XXXI.

SULLA RIDUZIONE DEL PROBLEMA DEI TRE CORPI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LXXIV (1914-15), pp. 907-939.

La esplicita riduzione del problema dei tre corpi al minimo ordine differenziale risale notoriamente a LAGRANGE (1). Essa appare oggidì concettualmente ovvia in base alla teoria di LIE (2) degli integrali dei sistemi canonici. Si può infatti, prendendo le mosse dalle equazioni cartesiane del moto assoluto dei tre corpi, assumerle senz'altro sotto forma canonica. E si ha un sistema con 9 gradi di libertà, ossia del 18° ordine, il quale ammette i tre integrali delle quantità di moto e i tre delle aree, oltre all'integrale delle forze vive.

Valendosi dei primi tre, si passa ad un sistema, pure canonico e a funzione caratteristica indipendente dal tempo t, con sei gradi di libertà, rimanendo altresì conservata la forma degli integrali delle aree. Questi danno luogo (mercè opportuna specificazione delle direzioni di riferimento) a due relazioni invarianti *in involuzione*, donde un ulteriore abbassamento di due gradi di libertà, conseguendosi così un sistema d'ottavo ordine, ben si intende sempre canonico e di funzione caratteristica H indipendente dal tempo t. È questo il risultato che più ci interessa. La riduzione definitiva ad un sistema di sesto ordine si raggiunge poi, quando si voglia, valendosi dell'integrale $H =$ cost. ed eliminando t.

Lo sfruttamento dei vari integrali per gli indicati abbassamenti d'ordine fu operato da JACOBI (3), il quale ha anche compiuta la esplicita riduzione delle equazioni differenziali fino al settimo ordine (cioè la massima, salvo l'eliminazione di t), con condotta di calcolo che, nella prima

(1) *Essai sur le problème des trois corps*, « Oeuvres », t. VI, pp. 229-331.

(2) Veggasi ad es. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris, Hermann, 1891, cap. VIII.

(3) *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps*, Werke, B. IV, pp. 297-314.

www.rcin.org.pl

parte, è sostanzialmente canonica, e, soltanto nella seconda (nel trar partito dagli integrali delle aree), è ormai superata.

Coll'impostazione comprensiva dianzi accennata, c'è ancora da costruire effettivamente la H. Vi si perviene rapidamente riferendosi a variabili kepleriane (4), ma c'è allora l'inconveniente che l'espressione esplicita di H si complica di molto, richiedendo laboriosi sviluppi in serie, come si sa dalla teoria della funzione perturbatrice. Più conforme alla natura della questione è l'attenersi, come già LAGRANGE e JACOBI, ad elementi che caratterizzino in modo diretto la configurazione e lo stato di moto dei tre corpi.

A ciò risponde, con un penetrante artificio formale, la classica ricerca del BRUNS (5); e, in modo più espressivo, direi anzi definitivo per ciò che concerne il risultante sistema ridotto, il trattato del WHITTAKER (6). Non completamente luminosa è invece la deduzione di quest'ultimo autore, in quanto si appoggia, come quella del BRUNS, ad uno speciale spediente analitico (la scelta di una opportuna trasformazione di contatto), sulla cui origine non si dà ragguaglio alcuno, e che d'altra parte richiede qualche sviluppo materiale di calcolo.

Mi è parso perciò desiderabile un ulteriore perfezionamento di metodo, inteso a rendere spontanei e perspicui anche i passaggi intermedi. Lo ho concretato nelle lezioni di Meccanica superiore, testè tenute all'Università di Padova, e mi permetto di farne oggetto della presente comunicazione.

Si vedrà che giova introdurre fin da principio convenienti coordinate lagrangiane del sistema: due angoli per individuare il piano dei tre corpi rispetto al piano invariabile (baricentrale), e sei coordinate cartesiane per individuare i tre corpi nel loro piano. Sfruttando dapprima gli integrali delle aree, ottengo, attraverso interpretazioni istruttive, un sistema ridotto a sei gradi di libertà, assai opportuno per il confronto col caso piano (dello stesso problema dei tre corpi).

La forma di WHITTAKER con quattro gradi di libertà ne discende immediatamente, in base agli integrali delle quantità di moto, colla solita trasformazione canonica che trasporta l'origine degli assi in uno dei tre corpi.

