta tangente a $\lambda_1$ nel punto $M$, e in $\alpha''$ vi sarà una sola superficie

(1) SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, etc. (Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, serie II, t. LII, 1902), § 9. I caratteri di $K_1$ sono, adoperando le notazioni del prof. SEVERI, $\mu'_0 = 5$, $\mu'_1 = 10$, $\mu'_2 = 8$, $\nu'_2 = 8$, $d' = 1$ essendo $\mu_0 = 4$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 4$, $\nu_2 = 4$, $d = 1$ quelli di $K$.

(2) SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione* (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, XVII, 1903), n. 32.

cubica $L_1''$ che passi per la quartica $K''$, sezione di $\alpha''$ con $K$, e per la cubica $\lambda_1$ e inoltre tocchi nel punto $M$ il piano $\tau''$. Variando $\alpha''$ intorno a $\pi$, la superficie $L_1''$ assumerà certe $\infty^1$ posizioni distinte e riempirà una forma $V_3^m$, il cui ordine $m$ è appunto 3.

Infatti asserire che $m = 3$ equivale ad asserire che per nessuna posizione di $\alpha''$ intorno a $\pi$ la relativa superficie $L_1''$ si spezza nel piano $\pi$ e in una residua quadrica $Q_1''$ passante per il punto $M$ e per la quartica $K''$ sezione di $\alpha''$ con $Q$, e questo si dimostra facilmente per assurdo. Poichè se per una certa posizione di $\alpha''$ avvenisse il detto spezzamento, per quella posizione di $\alpha''$, $K''$ o sarebbe una quartica di 2ª specie priva di punto doppio o sarebbe dotata di un punto doppio. Nella prima ipotesi, $K''$ essendo situata sopra *una sola* quadrica, $Q_1''$ sarebbe la sezione di $Q$ con $\alpha''$ e quindi $M$ sarebbe situato su $Q$; nella seconda ipotesi, $\alpha''$ risulterebbe tangente a $K$ o passante pel suo punto doppio improprio $O$. Ora di queste due ultime alternative la prima è da escludersi per ragione analoga ad altra già detta (in quanto per essa si arriverebbe a una $K''$ spezzata in una cubica gobba e una sua unisecante e quindi situata sopra una sola quadrica), la seconda porterebbe alla conseguenza che $Q_1''$ sarebbe una quadrica generica fra le $\infty^1$ passanti per $K''$ e quindi una quadrica non avente un punto doppio in $O$, mentre la $V_3^m$ costruita (e quindi $Q_1''$) ha necessariamente un punto doppio in $O$ (¹).

Il ragionamento compiuto mostra che per ogni superficie cubica $L'$ di $\alpha$ contenente $K'$ passa una forma cubica $L$ dell'$S_4$ contenente $K$ e tangente in un punto $M$ di $L'$ a un dato $S_3$ (passante pel piano $\tau$ tangente ad $L'$ in $M$), quindi per ogni superficie $L'$ di $\alpha$ passano $\infty^1$ forme cubiche contenenti $K$ e $K$ si trova in totale sopra un sistema lineare $\infty^7$ di forme cubiche $L$.

47. Facciamo ora l'ipotesi $n = 6$ e supponiamo che le sezioni iperpiane generiche di $Q$ e $K$ siano una quadrica ordinaria $Q'$ e una sua terna di rette, sghembe fra di loro a due a due.

Allora $K$ sarà una terna di piani di $Q$ passanti pel punto doppio $O$ di $Q$ (appartenenti allo stesso sistema) e un $S_3$ generico per $O$ segherà $Q$ e $K$ in un cono quadrico e in una terna di rette situate su questo cono.

(¹) Severi, *Intorno ai punti doppi impropri*, etc. (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, XV, 1901), n. 14.

Ciò significa che ogni iperpiano dello spazio $S_8$ contenente la $V_4^6$ che si sta considerando e passante per l'$S_4$ che congiunge $O$ con lo spazio della $C^3$ da cui si fa la proiezione, taglia la $V_4^6$ in una $V_3^6$ conica [1]. Per ognuno di questi iperpiani il vertice del relativo cono $V_3^6$ è il vertice del cono cubico contenuto in quell'$S_4$, dunque anche $V_4^6$ è un cono col vertice in quel punto.

48. Supponiamo adesso che, pur essendo $n = 6$, la quadrica $Q$ e la superficie $K$ siano tagliate da un iperpiano generico in un cono quadrico $Q'$ e in una cubica gobba $K'$. Allora $K$ è una $V_2^3$ rigata normale con una direttrice $d$ e $Q$ è una quadrica per $K$ con retta doppia, cioè sarà il cono quadrico (doppiamente specializzato) che proietta le generatrici di $K$ dalla direttrice $d$.

Segue da ciò che sarà dimostrata l'esistenza di una $V_4^6$ a curve sezioni ellittiche di $S_8$, corrispondentemente alle ipotesi ora fatte, purchè si dimostri che data in un $S_4$ una rigata cubica normale vi sono $\infty^8$ forme cubiche passanti per essa e aventi una retta doppia nella sua direttrice $d$.

Ora si potrebbe comporre una tale dimostrazione imitando il ragionamento diretto del n. 46, ma preferiamo ricorrere a una via indiretta che avremmo potuto seguire anche per il caso della $V_4^5$.

Se, per un momento, si suppone che la $V_4^6$ in discorso realmente esista e sia rappresentata dal sistema delle forme cubiche passanti per una $V_2^3$ rigata normale e aventi una retta doppia nella sua direttrice $d$, è chiaro che gli $\infty^2$ piani passanti per $d$ dell'$S_4$ rappresentativo saranno le immagini di $\infty^2$ piani appartenenti alla $V_4^6$, e lo stesso potrà dirsi degli $\infty^2$ piani contenenti le coniche della $V_2^3$; quindi sulla $V_4^6$ si avranno intanto due serie $\infty^2$ di piani tali che per ogni punto della $V_4^6$ passa un piano di ciascuna serie.

D'altra parte i piani di due coniche qualunque della $V_2^3$ sono tagliati in due sistemi prospettivi da quelli uscenti da $d$, per conseguenza i piani di uno almeno (questa restrizione non è che provvisoria, come vedremo) dei due sistemi di $V_4^6$ tagliano collinearmente i piani dell'altro sistema.

Si conclude che se la $V_4^6$ in discorso esiste, essa non può che coincidere con una nota varietà studiata già dal prof. SEGRE e generata dai piani che congiungono i punti omologhi di tre piani col-

[1] ENRIQUES, *Sui sistemi lineari*, etc. (Math. Ann. Bd. 46), n. 15. Notisi che in questo caso $Q$ è il cono quadrico tangente nel punto doppio $O$ a tutte le forme cubiche passanti per i tre piani di $K$.

lineari generici di un $S_8$ o dai piani secondo cui si intersecano gli $S_6$ di tre stelle proiettive di un $S_8$ aventi per centri tre $S_5$ generici.

Poichè si riconosce subito che proiettando questa $V_4^6$ di SEGRE sopra un $S_4$ dall'$S_3$ di una sua cubica gobba si ottiene una sua rappresentazione biunivoca in cui il sistema delle immagini delle sezioni iperpiane è un sistema $\infty^8$ di forme cubiche del tipo considerato in questo numero, si conclude che l'ipotesi quivi fatta porta realmente a un tipo di $V_4^6$ *non conica* a curve sezioni ellittiche (1).

49. Come è noto, la $V_4^6$ di SEGRE contiene due serie $\infty^2$ di piani in condizioni perfettamente identiche; quindi i piani di ognuna delle due serie punteggiano proiettivamente i piani dell'altra.

Tenendo conto della sua rappresentazione sopra un $S_4$, or ora indicata, si arriva incidentalmente al teorema:

*Due piani passanti per la direttrice di una rigata cubica normale sono tagliati dai piani delle sue coniche in due sistemi piani collineari* (2).

