

INTORNO ALLE CORRISPONDENZE (p, p)
SULLE CURVE DI GENERE p
E AD ALCUNE LORO APPLICAZIONI

(Lettera al prof. EUGENIO BERTINI)

La lettura della importante Memoria⁽¹⁾ del SEVERI sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, mi ha fatto ritornare per un momento sulle corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p , alle quali avevo già dedicato tre mie note comparse negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Mi sono accorto così che basta modificare leggermente un ragionamento a cui feci ricorso per la costruzione delle corrispondenze (p, p) a valenza -1 , per avere un terzo esempio di corrispondenze (oltre quelle a valenza zero e le involuzioni razionali) in cui si possa arrivare a stabilire direttamente la relazione geometrica fra il gruppo dei punti uniti e i gruppi corrispondenti a un punto qualunque nella corrispondenza considerata e nell'inversa; relazione, che, interpretata aritmeticamente, ha fornito al SEVERI la dimostrazione più rapida e più elegante del noto principio di corrispondenza espresso dalla formula:

$$u = \alpha + \beta + 2p\gamma.$$

Di più ho visto che alcuni teoremi già da me enunciati per le corrispondenze (p, p) a valenza -1 e simmetriche possono essere estesi anche a quelle non simmetriche, e non mi pare inutile esporle qui le mie osservazioni, data da una parte l'importanza del teorema del SEVERI, dall'altra la probabilità che esse possano servire a risolvere una questione assai difficile che s'incontra in questa teoria e si riconnette a un noto problema della teoria delle quartiche piane.

(¹) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, ecc.* (« Memorie dell'Acc. delle Scienze di Torino », 1903).

1. Consideriamo sopra una curva C di genere p una corrispondenza T a valenza -1 (non degenera), per la quale ad ogni punto x corrispondano p punti $y', y'', \dots, y^{(p)}$. Si vede subito, ricorrendo al teorema di riduzione del NOETHER ⁽¹⁾, che il gruppo $y', y'', \dots, y^{(p)}$ è non speciale, e allora è facile costruire gli omologhi $y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(p)}$ di ogni altro punto x_1 di C , dati gli omologhi $y', y'', \dots, y^{(p)}$ del punto x .

Basta infatti considerare la g_{p+1}^1 (non speciale, completa) determinata dal gruppo $x_1 y' y'' \dots y^{(p)}$ e chiamare omologhi del punto x_1 i punti $y'_1 y''_1 \dots y_1^{(p)}$ che insieme con x danno un gruppo di questa g_{p+1}^1 . La corrispondenza T che così si ottiene è, per costruzione, a valenza -1 , fa corrispondere ad ogni punto x_1 di C p punti $y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(p)}$ e infine fa appunto corrispondere ad x i p punti $y', y'', \dots, y^{(p)}$.

Dimostriamo ora, senza ricorrere alla formula che dà il numero delle coincidenze, che anche l'inversa della corrispondenza così ottenuta fa corrispondere ad ogni punto y' di C p punti $x, x'', \dots, x^{(p)}$.

Infatti se $x^{(i)}$ è un punto diverso da x e corrispondente a y' nella T^{-1} , diciamo $y'_i, y''_i, \dots, y_i^{(p)}$ gli omologhi di $x^{(i)}$ nella T : i due gruppi

$$x^{(i)} y' y'' \dots y^{(p)} \quad \text{e} \quad x y' y'_i \dots y_i^{(p)}$$

sono equivalenti; quindi sono equivalenti anche i gruppi:

$$x^{(i)} y'' \dots y^{(p)} \quad \text{e} \quad x y''_i \dots y_i^{(p)}.$$

Ciò mostra che ognuno di questi gruppi è speciale, e poichè per i $p - 1$ punti $y'', \dots, y^{(p)}$ passa un solo gruppo della serie canonica, $x^{(i)}$ è uno dei punti di questo gruppo diversi da $y'' \dots y^{(p)}$.

Reciprocamente: sia $x^{(i)}$ uno dei punti del gruppo canonico passante per $y'', \dots, y^{(p)}$ diversi da questi $p - 1$ punti e siano $y''_i, y'''_i, \dots, y_i^{(p)}$ i punti che insieme con x danno un gruppo della g_p^1 determinata dal gruppo $x^{(i)} y'' \dots y^{(p)}$. Dall'equivalenza dei gruppi

$$x^{(i)} y'' \dots y^{(p)} \quad \text{e} \quad x y''_i y'''_i \dots y_i^{(p)}$$

segue quella dei gruppi

$$x^{(i)} y' y'' \dots y^{(p)} \quad \text{e} \quad x y' y''_i y'''_i \dots y_i^{(p)}$$

⁽¹⁾ SCORZA, *Sopra le corrispondenze (p, p) ecc.* (« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXXV, 1900), n. 8.

e quindi y' corrisponde ad $x^{(i)}$ nella T e $x^{(i)}$ corrisponde ad y' nella T^{-1} .