Il procedimento in discorso ha altresì il vantaggio di fornire sotto forma elegante le equazioni supplementari: quelle cioè da cui dipende,

---

(4) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1892, pp. 38-44; ovvero CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, B. I, Leipzig, Veit, 1902, pp. 279-286.

(5) *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems*, « Acta Math. », t. XI, 1887, pp. 60-64. Il BRUNS presenta sotto forma esplicita, anzi razionale, anche la riduzione al sesto ordine, però con intervento di un parametro complesso.

(6) *Analytical Dynamics*, Cambridge, University Press, 1904, pp. 331-335.

www.rcin.org.pl

una volta risolto il sistema ridotto, la determinazione dei parametri eliminati, segnatamente l'inclinazione e la longitudine del nodo del piano dei tre corpi rispetto al piano invariabile.

Quando in particolare si tratta di una soluzione periodica del sistema ridotto, rimane bene caratterizzato il legame fra gli elementi geometrici della soluzione periodica e il moto medio del nodo. Ne discende un elegante corollario concernente le soluzioni prossime ai triangoli equilateri di LAGRANGE, uniformemente ruotanti. E precisamente: *L'intersezione del piano dei tre corpi col piano invariabile ruota* (in generale non uniformemente) *con moto medio pari al doppio della velocità angolare di ciascuno dei tre corpi* (nel loro piano).

1. - Distacco del problema piano dal caso generale. Assi di riferimento. Coordinate lagrangiane.

Siano P_0, P_1, P_2 i tre corpi che si attraggono secondo la legge di NEWTON; O il loro baricentro, che si può supporre fisso.

Se il moto dei tre corpi si svolge sempre in un medesimo piano, il problema si riduce subito a due gradi di libertà (considerando il moto relativo di P_1, P_2 rispetto a P_0), e c'è da tener conto ulteriormente dell'integrale delle aree relativo a questo piano. La massima riduzione si effettua con calcolo ovvio: per es. introducendo coordinate polari ([7]).

Lasciamo da parte il problema piano, e consideriamo il caso generale, in cui i tre corpi *non* stanno sempre in un medesimo piano.

Sia $\boldsymbol{K}$ il momento risultante delle quantità di moto rispetto ad O.

Questo vettore, notoriamente costante, va senz'altro ritenuto *diverso da zero*. Infatti, ove si annullasse, le quantità di moto dei tre punti (di cui già la risultante è nulla per la fissità del baricentro) costituirebbero un sistema equilibrato, quindi (trattandosi di tre vettori) necessariamente contenuto in un piano: il moto si svolgerebbe allora nel piano che contiene le tre velocità iniziali, contro l'ipotesi.

Ciò posto, dacchè $\boldsymbol{K}$ non è nullo e quindi gli compete una ben determinata direzione fissa, potremo associargli il *piano invariabile* perpendicolare a $\boldsymbol{K}$ in O, e considerare come fisso il triedro $O\xi\eta\zeta$ definito come segue: $O\zeta$ diretto come $\boldsymbol{K}$; $O\xi$ e $O\eta$ direzioni *fisse* del piano invariabile.

Supporremo, come si suole in meccanica razionale, che il triedro $O\xi\eta\zeta$

([7]) ROUTH, *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Part. I, London, Macmillan, 1897, §§ 424-425. Cfr. altresì: CHARLIER, *Ueber das reducirte Drei-Korper-Problem*, « Meddelanden från Lunds Observatorium », n. 6, Förhandl. af K. Sv. Vet-Akad., 1899; e WHITTAKER, loco cit., pp. 339-341.

www.rcin.org.pl

sia *sinistrorso*, ossia che, per passare da $O\xi$ ad $O\eta$, si debba ruotare di $\pi/2$ nel senso orario (rispetto ad $O\zeta$).

Avendo escluso che i tre corpi rimangano sempre nel medesimo piano, siamo autorizzati a riferirci ad un intervallo di tempo in cui il piano dei tre corpi è distinto dal piano invariabile, e quindi lo interseca (in ogni istante t dell'intervallo) secondo una ben determinata retta — linea dei nodi — ed ha sopra di esso una inclinazione non nulla. Precisiamo questi elementi.

Si consideri in primo luogo la perpendicolare Oz al piano dei tre corpi, in tale verso da formare con $\boldsymbol{K}$, ossia $O\zeta$, un angolo acuto ϑ: ecco la misura della inclinazione sul piano invariabile.