50. Per esaurire la discussione del caso *b*) del n. 43 vediamo direttamente se possa esistere una $V_4^6$ di $S_8$ che da ogni $S_7$ sia tagliata in una $V_3^6$ a curve sezioni ellittiche dotata di retta doppia (n. 40, 41, 42).

Se esiste, poichè ogni iperpiano la taglia in una $V_3^6$ con retta doppia, essa ammetterà un piano doppio $\delta$, e un $S_6$ generico condotto per $\delta$ la taglierà in una residua superficie del $4^0$ ordine $F^4$ che si spezza in quattro piani. Infatti se si immagina di tagliare tutta la figura con un $S_7$, la $V_4^6$ dà luogo a una $V_3^6$, l'$S_6$ a un $S_5$ generico passante per la retta doppia della $V_3^6$ e la $F^4$ alla residua intersezione della

(1) Una proprietà caratteristica di questa $V_4^6$ è data da un teorema dimostrato nella mia già citata Nota di Palermo.

(2) Non è difficile dimostrare direttamente questo teorema.

Se $r$ è una retta d'un piano $\pi$ passante per la direttrice $d$ di una rigata cubica normale $V_2^3$, da ogni punto di $r$ (come da ogni punto generico dell'$S_4$ contenente la rigata) esce *un* piano che sega la rigata secondo una conica. Gli $\infty^1$ piani che così si ottengono corrispondentemente agli $\infty^1$ punti di $r$ riempiono una $V_3^x$, il cui ordine $x$ sarà quello delle superficie secondo cui è tagliata da un $S_3$ generico condotto per $r$. Ma tale superficie è la rigata delle corde appoggiate ad $r$ della cubica gobba, sezione dell'$S_3$ stesso con la $V_2^3$, ed $r$ è una unisecante della cubica, dunque $x=2$ e quella $V_3^x$ è un cono quadrico passante evidentemente per $d$. Ma allora ogni altro piano passante per $d$ seca i piani della $V_3^x$ nei punti di una retta, etc.

$V_3^6$ con questo $S_5$, e tale intersezione si compone appunto di quattro rette.

Segue che, eventualmente, la considerata $V_4^6$ consta di $\infty^2$ piani tutti appoggiati secondo rette al piano doppio $\delta$; per modo che se si fa la proiezione della $V_4^6$ dal piano $\delta$ si ottengono in corrispondenza ai suoi $\infty^2$ piani $\infty^2$ $S_3$ uscenti da $\delta$ e costituenti una $V_5^4$ appartenente ad $S_8$. Ora tale $V_5^4$ è il risultato della proiezione di una superficie di VERONESE del piano $\delta$, e d'altra parte per un teorema già citato del prof. ENRIQUES, se la $V_4^6$ in discorso esiste deve essere certo situata su qualche quadrica, dunque se la $V_4^6$ esiste essa deve essere intersezione parziale del cono $V_5^4$ ora nominato con una quadrica passante pel piano $\delta$.

Questo ragionamento indica subito come possono esser costruite le $V_4^6$ del tipo che si sta considerando.

Assumiamo infatti nell'$S_8$ un piano $\delta$ e una quadrica generica $V_7^2$ passante per esso. La $V_7^2$ sarà una quadrica non specializzata ed ammetterà $\infty^1$ $S_3$ passanti per $\delta$; anzi questi $S_3$ costituendo la sua intersezione con l'$S_5$ polare del piano $\delta$ formeranno una $V_4^2$ e si potranno ottenere proiettando da $\delta$ i punti di una certa conica $k^2$, situata in un piano indipendente da $\delta$. Ma allora si costruisca in un $S_5$ indipendente da $\delta$ e passante per $k^2$ una superficie di VERONESE che contenga questa conica: la $V_5^4$ proiettante da $\delta$ la superficie di VERONESE taglierà la quadrica $V_7^2$ nella $V_4^2$ proiettante $k^2$ da $\delta$ e in una residua $V_4^6$ che conterrà $\infty^2$ $S_2$ appoggiati secondo rette al piano $\delta$ (perchè ogni $S_3$ per $\delta$ della $V_5^4$ taglia $V_7^2$ in $\delta$ e in un piano residuo) e che sarà evidentemente a curve sezioni ellittiche normali.

Gli $\infty^2$ piani della $V_4^6$ ora costruita si distribuiscono in una rete di $V_3^3$ intersezioni degli $\infty^2$ coni quadrici della $V_5^4$ con la $V_7^2$ fuori della $V_4^2$ poiettante da $\delta$ la conica $k^2$, e tali $V_3^3$ sono naturalmente dei coni coi vertici situati su $\delta$. Infatti ciascuna di esse *appartiene* a *un* $S_5$ come il cono quadrico della $V_5^4$ che la contiene e non può essere una $V_3^3$ razionale normale, perchè allora non $\delta$ ma una rigata quadrica vera e propria sarebbe una sua rigata direttrice d'ordine minimo.

La rete delle coniche di una superficie di VERONESE è autoresidua rispetto al sistema lineare delle sezioni iperpiane ed è pure omaloidica, dunque:

*Sulla $V_4^6$ ora costruita la rete dei coni $V_3^3$ è autoresidua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane e due $V_3^3$ della rete si tagliano fuori di $\delta$ in un piano.*

In particolare:

*Gli $S_4$ tangenti alla $V_4^6$ nei punti di una sua $V_3^3$ stanno tutti in un iperpiano, cioè in un $S_7$.*

La rappresentazione della $V_4^6$ sopra un $S_4$ si ottiene, naturalmente, proiettandola dall'$S_3$ $\alpha$ di una sua cubica gobba $C^3$ situata sopra una delle $V_3^3$ che chiameremo $\Delta$. Ora se si chiama $O$ il punto ove la $C^3$ taglia il piano $\delta$ e $\Gamma$ il cono $V_3^3$ dei piani della $V_4^6$ uscenti da $O$, l'$S_5$ del cono $\Gamma$ e l'$S_3$ $\alpha$ della cubica $C^3$ stanno in uno stesso iperpiano (in quello cioè che contiene $\Gamma$ e $\Delta$) quindi gli $\infty^1$ $S_5$ che congiungono i piani di $\Gamma$ con $\alpha$ tagliano l'$S_4$ rappresentativo nelle rette di una superficie cubica appartenente ad un $S_3$. Tale superficie $K$ è la varietà base del sistema lineare delle forme cubiche immagini delle sezioni iperpiane della $V_4^6$, ed è una rigata cubica di CAYLEY.

Questa asserzione può giustificarsi in doppia maniera. Può osservarsi in primo luogo che gli $S_5$ di $\Gamma$ e $\Delta$ hanno in comune l'$S_3$ determinato dal piano $\delta$ e dal piano generatore comune a $\Gamma$ e $\Delta$, quindi $\alpha$ e l'$S_5$ di $\Gamma$ hanno in comune una retta di tale $S_3$, cioè una retta situata nel cono quadrico che proietta $\Gamma$ da $\delta$. Ma la proiezione di $\Gamma$ da $\alpha$ sopra l'$S_3$ dell'$S_4$ rappresentativo, in cui questo è tagliato dall'iperpiano contenente $\Gamma$ ed $\alpha$, è in sostanza la proiezione da $\alpha$ della rigata cubica normale in cui $\Gamma$ è tagliata da un $S_4$ generico del suo spazio, e allora tale proiezione, poichè il punto comune ad $\alpha$ e all'$S_4$ della rigata cubica trovasi sul cono quadrico che proietta questa rigata dalla sua direttrice, sarà appunto una rigata di CAYLEY (1).