Risulta dunque che la corrispondenza T è una (p, p) a valenza -1 e risulta anche il teorema:

In ogni corrispondenza T a valenza -1 con gli indici (p, p) esistente sopra una curva di genere p , presa una coppia di punti omologhi x ed y' , i $p - 1$ punti omologhi di x nella T diversi da y' e i $p - 1$ punti omologhi di y' nella T^{-1} diversi da x , costituiscono presi insieme un gruppo canonico ⁽¹⁾.

2. Ciò posto e mantenute tutte le notazioni precedenti, si indichino con $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(p)}$ i punti corrispondenti a y' nella T ; i gruppi

$$x y'_0 y'_1 \dots y_0^{(p)} \quad \text{e} \quad y' y' y'' \dots y^{(p)}$$

sono equivalenti; quindi sono equivalenti anche gli altri:

$$x x'' \dots x^{(p)} y'_0 y''_0 \dots y_0^{(p)} \quad \text{e} \quad y' y' y'' \dots y^{(p)} x'' \dots x^{(p)};$$

ossia

$$x x'' \dots x^{(p)} y'_0 y''_0 \dots y_0^{(p)}$$

è equivalente al gruppo risultante dalla somma del punto y' contato due volte e di un gruppo canonico qualsivoglia.

In altri termini:

In ogni corrispondenza (p, p) , T , a valenza -1 , esistente sopra una curva di genere p , la somma dei due gruppi corrispondenti a un punto qualunque y' nella T e nella T^{-1} è equivalente al doppio di y' aumentato di un gruppo canonico.

Ora questo teorema, quando si consideri che la T è priva di coincidenze, poichè l'esistenza di un punto unito porterebbe alla conseguenza che il gruppo $y' y'' \dots y^{(p)}$ è speciale, è appunto il teorema del SEVERI sul gruppo dei punti uniti, per il caso particolare considerato.

Per estenderlo adunque a tutti gli altri casi si può, procedendo come il SEVERI ha indicato, sostituire la considerazione delle corrispondenze (p, p) a valenza -1 a quella delle corrispondenze a valenza zero o a quella delle involuzioni razionali.

⁽¹⁾ Per le corrispondenze simmetriche questo teorema trovasi già al n. 10 della mia nota citata.

3. Il teorema enunciato al n. 1, assume un aspetto proiettivo semplice, quando s'immagini che la curva C sia una curva (canonica) d'ordine $2p - 2$, appartenente ad uno spazio a $p - 1$ dimensioni.

In tal caso, infatti, se si chiama p -gono corrispondente al punto x di C per T , il p -gono storto avente per vertici i punti $y', y'', \dots, y^{(p)}$ e p -gono corrispondente a y' per la T^{-1} , il p -gono storto avente per vertici i punti $x, x'', \dots, x^{(p)}$, si ha per quel teorema che le due facce opposte ai due punti y' e x rispettivamente nei due p -goni coincidono, e quindi:

L'inviluppo Γ delle facce dei p -goni storti corrispondenti ai vari punti di C per la T coincide con l'inviluppo delle facce dei p -goni storti corrispondenti ai vari punti di C per la T^{-1} .

4. La classe e il genere di Γ si calcolano subito.

Per la classe si osservi che, se un iperpiano di Γ passa per il punto A di C , il punto A o è vertice del p -gono corrispondente a un certo punto x di C per la T , o è vertice del p -gono corrispondente a un certo punto y' di C per la T^{-1} . Nel primo caso x corrisponde ad A nella T^{-1} , nel secondo y' corrisponde ad A nella T ; per conseguenza x e y' possono assumere ciascuno p posizioni differenti ognuna delle quali dà luogo a $p - 1$ iperpiani (diversi se T non è simmetrica) di Γ passanti per A . Si conclude che:

L'inviluppo Γ è della classe $2p(p - 1)$.

Per il genere si osservi che chiamando omologhi un punto x di C e un iperpiano ξ di Γ , quando ξ è faccia del p -gono corrispondente a x per T , si ottiene fra C e Γ una corrispondenza $(1, p)$ e su C si hanno tanti punti di diramazione per quanti sono i punti x di C , cui corrisponde per T un gruppo di p punti con due punti coincidenti.