Si scelga poi sulla linea dei nodi quel verso Ox, rispetto a cui la rotazione da $O\zeta$ ad Oz (attraverso l'angolo acuto) apparisca sinistrorsa.

Longitudine del nodo si dirà l'anomalia ψ di Ox nel piano invariabile, cioè l'angolo ψ, di cui bisogna ruotare, a partire da $O\xi$, nel verso positivo $\xi \rightarrow \eta$, per raggiungere Ox: ecco il secondo elemento determinativo della posizione del piano dei tre corpi rispetto al riferimento fisso. Seguendo una espressiva denominazione di Poincaré, i due parametri ϑ e ψ si diranno complessivamente *variabili oblique*.

Molto importante per noi sarà il riferimento mobile costituito: dagli assi Oz, Ox testè specificati, e da un terzo asse Oy (del piano dei tre corpi) diretto perpendicolarmente ad entrambi in modo che il triedro $Oxyz$ risulti sinistrorso.

Le variabili oblique ϑ e ψ permettono ovviamente di individuare la posizione relativa dei due triedri. Le formule esplicite di trasformazione (caso particolare delle euleriane, corrispondenti al valore zero dell'angolo φ) si possono tosto conseguire, immaginando di passare dall'uno all'altro dei due triedri — diciamo dal fisso al mobile — con due rotazioni successive (sempre sinistrorse): di ψ attorno ad $O\zeta$ e poi di ϑ attorno ad Ox. Lascio di trascriverle perchè in ciò che segue non mi accadrà di servirmene: basterà aver presente la precisa definizione geometrica degli angoli ϑ e ψ.

È chiaro comunque che anche la posizione assoluta dei tre corpi P_0, P_1, P_2 risulterà pienamente determinata col concorso di ϑ e ψ, tostochè si assegnino le sei coordinate x_ν, y_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ che li individuano, nel loro piano, rispetto alla coppia mobile Oxy.

Coordinate lagrangiane del sistema sono quindi le otto seguenti

$$\begin{aligned} &\vartheta\,, \quad \psi\,; \\ &x_\nu\,, \quad y_\nu \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Va notato che, essendo per ipotesi l'origine O situata nel baricentro,

www.rcin.org.pl

le x_ν, y_ν sono necessariamente legate dalle due relazioni lineari

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu = 0\,, \\ \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu = 0\,, \end{cases}$$

m_0, m_1, m_2 designando le masse di P_0, P_1, P_2.

Di ciò terremo conto a suo tempo.

Ma è anche perfettamente legittimo trattare, finchè fa comodo, O come un punto fisso qualsiasi, e in conformità le x_ν, y_ν quali parametri indipendenti.

2. - Elementi geometrico-materiali del triangolo dei tre corpi.

Designeremo con τ il doppio dell'area del triangolo $P_0P_1P_2$, cioè il valore assoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

e potremo, senza scapito della generalità, ritenere τ *non nullo* nell'intervallo di tempo considerato. Questo perchè, essendo escluso (§ precedente) che il moto avvenga costantemente in un piano, rimane escluso in particolare che i tre corpi si trovino sempre allineati ([8]): è dunque lecito riferirsi ad un intervallo di tempo, in cui essi costituiscono un effettivo triangolo.

Introdurremo poi: la massa totale del sistema

$$m = m_0 + m_1 + m_2\,;$$

i momenti di inerzia

$$I_x = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu^2\,, \qquad I_y = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu^2\,,$$

([8]) Infatti l'allineamento non può aver luogo sopra una retta *fissa*, perchè allora ogni piano fisso per la retta conterrebbe sempre i tre corpi. Se poi la retta varia, il piano (baricentrale) determinato dalle posizioni che le spettano in due istanti infinitamente vicini t e $t + dt$ viene a contenere così i tre corpi come le loro velocità all'istante t: e si è ancora ricondotti ad un moto piano. (Postilla autografa dell'Autore. [*N. d. R.*]).

www.rcin.org.pl

rispetto ai due assi Ox, Oy; il corrispondente prodotto d'inerzia

$$J = \sum_{\nu}^{2}{}_{0}\, m_\nu x_\nu y_\nu \,,$$

e infine il determinante

$$D = \begin{vmatrix} I_x & J \\ J & I_y \end{vmatrix} .$$

Fra τ, D e le masse sussiste la relazione identica

$$m_0 m_1 m_2 \tau^2 = mD \,. \tag{2}$$

Per dimostrarla, partiamoci dal determinante

$$\pm\,\tau = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} ,$$

e moltiplichiamone la prima riga per m_0, la seconda per m_1, la terza per m_2, con che si ha

$$\pm\, m_0 m_1 m_2 \tau = \begin{vmatrix} m_0 x_0 & m_0 y_0 & m_0 \\ m_1 x_1 & m_1 y_1 & m_1 \\ m_2 x_2 & m_2 y_2 & m_2 \end{vmatrix} .$$