Ma, volendo, si può anche osservare che se si chiamano, al solito, $Q$ e $K$ la quadrica fondamentale e la varietà base nella rappresentazione della $V_4^6$ sopra un $S_4$, le sezioni iperpiane generiche di $Q$ e $K$ debbono essere una coppia di piani e una cubica nodale situata in uno di essi e tangente all'altro nel nodo. Ma allora $Q$ dovrà essere una coppia di $S_3$, $K$ una rigata cubica con la direttrice doppia nel piano comune di due $S_3$ e di più tale piano dovrà toccare $K$ in tutti i punti della direttrice doppia. Ciò significa precisamente che $K$ è una rigata di CAYLEY.

51. Esaurita la discussione per il caso $n = 6$, facciamo l'ipotesi che sia $n = 7$.

(1) Cfr. BERTINI, *Introduzione*, etc. (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 299.

Poichè le sezioni iperpiane generiche di $Q$ e $K$ sono un cono ordinario $Q'$ e una conica $K'$ situata su di esso, $Q$ sarà un cono quadrico a tre dimensioni con una retta doppia e $K$ un cono quadrico ordinario situato su $Q$ col vertice $V$ sulla retta doppia. Allora un iperpiano generico che passi per l'$S_5$ congiungente $V$ con l'$S_4$ da cui si fa la proiezione taglia la $V_4^7$ in una $V_3^7$ che si rappresenta sopra un $S_3$ mediante il sistema delle superficie cubiche $L_1$ passanti per due rette, con punto doppio nella loro intersezione e con un assegnato cono tangente in esso; quindi in una $V_3^7$ conica [1] e il vertice di questa $V_3^7$ conica è il vertice del cono del quart'ordine che il detto $S_5$ ne contiene. Ciò significa che addirittura la $V_4^7$ è un cono.

La cosa stessa può vedersi anche altrimenti.

Il sistema delle immagini delle sezioni iperpiane è un sistema $\infty^9$ di forme cubiche $L$ con quadrica base $K$ (che è un cono) e con retta doppia $d$ passante pel vertice $V$ di $K$. Si trasformi quadraticamente l'$S_4$ rappresentativo in un altro, prendendo nel primo come punto fondamentale un punto $O$ di $d$ e come quadrica fondamentale $K$. Ad una forma $L$ corrisponderà una forma $L'$ del $6^0$ ordine da cui si stacca due volte l'iperpiano $\omega'$ corrispondente al punto $O$ e una volta la quadrica proiettante dal punto fondamentale $O'$ del secondo $S_4$ la relativa quadrica fondamentale $K'$. Quindi il sistema delle $L$ si muta in un sistema di quadriche passanti pel punto fondamentale $O'$ e tangenti nel vertice di $K'$ all'iperpiano $\omega'$, poichè se si considera un piano generico $\pi$ uscente da $d$, ad esso corrisponde un piano $\pi'$ e fra $\pi$ e $\pi'$ vi è una corrispondenza quadratica tale che in $\pi'$ due dei punti fondamentali vengono a coincidere col vertice di $K'$, e allora alla retta ulteriore intersezione di $\pi$ con una forma $L$ viene a corrispondere in $\pi'$ una conica tangente ad $\omega'$ nel vertice di $K'$.

Si conclude che la $V_4^7$ è rappresentabile punto per punto sopra un $S_4$ per modo che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le quadriche passanti per due punti fissi $A$ e $B$ e con un iperpiano tangente fisso in uno di essi, per es. in $A$. Ed allora il sistema lineare di coni quadrici col vertice in $A$ e passanti per $B$, sistema lineare $\infty^8$, rappresenta il sistema delle sezioni della $V_4^7$ con gli iperpiani passanti per un punto $M$ da cui escono $\infty^3$ rette della $V_4^7$ (le rette che hanno per immagini quelle dello spazio rappresentativo uscenti da $A$), cioè la $V_4^7$ è un cono.

(1) Cfr. ENRIQUES, loc. cit. al n. 41.

52. La dimostrazione ora compiuta conduce facilmente alla determinazione delle $V_4^8$ di 2ª specie, di quelle $V_4^8$ cioè che non contengono delle $C^5$ razionali normali, o, ciò che fa lo stesso, di quelle $V_4^8$ di $S_{10}$ che sono tagliate da un $S_9$ generico in una $V_3^8$ di 2ª specie.

Ora risulta dalle ricerche del prof. ENRIQUES che una $V_3^8$ di 2ª specie o è un cono o è la $V_3^8$ di VERONESE: quindi per dimostrare, come già abbiamo annunciato, che tutte le $V_4^8$ di 2ª specie sono coni, basta far vedere che è un cono una $V_4^8$ di $S_{10}$ avente per sezioni iperpiane delle $V_3^8$ di VERONESE.

Di questo teorema possono darsi varie dimostrazioni. Può dirsi in primo luogo che una $V_4^8$ di $S_{10}$ a curve sezioni ellittiche è proiettata da un suo punto generico in una $V_4^7$ di $S_9$ che è pure a curve sezioni ellittiche; ma allora, come questa $V_4^7$ è un cono, così anche la $V_4^8$ è un cono.

Oppure si può imitare un ragionamento del prof. SEGRE, osservando che le collineazioni fra i due $S_3$ rappresentativi di due $V_3^8$ di VERONESE dànno luogo a $\infty^{15}$ omografie tra i loro spazi ambienti in cui esse si corrispondono. Per modo che se si hanno due $V_3^8$ di VERONESE e, considerate due loro sezioni iperpiane, si stabilisce fra queste la corrispondenza biunivoca in cui si riflette una proiettività stabilita fra le due quadriche che ne sono le immagini, tale corrispondenza è contenuta in una omografia tra i due $S_9$ delle $V_3^8$ in cui queste si corrispondono.

Si osservi ancora che due $V_3^8$ di VERONESE le quali abbiano due sezioni iperpiane comuni coincidono, poichè un $S_7$ generico dell'$S_9$ che le contiene entrambe le taglia in due curve normali ellittiche dell'$8^0$ ordine con 16 punti comuni, cioè in due curve coincidenti.

Posto ciò, sia $V_4^8$ una varietà dell'$S_{10}$ tagliata da due iperpiani generici $\alpha$ e $\beta$ in due $V_3^8$ di VERONESE. Queste due $V_3^8$ hanno una loro sezione iperpiana (una $V_2^8$) comune, quindi resta individuata una omografia tra i loro spazi $\alpha$ e $\beta$ in cui esse si corrispondono e in cui quella $V_2^8$ è unita punto per punto. Ma allora tale omografia è una prospettività e le due $V_3^8$ stanno sopra un cono $W_4^8$, che coincide con la data $V_4^8$ perchè ogni iperpiano taglierà questa e il cono in due $V_3^8$ di VERONESE con due loro sezioni iperpiane comuni (quelle contenute in $\alpha$ e $\beta$) (1).

(1) Il ragionamento di SEGRE è riportato in BERTINI, *Introduzione*, etc. (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 342, ed è evidentemente estendibile a tutte le varietà

53. Riassumendo la discussione precedente, abbiamo l'enunciato:

*Una $V_4^n$ $(n > 3)$ razionale normale non conica a curve sezioni ellittiche è*

*a) per $n = 4$ una $V_4^4$ base di un fascio di quadriche di un $S_6$;*

*b) per $n = 5$ una $V_4^5$ di $S_7$;*

*c) per $n = 6$ la $V_4^6$ di* SEGRE *di $S_8$ o la $V_4^6$ (pure di $S_8$) intersezione parziale di una quadrica e di un cono proiettante da un piano una superficie di* VERONESE (¹).

54. Le proprietà più notevoli della $V_4^5$ di $S_7$, che indirettamente risulteranno anche da un teorema che troveremo più tardi, possono dedursi subito dalla sua rappresentazione.

La rigata del quart'ordine $K$ base del sistema di forme $L$ rappresentanti le sezioni iperpiane della $V_4^5$ può essere di due specie: può avere cioè una direttrice rettilinea o $\infty^1$ direttrici coniche (²). In ogni caso ha però un punto doppio improprio $O$ che è doppio anche per tutte le $L$.