Ora chiamando omologhi due punti y', y'' di C che corrispondono a uno stesso punto x per T , si ottiene fra y' e y'' una corrispondenza simmetrica $[p(p - 1), p(p - 1)]$ di valenza $p - 1$, dunque quei punti di diramazione sono $4p(p - 1)$. Segue allora dalla formula di ZEUTHEN che:

Il genere dell'inviluppo Γ è $3p(p - 1) + 1$.

5. Anche il teorema del n. 2 dà luogo, nell'ipotesi che C sia una curva canonica, a un importante enunciato di geometria proiettiva.

Siano $y', y'', \dots, y^{(p)}$ e $x', x'', \dots, x^{(p)}$ i due p -goni relativi a un punto A di C nella T e nella T^{-1} , e siano $B_1, B_2, \dots, B_{2p-4}$ i punti ove un iperpiano qualunque, tangente a C in A , taglia ulteriormente la

curva medesima. Il gruppo risultante dalla somma di $(y', y'', \dots, y^{(p)})$, $(x', x'', \dots, x^{(p)})$, $(B_1, B_2, \dots, B_{2p-4})$ è equivalente alla somma di $(B_1, B_2, \dots, B_{2p-4})$, del punto A contato due volte e di un gruppo canonico, cioè al doppio di un gruppo canonico; dunque i punti $y', y'', \dots, y^{(p)}$, $x', x'', \dots, x^{(p)}$, $B_1, B_2, \dots, B_{2p-4}$ rappresentano la completa intersezione di C con una quadrica dell' S_{p-1} . Gli iperpiani tangenti a C in A sono ∞^{p-3} ; si hanno dunque ∞^{p-3} quadriche passanti per i vertici dei due p -goni relativi ad A in T e in T^{-1} e distinte dalle $\infty^{\frac{1}{2}(p-2)(p-3)}$ quadriche contenenti C . Questo basta per concludere:

I due p -goni corrispondenti a un punto A di C nella T e nella T^{-1} sono autoconiugati per una medesima quadrica.

Non è difficile determinare l'indice del sistema ∞^1 di quadriche che per questo teorema vien collegato agli ∞^1 punti di C . Basta, per tale scopo, determinare il numero delle quadriche del sistema dotate di punto doppio, e queste non possono provenire se non da quei punti A di C pei quali i gruppi ad essi corrispondenti per la T e la T^{-1} hanno un punto comune. Siamo ridotti perciò a cercare il numero delle coppie involutorie della T .

Se si considera il quadrato della T , si ottiene una corrispondenza (p^2, p^2) di valenza 1, dunque le sue coincidenze sono:

$$p^2 + p^2 + 2p = 2p(p + 1)$$

e le coppie involutorie richieste sono $p(p + 1)$.

Segue che i punti A di C che danno luogo a quadriche della ∞^1 con un punto doppio sono $2p(p + 1)$, e per conseguenza l'indice della ∞^1 è $\frac{2p(p + 1)}{p} = 2(p + 1)$, poichè nello spazio delle quadriche di S_{p-1} quelle dotate di punto doppio costituiscono una ipersuperficie d'ordine p .

6. Considerando in particolar modo il caso $p = 3$, le ∞^3 corrispondenze $(3, 3)$ a valenza -1 esistenti sopra una quartica piana generale C^4 , danno luogo a ∞^3 involucri Γ della 12^a classe, fra i quali son compresi (contati ciascuno due volte) i 36 contravarianti ψ delle 36 quartiche di cui quella considerata è covariante \mathcal{S} .

Uno studio approfondito di questo sistema di involucri può dunque riuscir molto utile per la geometria proiettiva delle quartiche piane: proponendomi di ritornar sull'argomento in altra occasione, mi limiterò qui a notare soltanto alcune nuove proprietà delle quartiche piane che, fra altro, condurranno a una nuova semplicissima dimostrazione di un elegante teorema del LÜROTH.

7. Sia a una tangente comune alla quartica C^4 e all'involuppo Γ relativo a una corrispondenza $(3, 3)$ a valenza -1 , T , (ed alla sua inversa); e siano x, y' i due punti, omologhi in T , che hanno su a i punti ulteriori ad essi corrispondenti in T e in T^{-1} , rispettivamente.