Eseguendo il prodotto dei due determinanti per colonne, ove si badi alle precedenti definizioni di I_x, I_y, J, m e alle (1), risulta

$$m_0 m_1 m_2 \tau^2 = \begin{vmatrix} I_x & J & 0 \\ J & I_y & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} ,$$

ossia appunto la (2).

Da essa discende in particolare che, sotto le nostre ipotesi, è sempre

$$D > 0 \,.$$

www.rcin.org.pl

3. - Vettori fondamentali.

Velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del triedro mobile rispetto al triedro fisso.

Premettiamo che, rispetto agli assi mobili $Oxyz$, la perpendicolare $O\zeta$ al piano invariabile (e con essa il vettore $\boldsymbol{K}$) ha i coseni direttori

$$0\,, \quad \sin\vartheta\,, \quad \cos\vartheta\,.$$

Infatti $O\zeta$ è perpendicolare ad Ox, e si ha (§ 1) che, per passare da $O\zeta$ ad Oz, si deve ruotare di ϑ nel verso positivo $y \to z$.

Se si indica con $\boldsymbol{\varkappa}$ il vettore unitario (fisso) parallelo ad $O\zeta$, e si introducono i soliti vettori unitari, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ relativi al triedro $Oxzy$, si avrà naturalmente

$$\boldsymbol{\varkappa} = \sin\vartheta\,\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\,\boldsymbol{k}\,. \tag{3}$$

Ciò posto, consideriamo il passaggio da un generico istante t all'istante consecutivo $t + dt$. Il piano dei tre corpi cambierà in generale di orientazione rispetto al riferimento fisso: ψ si incrementerà di $d\psi$, ϑ di $d\vartheta$. Ciò val quanto dire che il nostro triedro mobile $Oxyz$ ruota di $d\psi$ attorno ad $O\zeta$ e di $d\vartheta$ attorno ad Ox. La prima rotazione elementare è così rappresentata, in grandezza, direzione e senso, dal vettore infinitesimo

$$d\psi\cdot\boldsymbol{\varkappa}\,,$$

la seconda dal vettore

$$d\vartheta\cdot\boldsymbol{i}\,.$$

Dividendo per dt, si ha l'espressione della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del triedro $Oxyz$ sotto la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\psi\boldsymbol{\varkappa} + \dot\vartheta\boldsymbol{i}\,: \tag{4}$$

il punto sovrapposto designa, ben si intende, derivazione rispetto a t.

4. - Velocità.

Diremo $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$ il vettore che rappresenta la velocità di P_ν nel moto assoluto, cioè riferito al triedro fisso $O\xi\eta\zeta$; $\boldsymbol{v}_\nu$ la corrispondente velocità relativa, cioè riferita al triedro $Oxyz$. Quest'ultima concerne chiaramente un

www.rcin.org.pl

moto piano: di P_ν nel piano dei tre corpi, riferito agli assi Oxy. Essendo x_ν, y_ν le coordinate di P_ν, le componenti di $\boldsymbol{v}_\nu$ sono $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, e si ha

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{x}_\nu \boldsymbol{i} + \dot{y}_\nu \boldsymbol{j} \qquad (\nu = 0, 1, 2). \tag{5}$$

Per passare da $\boldsymbol{v}_\nu$ a $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$, basta aggiungere la velocità di trascinamento, cioè quella che rimane subordinata in P_ν dal moto del triedro Oxy. A norma della formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, essa vale

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu ,$$

dove si è posto per brevità

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = P_\nu - O = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} .$$

Avendosi dalla (3)

$$\boldsymbol{\varkappa} \wedge \boldsymbol{i} = - \sin\vartheta\, \boldsymbol{k} + \cos\vartheta\, \boldsymbol{j} ,$$

$$\boldsymbol{\varkappa} \wedge \boldsymbol{j} = - \cos\vartheta\, \boldsymbol{i} ,$$

ove si tenga conto della espressione (4) di $\boldsymbol{\omega}$ e se ne eseguisca materialmente il prodotto vettoriale per $x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j}$, si trova subito