Per semplicità consideriamo soltanto il caso generale nel quale $K$ contiene $\infty^1$ coniche (irriducibili) e siano $a$ e $b$ le due generatrici uscenti dal punto doppio $O$. Le $\infty^4$ corde di $K$ rappresentano un sistema $\infty^4$ di rette di $V_4^5$ tale che per ogni punto di $V_4^5$ ne passano $\infty^1$ costituenti un cono cubico appartenente ad un $S_4$ e perciò razionale.

Gli $\infty^1$ coni cubici delle rette uscenti dai vari punti della conica $C^2$ di $V_4^5$ da cui si intende fatta la proiezione, hanno per immagini le $\infty^1$ cubiche nodali (col nodo in $O$) secondo cui $K$ è ta-

aventi per sezioni iperpiane delle varietà di VERONESE. Si arriva con ciò a un teorema che è caso particolare di un altro stabilito dal sig. TANTURRI (*Giornale di Matematiche,* Napoli, serie 2ª vol. XIV, 1907).

(¹) I risultati di questo lavoro furono già annunziati in brevissimo riassunto in una Nota pubblicata nei *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei* (gennaio 1908), ma quando pubblicai quella Nota mi pareva di poter dimostrare che per $n = 6$ ogni $V_4^n$ fosse un cono oppure la $V_4^6$ di SEGRE e così nel teorema ivi enunciato non compare l'altro tipo di $V_4^6$ che si trova nel teorema del testo.

Nel senso medesimo va rettificata l'asserzione contenuta nell'ultima nota a piè di pagina del lavoro pubblicato nei *Rend. del Circolo di Palermo,* citato più innanzi. Ma si vede subito che tale correzione non ha alcuna influenza sul teorema che da quella asserzione viene dedotto.

(²) SEGRE, *Sulle rigate razionali,* etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1884).

gliata dai piani di un sistema del cono quadrico che la contiene [1]. Inoltre essi costituiscono la totale intersezione della $V_4^5$ col cono quadrico proiettante dal piano di $C^2$, gli $S_4$ tangenti alla $V_4^5$ nei punti di $C^2$, dunque essi riempiono una $V_3^{10}$ che ha in ogni punto di $C^2$ un punto triplo.

Una sezione iperpiana generica della $V_4^5$ contiene $\infty^4$ coniche e per ogni conica della $V_4^5$ passano $\infty^4$ iperpiani, dunque la $V_4^5$ contiene un sistema di coniche $\infty^7$ e per due suoi punti generici ne passano $\infty^1$. Segue per l'osservazione precedente che le rette della $V_4^5$ si distribuiscono in $\infty^7$ $V_3^{10}$ con altrettante coniche triple nelle coniche della $V_4^5$.

55. Notisi prima di procedere oltre che il luogo delle $\infty^1$ coniche della $V_4^5$ passanti per due suoi punti generici è una quadrica.

Infatti se si immagina di proiettare la $V_4^5$ da un punto generico $A$ dello spazio ambiente sopra un $S_6$, per il punto $A$ passano $\infty^2$ corde della $V_4^5$ e ogni $S_5$ condotto per $A$ ne contiene una, dunque queste $\infty^2$ corde riempiono un $S_3$, che avrà in comune con la $V_4^5$ una superficie. Ma tale superficie non potrà essere che una quadrica, per conseguenza:

*La $V_4^5$ contiene $\infty^4$ quadriche ordinarie. Per ogni coppia di punti generici di $V_4^5$ ne passa una ed una sola.*

Il fatto che gli $\infty^4$ $S_3$ contenenti le quadriche di $V_4^5$ riempiono *semplicemente* lo spazio ambiente dà luogo al teorema:

*Per ogni punto dell' $S_7$ passano $\infty^1$ $S_4$ tangenti della $V_4^5$: il luogo dei loro punti di contatto è una conica: cosicchè il sistema $\infty^7$ delle coniche di $V_4^5$ può farsi corrispondere biunivocamente ai punti di un $S_7$.*

Adoperando una locuzione introdotta dal prof. Severi in una sua Memoria più volte citata, questo teorema può enunciarsi dicendo che l'*ultimo ceto* ($\omega_3$) della $V_4^5$ è uguale a 2. Crediamo inutile a questo proposito intrattenerci sul calcolo degli altri due ceti: si trova facilmente $\omega_1 = 10$ e $\omega_2 = 8$ [2].

(1) L'immagine di una sezione iperpiana è una forma cubica per $K$. D'altra parte quella sezione taglia la conica $C^2$ da cui si fa la proiezione in due punti da ciascuno dei quali partono tre rette della sezione, quindi l'immagine avrà in corrispondenza due terne di punti doppi diversi da $O$ sopra due cubiche piane di $K$. Il che collima con un bel teorema del prof. Severi (*Sulle intersezioni*, etc., n. 22).

(2) Anche per la $V_3^5$ di $S_6$, studiata precedentemente, i valori dei tre ceti sono $\omega_1 = 10$; $\omega_2 = 8$; $\omega_3 = 2$. Ciò significa, per un teorema del prof. Severi (loc. cit. n. 3), che la $V_3^5$ non ha punti doppi impropri.

Nello spazio rappresentativo le $\infty^4$ quadriche della $V_4^5$ hanno per immagini le quadriche che passando per $O$ tagliano $K$ in una quartica gobba dotata di punto doppio e le coniche della $V_4^5$ hanno per immagini delle coniche quadrisecanti $K$, dunque:

*Se si considera in un $S_4$ una rigata del quart'ordine vi sono $\infty^4$ quadriche ordinarie che la segano in quartiche gobbe nodali; di tali quadriche non ne passa che una per due punti generici dell'$S_4$. Inoltre il sistema $\infty^7$ delle coniche quadrisecanti la rigata è una varietà razionale.*

Due quadriche secanti $K$ in quartiche nodali hanno in totale quattro punti comuni. Ma di questi uno cade in $O$, altri due stanno parimenti su $K$, dunque non ne resta che uno esterno a $K$. Ciò significa che:

*Due quadriche generiche della $V_4^5$ hanno un sol punto comune.*

Se $A$ e $B$ sono due punti generici della $V_4^5$, la quadrica che passa per $A$ e $B$ mostra che vi sono due rette di $V_4^5$ per $A$ che si appoggiano a due rette della $V_4^5$ passanti per $B$; e si potrebbe vedere che queste sono le sole rette incidenti della $V_4^5$ uscenti da $A$ e $B$ rispettivamente, dunque:

*I coni cubici riempiti dalle rette che escono dai punti della $V_4^5$ si tagliano a due a due in due punti.*

56. I coni cubici delle rette di $V_4^5$ uscenti dai punti di una sua retta $a$ riempiono una $V_3$ che ha per immagine nello spazio rappresentativo la $V_3$ delle corde di $K$ appoggiate a una sua corda generica. Ma questa è una $V_3^3$ passante per $K$, dunque quella è una $V_3^5$ sezione di $V_4^5$ con un iperpiano ad essa tangente (si riconosce subito) in tutti i punti di $a$.

57. I piani dello spazio rappresentativo che contengono le $\infty^1$ coniche di $K$ sono, come è chiaro, immagini di $\infty^1$ piani della $V_4^5$, poichè ogni retta di uno qualunque di essi, essendo corda di $K$, è immagine di una retta di $V_4^5$.

Ora si consideri la rigata razionale normale $V_2^4$ di $S_5$ da cui $K$ si può immaginare ottenuta mediante proiezione da un punto esterno $P$. I piani delle coniche di $V_2^4$ sono i piani secondo cui si intersecano gli iperpiani corrispondenti di due fasci proiettivi aventi per assi gli $S_3$ di due coppie di generatrici della $V_2^4$, quindi il loro luogo è una $V_3^3$ razionale normale con $\infty^2$ rigate quadriche direttrici i cui $S_3$ riempiono *semplicemente* lo spazio ambiente.