Poichè a ha soltanto tre punti comuni distinti con C^4 , segue che :

1° o a contiene un punto di diramazione di T ;

2° o a contiene un punto di diramazione di T^{-1} ;

3° o a tocca C^4 in un punto che corrisponde ad x in T e ad y' in T^{-1} .

I punti di diramazione di T sono le coincidenze della $(6, 6)$ a valenza 2, che si ottiene chiamando omologhi due punti corrispondenti in T a uno stesso punto x della quartica ⁽¹⁾; dunque essi sono 24 e i primi due casi si verificano in tutto 48 volte.

Poi, se x è un punto di diramazione di T e dei tre punti omologhi ad x uno cade in y' e due cadono in y'' , delle 12 rette di Γ uscenti da y' due coincidono con la retta $y'y''$, mentre di quelle uscenti da x quattro si raccolgono nelle due rette congiungenti x coi punti ove la retta $y'y''$ taglia ulteriormente la quartica ⁽²⁾; dunque y' è un punto semplice e x è un punto doppio di Γ .

Segue che :

Nei 48 punti di diramazione di T e T^{-1} cadono altrettanti punti doppi di Γ , e nei 48 punti semplici omologhi a quelli in T^{-1} o in T rispettivamente cadono altrettanti punti semplici di Γ .

In particolare se T è simmetrica si trova il teorema :

Le 24 cuspidi della Steineriana di una quartica C^4 (situate sul covariante S) danno 24 punti doppi del contravariante ψ e questo passa anche per i poli (rispetto alle cubiche polari cuspidate) delle rette (contate ciascuna due volte) che congiungono le cuspidi di queste cubiche coi relativi flessi.

8. Tornando alla considerazione della retta a , vediamo quante volte si verifica il 3° caso.

Per questo si osservi che se A è il punto di contatto di a con C^4 , la coppia (y', A) è una coppia di punti omologhi tanto per la

⁽¹⁾ SCORZA, *Sopra le curve canoniche, ecc.* («Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. XXXV, 1900), n. 2, in nota.

⁽²⁾ Notisi che le 12 rette di Γ uscenti da un punto x di C^4 sono le rette congiungenti x coi punti ove i lati dei triangoli ad esso relativi in T e T^{-1} tagliano, fuori dei vertici, la quartica C^4 .

T^{-1} (A corrisponde ad y' in T^{-1}), quanto per la (6, 6) di valenza 2 prima considerata; ora, per una nota formula dell'HURWITZ, le coppie comuni a queste corrispondenze sono 48, dunque anche il 3° caso si verifica in tutto 48 volte.

Se a è appunto una di quelle rette per le quali esso si verifica e A è il suo punto di contatto con C^4 , delle 12 rette di Γ uscenti da A due vengono a coincidere con a ; per conseguenza A è anche un punto di Γ , e Γ e C^4 si toccano in esso.

Vediamo così che, delle 144 tangenti comuni a C^4 e a Γ , 48 si raccolgono nelle rette tangenti a C^4 nei punti doppi corrispondenti ai punti di diramazione di T e T^{-1} , e 96 si raccolgono a coppie nelle 48 rette tangenti a C^4 e a Γ in uno stesso punto.

9. Se la corrispondenza considerata T è simmetrica, l'inviluppo Γ si riduce a uno ψ della 6ª classe, contato due volte; e se a è una retta per la quale si presenta il caso di cui si è discusso nel numero precedente, i tre punti x, y', A vengono a trovarsi tutti nelle stesse condizioni.

Infatti, poichè A è in tal caso un vertice comune dei triangoli relativi ad x e ad y' , così y' ed x sono vertici comuni dei triangoli relativi ad x e A , y' e A rispettivamente, e il triangolo formato dalle tre rette tangenti a C^4 in A , x ed y' è nel tempo stesso inscritto e circoscritto a C^4 , mentre il triangolo Axy' è inscritto e circoscritto a ψ .

Notando inoltre che le 48 rette a del caso generale, si riducono ora a sole 24 distinte, si ha il notevole teorema:

Il covariante S e il controvariante ψ di una quartica C^4 si tagliano in $4 \times 30 = 120$ punti; di questi, 48 sono assorbiti dalle 24 cuspidi della Steineriana, che sono doppi per ψ e semplici per S ; 24 cadono nei poli, rispetto alle cubiche polari cuspidate, delle rette congiungenti le loro cuspidi coi flessi, ed altri 48 sono assorbiti da 24 punti nei quali S e ψ si toccano. Questi ultimi si distribuiscono in 8 triangoli inscritti e circoscritti a ψ , e le rette tangenti ad S (o ψ) nei vertici di uno di essi formano un triangolo inscritto e circoscritto ad S .