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu = - \dot{\psi} \cos\vartheta\, y_\nu \boldsymbol{i} + \dot{\psi} \cos\vartheta\, x_\nu \boldsymbol{j} + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) \boldsymbol{k} \qquad (\nu = 0, 1, 2) . \tag{6}$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} &= \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu = \\ &= (\dot{x}_\nu - \dot{\psi} \cos\vartheta\, y_\nu) \boldsymbol{i} + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi} \cos\vartheta\, x_\nu) \boldsymbol{j} + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) \boldsymbol{k} , \end{aligned} \tag{7}$$

i primi due addendi porgendo le componenti nel piano dei tre corpi, e il terzo la componente perpendicolare a questo piano.

5. - Forza viva e potenziale.

La forza viva totale del sistema è, per sua definizione,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} \times \boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu \{ (\dot{x}_\nu - \dot{\psi} \cos\vartheta\, y_\nu)^2 + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi} \cos\vartheta\, x_\nu)^2 + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu)^2 \} .$$

www.rcin.org.pl

Conviene scinderla in due addendi che corrispondono rispettivamente al moto nel piano e perpendicolarmente al piano dei tre corpi.

All'uopo si pone

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu \{(\dot{x}_\nu - \dot{\psi} \cos\vartheta\, y_\nu)^2 + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi} \cos\vartheta\, x_\nu)^2\}\,, \tag{8}$$

$$f = \tfrac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu \{(\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu)^2\}\,, \tag{9}$$

con che

$$T = \mathfrak{T} + f\,. \tag{10}$$

Trattandosi di punti che si attraggono mutuamente secondo la legge di NEWTON, la funzione delle forze U ha, come si sa, l'espressione

$$U = \mathrm{f}\left\{\frac{m_0 m_1}{\overline{P_0 P_1}} + \frac{m_0 m_2}{\overline{P_0 P_2}} + \frac{m_1 m_2}{\overline{P_1 P_2}}\right\}, \tag{11}$$

dove f designa la costante d'attrazione.

Ben si intende che le mutue distanze, e con esse la U, dipendono esclusivamente da x_ν, y_ν (anzi dalle loro differenze), senza intervento di ϑ, ψ.

6. - Momenti cinetici. Funzione caratteristica.

Per procurarsi le equazioni del moto sotto la forma hamiltoniana, si introducono le variabili coniugate a x_ν, y_ν, ϑ, ψ, i così detti momenti cinetici, ordinatamente definiti dalle posizioni:

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu}\,, \qquad q_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2)\,, \tag{12}$$

$$\Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\,, \qquad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\,, \tag{13}$$

e si eliminano a loro mezzo le componenti di velocità $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ dall'espressione dell'energia totale

$$H = T - U\,. \tag{14}$$

www.rcin.org.pl

Cominciamo coll'esplicitare le (12). Dei due addendi $\mathfrak{T}$ ed f, che costituiscono T, soltanto il primo dipende dalle $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$.

Si ha così, in base alla (8),

$$\left\{\begin{aligned} p_\nu &= m_\nu(\dot{x}_\nu - \dot{\psi}\cos\vartheta\, y_\nu)\,, \\ q_\nu &= m_\nu(\dot{y}_\nu + \dot{\psi}\cos\vartheta\, x_\nu)\,, \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{12'}$$

donde immediatamente

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2)\,. \tag{15}$$

Dalle (12') e (7) appare manifesto il significato delle p_ν, q_ν: esse sono le componenti della quantità di moto *assoluta* di P_ν secondo la linea dei nodi e la sua perpendicolare nel piano dei tre corpi.

E veniamo alle (13). Dacchè $\mathfrak{T}$ non dipende da $\dot{\vartheta}$, la (10) dà intanto

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}}\,, \qquad \Psi = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}}\,.$$

Le due derivate di f, in base alle posizioni del § 2, si esplicitano tosto sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}} &= I_x\dot{\vartheta} - J\dot{\psi}\sin\vartheta\,, \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} &= \sin\vartheta(-J\dot{\vartheta} + I_y\dot{\psi}\sin\vartheta)\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

mentre dalle (8) e (12') si ha

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\psi}} = \cos\vartheta \sum_0^2{}_\nu (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu) = \cos\vartheta\, \mathfrak{M}\,,$$

dove

$$\mathfrak{M} = \sum_0^2{}_\nu (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu)\,, \tag{17}$$

rappresenta visibilmente il momento risultante della quantità di moto del sistema rispetto alla perpendicolare Oz al piano dei tre corpi.