Ne segue che il luogo degli $\infty^1$ piani contenenti le coniche di $K$ è una $V_3^3$, avente un piano direttore doppio nella proiezione della quadrica direttrice della $V_3^3$ razionale suddetta, che è contenuta in un $S_3$ passante per $P$. Poi siccome questo $S_3$ taglia la $V_2^4$ in una linea e perciò in una cubica gobba una cui corda passa per $P$, si conclude che il piano direttore doppio della $V_3^3$ contenente i piani di $K$ è il piano delle due generatrici di $K$ uscenti dal punto doppio improprio. Sopra un tal piano, infine, i piani delle coniche di $K$ tagliano le tangenti di una conica.

Dalle cose dette segue subito che:

*Gli $\infty^1$ piani della $V_4^5$ costituiscono una sezione iperpiana e quindi il loro luogo è una $V_3^5$ razionale (normale in un $S_7$) con un piano direttore doppio $\delta$ su cui gli altri piani segnano le tangenti di una conica, cioè l'iperpiano contenente questa $V_3^5$ tocca la $V_4^5$ in tutti i punti di $\delta$.*

58. Sulla $V_4^6$ di $S_8$ studiata dal prof. SEGRE (¹) crediamo inutile trattenerci minutamente. Ricorderemo soltanto che essa può rappresentarsi *senza eccezioni* sulla varietà delle coppie di punti di due piani, e allora poichè la $V_3^6$ di $S_7$ con due sistemi di rette $\Lambda$ e M può sempre riguardarsi come una sezione iperpiana di una tale $V_4^6$, si avrà che:

*La $V_3^6$ di $S_7$ (a curve sezioni ellittiche) con due sistemi di rette si può rappresentare biunivocamente senza eccezioni sulla varietà delle coppie di punti coniugati in due sistemi piani reciproci.*

Così una $V_2^6$ di $S_6$ a curve sezioni ellittiche si può sempre considerare come la sezione di una $V_4^6$ di SEGRE eseguita con un certo $S_6$, dunque:

*La $V_2^6$ di $S_6$ a curve sezioni ellittiche si può riferire biunivocamente senza eccezioni alla varietà delle coppie di punti omologhi in due piani riferiti quadraticamente.*

È noto inoltre che gli $S_5$ contenenti le $V_3^3$ razionali normali delle $V_4^6$, oppure gli $S_3$ che ne contengono le quadriche, o infine gli $S_4$ tangenti alla $V_4^6$ hanno per luogo una $V_7^3$ di cui la $V_4^6$ è da considerarsi come varietà doppia, dunque:

*Il luogo degli $S_4$ contenenti le rigate cubiche normali di una $V_3^6$ di $S_7$ (a curve sezioni ellittiche) con due sistemi di rette $\Lambda$ e $M$, oppure il luogo degli $S_2$ che ne contengono le $\infty^4$ coniche, o infine il*

(¹) SEGRE, loc. cit., n. 22.

*luogo degli $S_3$ tangenti è una $V_6^3$, per la quale è doppio ogni punto della $V_3^6$.*

Questa $V_6^3$ può definirsi, volendo, come la forma riempita dalle corde della $V_3^6$ (al pari della $V_7^3$ rispetto alla $V_4^6$), e quindi le corde della $V_3^6$ *non* riempiono lo spazio ambiente, ossia *essa è priva di punti doppi apparenti.*

Alcune considerazioni che qui non riporto perchè non mi è ancora riuscito di presentarle in maniera compiuta, mi fan pensare che le $V_3$ di $S_r$ $(r \geq 7)$ le cui corde non riempiono una $V_7$ rientrano fra le $V_3$ a spazi tangenti mutuamente secantisi: se ciò fosse il teorema che ho dimostrato nella Nota di Palermo già citata, darebbe una nuova proprietà caratteristica di alcune delle $V_3$ a curve sezioni ellittiche. Qui mi limiterò a far notare che il luogo delle corde della $V_3^6$ con una retta doppia è la $V_6^3$ proiettante dalla retta doppia la $M_4^3$ contenente le corde di una superficie di VERONESE, e il luogo delle corde della $V_3^8$ di VERONESE è una $V_6^{10}$ (1).

59. Prima di lasciare questo argomento delle $V_4$ a curve sezioni ellittiche, osserveremo che esse dànno per proiezione da loro punti delle notevoli forme cubiche di $S_5$.

La $V_4^5$ di $S_7$ proiettata da due suoi punti generici $A$ e $B$ sopra un $S_5$ dà luogo a una $V_4^3$ con due $S_3$ $\alpha$ e $\beta$ immagini dei punti della $V_4^5$ infinitamente vicini ad $A$ e $B$, e la quadrica della $V_4^5$ che passa per $A$ e $B$ dà luogo a una retta $l$ (intersezione di $\alpha$ e $\beta$) doppia per la $V_4^3$.

I due sistemi $\infty^2$ di quadriche di $V_4^5$ passanti per $A$ o $B$, rispettivamente, dànno luogo a due sistemi $\infty^2$ di piani appoggiati secondo rette ad $\alpha$ o $\beta$ rispettivamente, tali che per ogni punto della $V_3^4$ passa un solo piano di ognuno dei due sistemi.

Due piani dello stesso sistema non hanno in generale punti comuni, invece due piani di sistemi differenti hanno sempre *un* punto comune.

Chiameremo piani del sistema $[\alpha]$ quelli che tagliano $\alpha$ in rette e piani del sistema $[\beta]$ i rimanenti.

I coni cubici delle rette della $V_4^5$ uscenti da $A$ e $B$ si proiettano in due cubiche gobbe $k_\alpha^3$ e $k_\beta^3$ situate in $\alpha$ e $\beta$ rispettivamente, le quali hanno due punti comuni su $l$, come i coni obbiettivi hanno due punti comuni sulla quadrica passante per $A$ e $B$.

(1) L'ordine di questa $V_6$ può calcolarsi mediante le formule date dal prof. SEGRE nella Nota citata al n. 9. I piani trisecanti della $V_3^8$ riempiono poi una $V_8^4$.

Un iperpiano che passi per l'$S_4$ tangente in un punto $A$ alla $V_4^5$ e poi passi per un altro punto $X$ della $V_4^5$ contiene la quadrica della $V_4^5$ che passa per $A$ ed $X$ poichè ne contiene il punto $X$ e due rette per $A$, dunque la sezione iperpiana della $V_4^5$ ad essa corrispondente è riempita da $\infty^1$ quadriche passanti tutte per $A$.

Ne segue che se si considerano gli iperpiani passanti per $B$ e per l'$S_4$ tangente alla $V_4^5$ nel punto $A$, essi tagliano la $V_4^5$ in $V_3^5$ per $B$ con un punto doppio in $A$ che si proiettano in coni quadrici della $V_4^3$: precisamente in coni quadrici formati dai piani del sistema $[\alpha]$. Uno di questi coni quadrici sarà la residua intersezione della $V_4^3$ con un iperpiano ($S_4$) del suo spazio passante per $\alpha$: quindi esso conterrà un piano di $\beta$ e avrà il vertice su $\beta$.

Anzi, se si osserva che un iperpiano passante per $B$ e per l'$S_4$ tangente alla $V_4^5$ in $A$ contiene tre rette della $V_4^5$ uscenti da $B$, di cui due si appoggiano al cono cubico delle rette uscenti da $A$, mentre la terza si appoggia in un punto a ciascuna delle $\infty^1$ quadriche costituenti la sezione della $V_4^5$ col considerato iperpiano, si conclude che gli $\infty^1$ coni quadrici ora considerati hanno i loro vertici sulla cubica $k_\beta^3$.

