SU CERTI RIFERIMENTI PROSPETTIVI DELLE SUPERFICIE

1. Il Dottor GRASSI pubblicò negli Atti dell'Accademia dei Lincei (1901, 2^0 semestre) una dimostrazione di due teoremi, comunicatigli dal Prof. BIANCHI, su certe corrispondenze delle superficie per proiezione, nella quale si ricorre ai principii e ai metodi della Geometria differenziale. Credo utile mostrare ai lettori di questo periodico come ai medesimi teoremi possa arrivarsi per via geometrica più semplice.

2. È noto, e si dimostra subito del resto, che:

« *Se si proietta stereograficamente una quadrica F^2 da un suo ombelico O sopra un piano π parallelo al piano ω ad essa tangente in O, i sistemi (di linee) coniugati della quadrica, si mutano in sistemi (di linee) ortogonali del piano* ».

Infatti se si considera l'involuzione formata dalle coppie di direzioni coniugate uscenti da un punto qualunque P di F^2, i cui elementi doppi sono forniti dalle due generatrici della quadrica uscenti da P, e si proietta dal punto O, si ottiene un fascio involutorio di piani, i cui elementi doppi sono i piani proiettanti le dette generatrici, o, anche (per le note proprietà delle rette di una quadrica appartenenti a sistemi diversi), i due piani congiungenti la retta OP con le due generatrici a e b di F^2 situate nel piano ω. Ora le rette a e b, poichè per ipotesi O è un ombelico di F^2, passano per i punti ciclici di ω, o, ciò che fa lo stesso, di π, quindi, se P' è l'immagine di P su π, il fascio involutorio OP viene tagliato da π in un fascio involutorio di raggi avente per raggi doppi le rette che da P' vanno ai punti ciclici di π, ossia in un fascio ortogonale. D'altra parte questo fascio di raggi è quello cui dànno luogo le immagini in π delle direzioni coniugate di F^2 uscenti da P, quindi per la proiezione di F^2 da O su π, i sistemi coniugati di F^2 si mutano in sistemi ortogonali di π.

3. La proprietà espressa da questo teorema è caratteristica per le quadriche e i loro ombelichi: vale cioè (e in questo consiste il primo teorema del prof. BIANCHI) l'osservazione importante:

Se la proiezione di una superficie F da un suo punto O sopra un piano π muta i sistemi coniugati di F in sistemi ortogonali di π, la superficie F è una quadrica con un ombelico in O ed il piano ω ad essa tangente in O è parallelo a π.

Infatti se da O si conduce il piano ω parallelo a π, ω sega in un fascio di raggi involutorio ortogonale tutti i fasci involutori di piani proiettanti da O i fasci di raggi costituiti dalle coppie di direzioni coniugate uscenti dai vari punti di F. Ne segue che delle due direzioni asintotiche uscenti da un punto qualsiasi di F, ognuna si appoggia a una delle due rette a, b che congiungono O ai punti ciclici di ω, e quindi la sezione di F con un piano qualunque passante, ad es., per a è una linea che ha con ogni sua tangente un contatto tripunto, cioè una linea retta. Lo stesso vale per la retta b; per conseguenza F, contenendo un doppio sistema di rette, è una quadrica, che passa per a e b e quindi anche per O. Tanto basta per giustificare il teorema enunciato.

4. Un altro teorema notevole che si riconnette con questo ordine di idee è il seguente (pure del prof. BIANCHI):

« *Se la proiezione di una superficie reale F da un punto O sopra un'altra superficie reale F' dà luogo ad una corrispondenza conforme tra F ed F', questa corrispondenza è contenuta in una omotetia o in una trasformazione per raggi vettori reciproci dello spazio col centro in O* ».

Si osservi innanzi tutto che, dato un fascio involutorio ellittico reale di piani, esistono due sole giaciture reali tali che i piani ad esse paralleli taglino il fascio involutorio di piani in un fascio di raggi ortogonali.

Infatti se AA', BB' sono i quattro punti, distinti in due coppie di punti immaginari coniugati, in cui i due piani doppi (immaginari) del fascio di piani tagliano il circolo immaginario all'infinito o *assoluto*, le due sole giaciture determinate dalle rette *reali* AA' e BB' dànno luogo a piani secanti il fascio dato in fasci di raggi ortogonali.

Ciò posto, notisi che se P e P' sono due punti corrispondenti qualunque di F ed F', il piano tangente ad F' in P' sega il fascio involutorio di piani proiettanti da O il fascio involutorio delle coppie di direzioni ortogonali di F uscenti da P in un fascio involutorio di raggi che, per ipotesi, è del pari ortogonale: quindi se F'' ed F'''

sono le trasformate di F per una omotetia o per una trasformazione per raggi vettori reciproci col centro in O, la corrispondenza fra F' ed F'', oppure quella tra F' ed F''', determinata dalla prospettività rispetto al centro O è anche una corrispondenza per parallelismo di piani tangenti. Segue, come è noto, che essa è una omotetia, e per conseguenza, resta stabilito il teorema enunciato.

Bari, 7 aprile 1907.