Le espressioni di Θ e Ψ possono con ciò essere scritte

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} = \Psi - \mathfrak{M}\cos\vartheta\,, \tag{13'}$$

www.rcin.org.pl

e queste sono certo risolubili rispetto a $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, perchè, a norma delle (16), il determinante dei relativi coefficienti è

$$\begin{vmatrix} I_x & -J \sin\vartheta \\ -J\sin\vartheta & I_y \sin^2\vartheta \end{vmatrix} = \sin^2\vartheta \cdot D\,,$$

essenzialmente positivo, tali dovendosi ritenere $\sin\vartheta$ (§ 1) e D (§ 2).

L'espressione canonica di f si avrebbe senz'altro, portandovi materialmente i valori così conseguiti di $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$. Non avremo bisogno di esplicitarla, ma gioverà, per maggiore chiarezza, distinguerla da $f(\dot{\vartheta}, \dot{\psi})$, chiamando F il risultato della sostituzione, ponendo cioè

$$f(\dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = F(\Theta, \Psi)\,. \tag{18}$$

Si intende che la F potrà inoltre dipendere, a calcoli eseguiti, dalle altre variabili canoniche, x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, ϑ: *non però da* ψ, poichè questo parametro non compare in f, nè nelle (13′).

Posto

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T} - U\,,$$

ossia, per la (15),

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) - U\,, \tag{19}$$

dalle (14), (10) e (18) si ha

$$H = \mathfrak{H} + F\,, \tag{14'}$$

che costituisce la voluta espressione della funzione caratteristica nelle 16 *variabili canoniche*:

$$x_\nu\,,\quad y_\nu\,,\quad \vartheta\,,\quad \psi$$

e loro coniugate

$$p_\nu\,,\quad q_\nu\,,\quad \Theta\,,\quad \Psi \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

7. - Equazioni del moto.

Giova tener distinte quelle che si riferiscono alle variabili oblique ϑ, ψ e relativi momenti cinetici Θ, Ψ. Le scinderemo perciò nei due gruppi

www.rcin.org.pl

seguenti:

$$(20)\qquad \begin{cases} \dot{x}_\nu = \dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}, & \dot{y}_\nu = \dfrac{\partial H}{\partial q_\nu}, \\ \dot{p}_\nu = -\dfrac{\partial H}{\partial x_\nu}, & \dot{q}_\nu = -\dfrac{\partial H}{\partial y_\nu}; \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

e

$$(21)\qquad \begin{cases} \dot{\vartheta} = \dfrac{\partial F}{\partial \Theta}, & \dot{\psi} = \dfrac{\partial F}{\partial \Psi}, \\ \dot{\Theta} = -\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta}, & \dot{\Psi} = -\dfrac{\partial F}{\partial \psi}. \end{cases}$$

Nei secondi membri delle (21) si è ridotto $H = \mathfrak{H} + F$ al suo secondo addendo F, perchè, a norma della (18), $\mathfrak{H}$ dipende soltanto dalle $x_\nu, y_\nu, p_\nu, q_\nu$, e non porta quindi contributo alcuno a quei secondi membri.

8. - Calcolo diretto del momento risultante $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto.

Si ha per definizione

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu\, \boldsymbol{\rho}_\nu \wedge m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)},$$

con

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = P_\nu - O = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j}$$

e $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$ data dalla (7).

In virtù delle (12′), si può scrivere più semplicemente

$$m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} = p_\nu \boldsymbol{i} + q_\nu \boldsymbol{j} + m_\nu(\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu)\boldsymbol{k},$$

dopo di che la materiale esecuzione del prodotto vettoriale porge

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{i} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu(\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) + \boldsymbol{j} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu(-\dot{\vartheta} y_\nu + \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) + \boldsymbol{k} \sum_0^2{}_\nu\, (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu),$$

ossia, avuto riguardo alle posizioni del § 2 e alla (17),

$$(22)\qquad \boldsymbol{K} = (I_x \dot{\vartheta} - J\dot{\psi} \sin\vartheta)\boldsymbol{i} + (-J\dot{\vartheta} + I_y \dot{\psi} \sin\vartheta)\boldsymbol{j} + \mathfrak{M}\boldsymbol{k}.$$

www.rcin.org.pl

9. - Relazioni provenienti dalla specificazione del sistema di riferimento.