Nello stesso modo si dimostra che $k_\alpha^3$ è il luogo dei vertici dei coni quadrici intersezioni residue della $V_4^3$ con gli iperpiani passanti per $\beta$, e dopo ciò è chiaro che $k_\alpha^3$ e $k_\beta^3$ sono linee doppie della $V_4^3$.

Notisi che i piani di $[\alpha]$ tagliano $\alpha$ nelle corde di $k_\alpha^3$ e i piani di $[\beta]$ tagliano $\beta$ nelle corde di $k_\beta^3$, quindi gli $S_4$ che proiettano, per es., i piani di $[\alpha]$ da due piani di $[\beta]$ descrivono intorno a questi due piani due stelle proiettive.

Questo dimostra che la $V_4^3$ di cui qui si parla è caso particolare della $V_4^3$ studiata dal prof. VENERONI (¹) e generabile mediante stelle di iperpiani proiettive. La sestica ellittica che nel caso generale costituisce il solo luogo di punti doppi della $V_4^3$ si spezza qui nelle due cubiche gobbe $k_\alpha^3$ e $k_\beta^3$.

60. Molto più notevole è la $V_4^3$ di $S_5$ che si ottiene proiettando da tre suoi punti generici $A_1$, $A_2$, $A_3$ la $V_4^6$ di SEGRE.

Come già si è detto, questa $V_4^6$ contiene due sistemi $\infty^2$ di piani e tenendo conto, per es., della sua rappresentazione sulla varietà delle coppie di punti di due piani, si vede subito che essa

(¹) *Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni* (Rendic. del R. Ist. Lombardo di scienze e lettere, serie II, t. XXXVIII, 1905).

contiene $\infty^4$ quadriche ordinarie e $\infty^8$ superficie di VERONESE per modo che per due suoi punti generici passa *una* quadrica e per quattro punti generici *una* superficie di VERONESE.

Allora i sei piani di $V_4^6$ uscenti da $A_1$, $A_2$, $A_3$ e le tre quadriche passanti per $(A_1, A_2)$, $(A_2, A_3)$ e $(A_3, A_1)$ hanno per immagini nove rette doppie della $V_4^3$, e inoltre, i due sistemi di piani della $V_4^6$, le tre reti di quadriche passanti per $A_1$, $A_2$, $A_3$ rispettivamente e la rete di superficie di VERONESE passanti per $A_1 A_2 A_3$ dànno luogo a sei sistemi $\infty^2$ di piani della $V_4^3$, i piani di ciascun sistema appoggiandosi in punti a tre di quelle nove rette.

La $V_4^3$ contiene *nove* $S_3$ congiungenti le nove coppie di rette sghembe che possono formarsi con le nove rette doppie, etc., etc., etc.

Questo basta per riconoscere che la $V_4^3$ a cui si perviene è quella studiata già dal prof. PERAZZO (1) in una sua Nota del 1901 e della quale pertanto potrebbe rifarsi con tutta facilità la teoria partendo dalla $V_4^6$ di SEGRE (2).

## § IV.

### LE ALTRE VARIETÀ A CURVE SEZIONI ELLITTICHE.

61. La discussione fatta per le varietà a quattro dimensioni dimostra già che una $V_k^n$ di $S_{n+k-2}$ non conica per $k > 4$ non può avere che l'ordine $n = 5, 6$ (3); ma è facile vedere che anche per $n = 6$ e $k > 4$ le $V_k^n$ si riducono a coni. Sia (poichè basta limitarsi al caso di $k = 5$) $V_5^6$ una varietà a curve sezioni ellittiche di $S_9$. La sua sezione iperpiana generica sarà:

*a*) una $V_4^6$ di SEGRE, oppure

*b*) una $V_4^6$ con piano doppio, situata sopra una $V_4^4$ proiettante da un piano una superficie di VERONESE;

(1) *Sopra una forma cubica con nove rette doppie,* etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1901).

(2) Sulle forme cubiche dell'$S_4$ cui dànno luogo per proiezioni le $V_3$ a curve sezioni ellittiche non giova fermarsi dopo la nota ed esauriente trattazione del prof. SEGRE. Pure non sarà fuor di luogo notare incidentalmente come lo studio della $V_3^3$ di $S_4$ con 10 punti doppi diventi rapidissimo quando si consideri la $V_3^3$ come proiezione da cinque suoi punti generici della $V_3^8$ (di $S_9$) di VERONESE.

(3) Infatti per $n > 6$ ogni sua sezione con un $S_{n+2}$ è una $V_4^n$ normale a curve sezioni ellittiche e tale $V_4^n$ per $n > 6$ è un cono.

e non saranno possibili altri casi se non si vuol supporre fin dal principio che $V_5^6$ sia un cono.

Nell'ipotesi $a$) la $V_5^6$ sarà rappresentabile punto per punto sopra un $S_5$ e le sezioni iperpiane avranno per immagini le forme cubiche di un sistema lineare $\infty^9$ passanti per una varietà $K$ del $3^0$ ordine e a tre dimensioni situata sopra una quadrica $Q$. Di più le sezioni iperpiane generiche di $K$ e di $Q$ dovranno essere una rigata cubica normale e il cono quadrico a tre dimensioni con retta doppia che la proietta dalla sua direttrice. Ma allora $Q$ dovrà avere un piano doppio $\omega$ e $K$ dovrà essere il luogo di $\infty^1$ piani appoggiati ad $\omega$ secondo rette. D'altra parte una $V_3^3$ di $S_5$ riempita da $\infty^1$ piani, che non sia la $V_3^3$ razionale normale (e $K$ non sarà una tale $V_3^3$ perchè ha un piano direttore) non può essere che un cono proiettante da un certo punto $O$ una rigata cubica normale, quindi $K$ coinciderà con un tal cono e $Q$ sarà la quadrica con piano doppio che lo proietta dal suo piano direttore.

Ciò posto si consideri in un $S_9$ una $W_5^6$ ottenuta proiettando da un punto $V$ una $V_4^6$ di Segre e presa una sua qualunque cubica gobba $C^3$ si immagini di proiettarla dallo spazio di questa $C^3$ sopra un $S_5$.

Da un punto della $C^3$ escono due $S_3$ della $W_5^6$, cosicchè variando il punto su $C^3$, si hanno due serie $\infty^1$ di $S_3$, il luogo dell'una (1) essendo una $V_4^3$ conica col vertice $V$ proiettante da $V$ una $V_3^3$ razionale normale di un $S_5$, il luogo dell'altra essendo una $V_4^6$ conica proiettante da $V$ una $V_3^6$ razionale normale (luogo di $\infty^1$ piani) di un $S_8$. Segue allora che l'immagine della $V_4^3$ nell'$S_5$ su cui si fa la proiezione sarà un piano passante per l'immagine $V'$ di $V$, poichè la $V_4^3$ sta in un $S_6$ passante per $C^3$, e che l'immagine della $V_4^6$ è una $V_3^3$ conica col vertice in $V'$, ogni $S_3$ della $V_4^6$ avendo per immagine un $S_2$ della $V_3^3$, poichè sta con la $C^3$ in un $S_6$. Ma allora il sistema delle forme cubiche rappresentante le sezioni iperpiane di $W_5^6$ è un sistema riducibile per trasformazione omografica al sistema di forme cubiche della $V_5^6$ prima considerata, dunque $V_5^6$ è un cono al pari di $W_5^6$.