10. Per invertire la proprietà ora enunciata, si consideri una quartica C^4 e sia ABC un triangolo inscritto e circoscritto a C^4 , essendo A', B', C' i punti di contatto dei lati BC, CA e AB con C^4 , rispettivamente.

La corrispondenza (3, 3) a valenza -1 , perfettamente determinata, che fa corrispondere al punto C' i tre punti $A' B' C$, è simmetrica.

Infatti, se indichiamo con K un gruppo canonico qualunque, la coppia di rette OA e OB dà, che il doppio del gruppo $A'B'C$ è equivalente al doppio di un gruppo canonico diminuito del gruppo AB , ossia a un gruppo canonico aumentato dal punto A contato due volte; e questo basta per giustificare la nostra asserzione ⁽¹⁾.

Segue che:

Per ogni quartica piana generale vi sono $36 \times 8 = 288$ triangoli inscritti e circoscritti, distinti in 36 gruppi di 8 triangoli ciascuno, corrispondentemente alle 36 quartiche di cui quella data è covariante S . Questi triangoli sono i soli che godano della detta proprietà, finchè si vuole che i punti di contatto dei lati non coincidano coi vertici ⁽²⁾.

11. Ed ora si consideri una quartica C^4 e una T delle 36 corrispondenze simmetriche $(3, 3)$ a valenza -1 su di essa esistenti.

I punti ove il triangolo relativo a un punto x di C^4 per T taglia C^4 , fuori dei vertici, sono sopra una conica che tocca C^4 in x ; si ha così, facendo variare il punto x , un sistema ∞^1 di coniche di indice 8, perchè si vede subito che per un punto di C^4 oltre la conica che ivi tocca C^4 non ne passano che altre sei.

Le 24 coniche di questo sistema spezzate in coppie di rette sono date dai 24 lati degli 8 triangoli appartenenti a T per il teorema ora visto, preso, ciascuno di essi, insieme con la retta che congiunge i punti di contatto degli altri due lati del triangolo cui appartiene.

Ciò posto, supponiamo che nella quartica C^4 sia inscritto un pentalatero completo $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. La corrispondenza T a valenza -1 , che fa corrispondere al punto $a_1 a_2$ i vertici del triangolo $a_3 a_4 a_5$ è, per un ragionamento analogo ad altro già fatto, evidentemente simmetrica, e la coppia di rette a_1, a_2 dà una conica degenera del sistema ∞^1 relativo a T distinta dalle 24 della specie sopra considerata: dunque tutto il sistema ∞^1 è di coniche degeneri, ossia si ha il teorema (di LÜROTH):

In una quartica o non è inscritto alcun pentalatero completo o ve ne sono inscritti infiniti.

12. Alcuni di questi ragionamenti si estendono senz'altro ad ogni curva di ordine n che sia circoscritta ad un $(n + 1)$ -latero com-

⁽¹⁾ SCORZA, *Sopra le corrispondenze (p, p) , ecc.*, n. 10, 11.

⁽²⁾ I lati di uno di questi triangoli costituiscono una cubica (degenera) sei-tangente di 2^a specie. Si ha pertanto che: *I vertici e i punti di contatto con C^4 dei lati di due triangoli appartenenti a uno stesso gruppo sono le intersezioni di C^4 con una cubica.*

pleto e lasciano sperare che anche per esse si possa giungere a conseguenze notevoli, ma su ciò e sopra uno studio sistematico della varietà ∞^3 delle corrispondenze (3, 3) a valenza -1 di una quartica piana o dei relativi involuppi I ⁽¹⁾, pur possedendo già qualche risultato, intendo ritornare in altra occasione.

Bari, 12 giugno 1907

(1) La determinazione delle caratteristiche plückeriane di un involuppo I non presenta difficoltà. Si trova che la classe è 12, l'ordine 60, il genere 19, il numero delle tangenti doppie 36, il numero dei flessi 0, il numero dei punti doppi 1548, e quello dei regressi 144. Le tangenti doppie si distinguono in due gruppi, l'uno di 24, l'altro di 12, dotati di proprietà differenti, ecc., ecc.

Fra gli involuppi I ve ne sono ∞^2 spezzati in quattro fasci di rette contati ciascuno tre volte; i centri di questi fasci formano i gruppi canonici di C^4 . Sono gli involuppi I corrispondenti alle (3, 3) *degeneri*.