Già abbiamo notato a § 1 che, per aver assunto il baricentro come origine degli assi di riferimento $Oxyz$, i parametri x_ν, y_ν sono di necessità legati in ogni istante dalle equazioni (1).

Altre relazioni conseguono dal modo con cui lo stesso triedro (mobile) si trova, per sua definizione, orientato rispetto al vettore (costante) $\boldsymbol{K}$. Sappiamo infatti dal § 3 che $\boldsymbol{K}$ ha per coseni direttori

$$0\,, \quad \sin\vartheta\,, \quad \cos\vartheta\,,$$

e quindi, per componenti,

$$0\,, \quad K\sin\vartheta\,, \quad K\cos\vartheta\,,$$

K designando la lunghezza costante del suddetto vettore.
Confrontando colla (22), se ne traggono le annunciate relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &I_x\dot\vartheta - J\,\dot\psi\sin\vartheta = 0\,, \\ &-J\,\dot\vartheta + I_y\,\dot\psi\sin\vartheta = K\sin\vartheta\,, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\mathfrak{M} = K\cos\vartheta\,, \tag{24}$$

l'ultima delle quali non è che la traduzione formale del significato di $\mathfrak{M}$, già rilevato a § 6.

Nelle (23) si possono sostituire a $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ i corrispondenti momenti cinetici Θ, Ψ. In virtù delle (16) e (13′), si ha immediatamente

$$\Theta = 0\,, \qquad \Psi = \mathfrak{M}\cos\vartheta + K\sin^2\vartheta\,,$$

l'ultima delle quali, badando alla (24), si riduce a $\Psi = K$, e mostra quindi che Ψ si mantiene costante al pari di Θ. Complessivamente, le (23), (24), in variabili canoniche, si scrivono

$$\Theta = 0\,, \qquad \Psi = K\,, \tag{23′}$$

$$\mathfrak{M} = K\cos\vartheta\,, \tag{24}$$

K essendo costante ed $\mathfrak{M}$ definito dalla (17).

Sono queste equazioni in termini finiti rispetto alle dette variabili,

www.rcin.org.pl

le quali, per quanto precede, risultano di necessità soddisfatte durante tutto il movimento.

Si tratta pertanto di relazioni, per loro natura, compatibili col sistema differenziale (20), (21), ossia, come si suol dire, di *relazioni invarianti* di tale sistema. Tenendone conto, ossia sfruttando la circostanza che, durante il moto Θ e Ψ conservano valore costante, si deduce dalle due ultime (21) che deve pur aversi, per qualunque t,

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0\,. \tag{25}$$

La seconda delle (25) ci era già nota, anzi sapevamo di più (§ 6), che si ha in essa (non soltanto una relazione invariante, ma proprio) una identità, poichè F non dipende da ψ.

Come corollario delle varie relazioni invarianti, possiamo ricavare ancora tre formule notevoli, che esprimono rispettivamente $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, ed F.

Le prime due si traggono dalle (23), eliminando successivamente ϑ e ψ, e ricordando (§§ 1, 2) che si può dividere senza riserve sia per D che per $\sin\vartheta$. Si ha così

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} I_x\,, \tag{26}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{K}{D} J \sin\vartheta\,. \tag{27}$$

Quanto a F, giova riportarsi alla (18) e tener conto che f è omogenea di secondo grado in $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, talchè

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}}\,\dot{\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}}\,\dot{\psi}\right),$$

donde, per le (13′),

$$F = \tfrac{1}{2}\{\Theta\dot{\vartheta} + (\Psi - \mathfrak{M}\cos\vartheta)\dot{\psi}\}\,.$$

In virtù delle (23′) e (26), il secondo membro si riduce a

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{K - \mathfrak{M}\cos\vartheta}{D}\,KI_x\,.$$

Sostituendo ancora $\mathfrak{M}$ per $K\cos\vartheta$ a norma della (24), si ha infine

www.rcin.org.pl

per F una espressione $\mathfrak{F}$, *che dipende soltanto dalle* x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, ossia

$$\frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2) = \mathfrak{F}.$$

10. - Riduzione del sistema differenziale dovuta agli integrali delle aree.