Nell'ipotesi $b$) la $V_5^6$ dovendo esser tagliata da ogni iperpiano in una $V_4^6$ con un piano doppio, dovrà possedere un $S_3$ doppio $\delta$;

(1) Da un teorema dimostrato precedentemente (n. 29) segue che una $V_4^6$ di Segre contiene due sistemi $\infty^{10}$ di cubiche gobbe e che i piani della $V_4^6$ uscenti dai punti di una sua cubica gobba riempiono due $V_3$, distinte, razionali normali, la prima dell'ordine 3, la seconda dell'ordine 6.

e dovendo esser tagliata (si vede subito) da ogni $S_7$ per $\delta$ in quattro $S_3$, si comporrà di $\infty^2$ $S_3$ appoggiati a $\delta$ secondo piani. Di più gli $\infty^4$ $S_4$ proiettanti da $\delta$ questi $\infty^2$ $S_3$ saranno gli $S_4$ proiettanti da $\delta$ i punti di una certa superficie di VERONESE.

Ognuno degli $\infty^2$ coni quadrici proiettanti da $\delta$ le coniche di questa superficie conterrà della $V_5^6$ una $V_4$ che, dovendo esser tagliata da ogni iperpiano in una $V_3^3$ conica, sarà una $V_4^3$ ottenuta proiettando da una certa retta una rigata cubica normale, dunque avremo in $\delta$ $\infty^2$ piani, tracce su $\delta$ degli $\infty^2$ $S_3$ della $V_5^6$, e $\infty^2$ rette, vertici delle $\infty^2$ $V_4^3$ corrispondenti alle $\infty^2$ coniche della superficie di VERONESE. Poichè ogni $S_3$ della $V_5^6$ fa parte di $\infty^1$ $V_4^3$, corrispondentemente al fatto che per ogni punto di una superficie di VERONESE passano $\infty^1$ coniche, concludiamo che quelle $\infty^2$ rette di $\delta$ formano una congruenza con $\infty^2$ piani singolari, cioè una stella ordinaria di centro $V$. Ma allora la $V_5^6$ è un cono di vertice $V$, c. d. d.

62. Per dimostrare invece l'esistenza di $V_5^5$ (appartenenti a spazi a 8 dimensioni) e $V_6^5$ (appartenenti a spazi a 9 dimensioni) a curve sezioni ellittiche non coniche, ammettiamo provvisoriamente che una $V_6^5$ esista e studiamone le proprietà della rappresentazione sopra un $S_6$.

La rappresentazione sarà ottenuta mediante proiezione dal piano di una conica della $V_6^5$: le immagini delle sezioni iperpiane saranno forme cubiche con una $V_4^4$ base, luogo di $\infty^1$ $S_3$, dotata di un piano doppio $\delta$ (poichè ogni $S_4$ dell'$S_6$ deve tagliarla in una $V_2^4$ con un punto doppio improprio), e il *resto* degli iperpiani dell'$S_6$ rappresentativo rispetto al sistema di queste forme cubiche sarà il cono quadrico proiettante da $\delta$ la $V_4^4$.

La $V_4^4$, essendo costituita da $\infty^1$ $S_3$, potrà considerarsi come proiezione di una $W_4^4$ razionale normale di $S_7$ da un punto esterno $O$. Considerando la $W_4^4$ come rappresentata, nel modo indicato dal prof. SEGRE, sopra la varietà delle coppie di punti di una retta, $r$, e di un $S_3$, $\alpha$, si vede subito che essa contiene $\infty^4$ quadriche ordinarie, ognuna di esse essendo rappresentata dalle coppie di punti di $r$ e di una retta di $\alpha$, e si vede anche che per ogni coppia di punti della $W_4^4$ di queste quadriche non ne passa che una sola. Gli $S_3$ di queste $\infty^4$ quadriche riempiono *semplicemente* l'$S_7$ della $W_4^4$, quindi la $V_4^4$ essendo ottenuta dalla $W_4^4$ per proiezione da $O$ conterrà (come appunto si voleva) un piano doppio $\delta$ e $\infty^4$ quadriche ordinarie.

Ora è chiaro che gli $S_3$ dell'$S_6$ rappresentativo contenenti le quadriche di $V_4^4$ (in particolare, uscenti da $\delta$) rappresentano $S_3$ della $V_6^5$ e poichè gli $S_3$ uscenti da $\delta$ tagliano su quattro $S_3$ contenenti quattro quadriche generiche della $V_4^4$ quattro spazi omografici, anzi prospettivi, si conclude che gli $\infty^3$ $S_3$ della $V_6^5$ aventi per immagini gli $\infty^3$ $S_3$ dello spazio rappresentativo uscenti da $\delta$, formano sulla $V_6^5$ un sistema $\Sigma$ che si può immaginare come generato congiungendo i punti omologhi di certi quattro $S_3$ proiettivi, aventi (come le loro immagini) due a due un punto comune e in esso un punto unito.

Arrivati a questo punto si potrebbe dimostrare l'esistenza della $V_6^5$ facendo vedere che si possono costruire in un $S_9$ quattro $S_3$ proiettivi così che gli $S_3$ congiungenti i punti omologhi generino una $V_6^5$, ma si può evitare ogni ulteriore ragionamento osservando che una $V_6^5$ del tipo di quella che andiamo cercando (e tutte queste $V_6^5$ sono proiettivamente identiche) è fornita senz'altro dalla $V_6^5$ di $S_9$ che rappresenta nella nota maniera la varietà delle rette di uno spazio a quattro dimensioni.

Allora non solo resta dimostrata l'esistenza delle $V_5^5$ di $S_8$ e $V_6^5$ di $S_9$, ma si vede anche la ragione intima di alcune proprietà proiettive già esaminate delle $V_3^5$ di $S_6$ e della $V_4^5$ di $S_7$ e si ha una via semplice per lo studio della $V_5^5$ di $S_8$ e della $V_6^5$ di $S_9$ (1).

Così per es. la $V_5^5$ di $S_8$ potrà rappresentarsi sulla varietà delle rette di un complesso lineare di $S_4$, quindi conterrà un $S_3$ e $\infty^4$ $S_2$ appoggiati a questo in punti, etc., etc.

Si osservi ancora come dalle cose dette qui intorno alla rappresentazione della $V_6^5$, della $V_5^5$ e della $V_4^5$ sopra un $S_6$, un $S_5$ o un $S_4$ e da quelle stabilite dai proff. ENRIQUES e DEL PEZZO intorno alla rappresentazione delle $V_3^5$ e $V_2^5$ sopra un $S_3$ o un $S_2$, risultino delle notevoli rappresentazioni:

*a) della varietà delle rette di un $S_4$ sopra i punti di un $S_6$;*

*b) delle rette di un complesso lineare di un $S_4$ sopra i punti di un $S_5$;*

*c) delle rette comuni a due, tre o quattro complessi lineari di un $S_4$ sopra i punti di un $S_4$, di un $S_3$ o di un $S_2$.*

Nel 1° caso, le immagini dei vari complessi lineari dell'$S_4$, in tutti gli altri, le immagini delle intersezioni della varietà considerata

(1) In particolare si potranno scrivere le equazioni della $V_k^5$ ($k = 6, 5, 4, 3, 2$) di $S_{k+3}$: esse si otterranno in ogni caso ponendo cinque equazioni quadratiche fra le coordinate correnti.

con i vari complessi lineari dell'$S_4$ sono costituite da forme cubiche a 5, 4, 3, 2 e 1 dimensioni.

63. Dimostriamo ora che per $k > 6$ anche le $V_k^5$ di $S_{k+3}$ si riducono a coni, e per questo basta limitarsi al caso in cui $k = 7$.

Supponiamo per un momento che $V_7^5$ sia una varietà a curve sezioni ellittiche di $S_{10}$ e facciamone la proiezione sopra un $S_7$ dal piano di una sua conica qualunque. La proiezione risulterà biunivoca e la varietà base del sistema $\infty^{10}$ delle forme cubiche immagini delle sezioni iperpiane dovrà essere una $V_5^4$ riempita da $\infty^1$ $S_4$. Ora se si indicano con $m'$, $m''$, $m'''$, $m^{\text{IV}}$ gli ordini delle $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ direttrici minime che tagliano in $S_0$, $S_1$, $S_2$ o $S_3$ gli $S_4$ generatori di una $W_5^4$ razionale normale di cui questa $V_5^4$ sia (eventualmente) proiezione, deve aversi $m' \leq m'' - m' \leq m''' - m'' \leq 4 - m'''$ (¹) e d'altra parte è impossibile soddisfare a queste disuguaglianze con numeri interi, dunque la $V_5^4$ è necessariamente un cono, e allora segue nel solito modo che anche la $V_7^5$ è un cono ottenuto proiettando da un punto una $V_6^5$ di $S_9$.

64. Riassumendo le ricerche qui compiute possiamo dire:

*Una $V_k^n$ a curve sezioni ellittiche o è una $\infty^1$ ellittica di $S_{k-4}$ o, se $n > 3$, è razionale. In quest'ultimo caso o è un cono o è proiezione di una $W_k^n$ normale non conica di uno spazio a $n + k - 2$ dimensioni.*

*Le $W_k^n$ razionali normali non coniche di $S_{n+k-2}$ si riducono poi per $k > 3$ (ed $n > 3$):*

*a) alle $V_k^n$ basi dei fasci di quadriche di un $S_{k+2}$,*

*b) alla $V_6^5$ di $S_9$ che rappresenta nel solito modo la varietà delle rette di un $S_4$, e alle $V_5^5$ (di $S_8$) e $V_4^5$ (di $S_7$) che si ottengono da essa tagliandola mediante spazi a 8 o 7 dimensioni,*

*c) alla $V_4^6$ (di $S_8$) del prof. SEGRE e alla $V_4^6$ (di $S_9$) intersezione residua di un cono $V_5^4$ proiettante da un piano una superficie di VERONESE e di una quadrica che passa pel vertice di $V_5^4$ ed ha comune con esso uno dei suoi $\infty^2$ coni quadrici a quattro dimensioni.*

65. Tenendo presente la rappresentazione della $V_6^5$ di $S_9$ sopra le rette di un $S_4$ si vede subito che essa contiene $\infty^4$ $S_3$. gli $\infty^1$ $S_3$

(¹) BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali,* etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, Vol. XXXVI, 1901).

uscenti da un punto qualunque costituendo una $V_4^3$ proiettante da quel punto una $V_3^3$ razionale normale: tali $S_3$ infatti non sono altra cosa che le varietà della $V_6^5$ corrispondenti alle rette dell'$S_4$ uscenti dai vari suoi punti.

Sulla $V_6^5$ si hanno ancora $\infty^4$ quadriche a quattro dimensioni, per due punti generici della $V_6^5$ passandone una sola; esse corrispondono agli $\infty^4$ spazi (ordinari) rigati dell'$S_4$ e quindi si tagliano a due a due in piani.

Le due $V_4^3$ costituite dagli $S_3$ che escono da due punti $A$ e $B$ della $V_6^5$ si tagliano in una $V_2^2$: la quadrica $V_4^2$ passante per $A$ e $B$ contiene duesistemi $\infty^1$ di $S_2$ passanti per $A$ e due tali sistemi per $B$; dei due sistemi per $A$ (o per $B$) uno è formato di $S_2$ *situati* negli $S_3$ per $A$ (o per $B$), l'altro di $S_2$ *direttori* della $V_4^3$ da essi costituita; inoltre tale quadrica $V_4^2$ contiene la $V_2^2$ secondo cui si tagliano le due $V_4^3$.

Infine si vede facilmente che un iperpiano il quale passi per l'$S_6$ tangente in $A$ alla $V_6^5$ e poi per un punto $X$ della varietà stessa, contiene la quadrica $V_4^2$ passante per $A$ e per $X$ perchè ne contiene una $V_3^2$ ed un punto: dunque una sezione della $V_6^5$ con un iperpiano tangente è composta di $\infty^1$ $V_4^2$. Ciò che del resto è immediato se si pon mente all'$S_4$ rappresentativo.

66. Ora supponiamo di proiettare la $V_6^5$ di $S_9$ da due suoi punti $A$ e $B$ sopra un $S_7$. Si avrà una $V_6^3$ con due $S_5$, che rappresenteranno i punti della $V_6^5$ infinitamente vicini ad $A$ e $B$ e che chiameremo $\alpha$ e $\beta$.

La quadrica (a quattro dimensioni della $V_6^5$ che passa per $A$ e $B$, stando in un $S_5$ per $A$ e $B$, si proietta nell'$S_3$ $\lambda$ comune ad $\alpha$ e $\beta$, e si riconosce subito che ogni punto di $\lambda$ è doppio per la $V_6^3$.

Le $\infty^2$ $V_4^2$ per $A$ dànno luogo a $\infty^2$ $S_4$ della $V_6^3$ costituenti un sistema $[\alpha]$; così si hanno altri $\infty^2$ $S_4$ costituenti un sistema $[\beta]$.

Gli $S_4$ di $[\alpha]$ si appoggiano ad $\alpha$ secondo $S_3$, e così quelli di $[\beta]$ a $\beta$.

Due $S_4$ di uno stesso sistema si tagliano secondo una retta: due $S_4$ di sistemi diversi si tagliano in un piano.

Le due $V_4^2$ di $V_6^5$ uscenti dai punti $A$ e $B$ dànno luogo a due $V_3^3$ razionali normali situate in $\alpha$ e $\beta$; e come le due $V_4^3$ hanno comune una $V_2^2$ sulla $V_4^2$ per $A$ e $B$, così le due $V_3^3$ in $\alpha$ e $\beta$, che chiameremo $K_\alpha^3$ e $K_\beta^3$, hanno comune una $V_2^2$ sull'$S_3$ $\lambda$.

Una sezione iperpiana con punto doppio in $A$ si proietta in una quadrica contenente $\infty^1$ $S_4$ residua intersezione della $V_6^3$ con un iperpiano ($S_6$) del suo spazio passante per $\alpha$; tale quadrica $V_5^2$, contenendo $\infty^1$ $S_4$, ha un piano doppio situato in $\beta$, anzi su $K_\beta^3$. E lo stesso può ripetersi per il punto $B$.

Ne segue che la $V_6^3$, oltre lo spazio doppio $\lambda$, ha anche due $V_3^3$ doppie, $K_\alpha^3$ e $K_\beta^3$, le quali si tagliano su $\lambda$ in una quadrica ordinaria; gli $S_4$ di [$\alpha$] tagliano $\beta$ nei piani di $K_\beta^3$ e $\alpha$ negli $S_3$ contenenti le quadriche (ordinarie) di $K_\alpha^3$, e analogamente per gli $S_4$ di [$\beta$], etc., etc.

Tutto ciò dimostra che la $V_6^3$ in discorso è caso particolare della $V_6^3$ che si ottiene in un $S_7$ come luogo degli $S_4$ secondo cui si tagliano gli iperpiani omologhi di tre stelle proiettive aventi per centri tre $S_4$.

Tale $V_6^3$ contiene due sistemi $\infty^2$ di $S_4$ e ha una $V_3^6$ doppia a curve sezioni ellittiche con due sistemi di rette; quindi essa non è altra cosa che la varietà delle corde di questa $V_3^6$ (n. 58).

Il suo studio, allora, è implicitamente contenuto in quello della $V_7^3$ contenente le corde di una $V_4^6$ del Segre, forma cubica che dà per sezione con un $S_5$ la forma studiata dal prof. Veneroni nel lavoro che già abbiamo avuto occasione di citare.

Notisi che se si volesse considerare la forma cubica generata da tre stelle proiettive di iperpiani di un $S_9$ aventi per centri tre $S_6$ (e lo stesso dicasi per spazi di dimensione più elevata) questa non presenterebbe più alcun interesse, perchè si ridurrebbe ad un cono; ad un cono, cioè, proiettante dal punto comune ai tre $S_6$ una $V_7^3$ di Segre.

Palermo, marzo 1908.