A § 7 abbiamo scritte le equazioni differenziali del moto, scindendo le (20), che definiscono le derivate delle variabili

$$\begin{matrix} x_\nu, & y_\nu, \\ p_\nu, & q_\nu, \end{matrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

dalle ultime quattro equazioni (21), che definiscono invece

$$\dot{\vartheta}, \quad \dot{\psi}, \quad \dot{\Theta}, \quad \dot{\Psi}.$$

La scissione è a priori soltanto formale, costituendo in realtà i due gruppi un sistema simultaneo. In particolare, essendo, per le (14′) e (19),

$$H = \mathfrak{H} + F = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) - U + F,$$

i secondi membri delle (20) possono ancora contenere ϑ, ψ, Θ, Ψ pel tramite di F. Ma si perviene agevolmente ad eliminarli mercè i risultati del § precedente. Vedremo anzi che è addirittura lecito sostituire senz'altro, nella funzione caratteristica H, al posto di F, la sua espressione

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2).$$

Prendiamo all'uopo in considerazione una generica $\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha$, α designando uno qualunque degli argomenti x_ν, y_ν, p_ν, q_ν $(\nu = 0, 1, 2)$; e poniamo mente alla circostanza che, per costruzione, $\mathfrak{F}$ si può immaginare proveniente da F, sostituendovi, al posto di Θ, Ψ, ϑ (la ψ, come sappiamo, non compare mai esplicitamente), le loro espressioni fornite dalle (23′) e (24).

Si ha quindi

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha} = \frac{\partial F}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}.$$

www.rcin.org.pl

Ma per le (23′) stesse, Θ e Ψ sono costanti, talchè

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0;$$

d'altra parte, per le (26), che pure sono verificate qualunque sia t, $\partial F / \partial \vartheta = 0$. Rimane in conformità

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,,$$

e con ciò *le* (20) *si possono risguardare quale sistema canonico nelle sole variabili* x_ν, y_ν *e relative coniugate* p_ν, q_ν, *che ha per funzione caratteristica*

$$H = \mathfrak{H} + \mathfrak{F} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) - U + \frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2)\,, \tag{28}$$

U ed $\mathfrak{M}$ essendo rispettivamente definite dalle (11) e (17).

11. - Confronto col problema dei tre corpi nel piano.

Il problema piano dei tre corpi, riferito ad assi *fissi* $O\xi\eta$, ha manifestamente per funzione caratteristica

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(\pi_\nu^2 + \chi_\nu^2) - U\,,$$

π_ν e χ_ν rappresentando le componenti secondo gli assi ξ, η della quantità di moto del corpo P_ν.

Rispetto ad assi mobili Oxy, ruotanti con velocità angolare n, comunque variabile in funzione di t, nel senso positivo $\xi \to \eta$ (sinistrorso secondo le convenzioni del § 1), le equazioni del moto sono ancora suscettibili di forma canonica, colla funzione caratteristica [9]

$$H_1 = \Lambda - n\mathfrak{M}\,,$$

[9] Per rendersene conto, si immagini di designare con φ un angolo funzione qualsivoglia di t, e si ponga

$$\xi_\nu + i\eta_\nu = e^{i\varphi}(x_\nu + iy_\nu)\,, \qquad \pi_\nu + i\chi_\nu = e^{i\varphi}(p_\nu + iq_\nu)\,,$$

$$(\nu = 0, 1, 2;\quad i = \sqrt{-1})\,.$$

Separando il reale dall'immaginario, si ha complessivamente una trasformazione canonica

www.rcin.org.pl

Λ intendendosi espresso nelle variabili trasformate x_ν, y_ν e loro coniugate p_ν, q_ν, ossia

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) - U\,,$$

e $\mathfrak{M}$ avendo il valore (17).

Per confrontare colle equazioni ridotte del caso generale [(20), colla espressione (28) di H], basta supporre che la velocità angolare n coincida colla $\dot\psi$ dei §§ precedenti. Ben si intende che, nelle derivazioni parziali di H_1 rapporto a x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, le quali figurano nelle equazioni canoniche, $n = \dot\psi$ va trattata come se fosse costante (funzione della sola t); mentre, a derivazioni eseguite, le si deve attribuire l'espressione (26).

Con tale avvertenza si può dire che il divario fra i due sistemi differenziali, entrambi canonici (quello ridotto spettante al caso generale e quello corrispondente al problema piano), rimane messo in evidenza dalla differenza delle rispettive funzioni caratteristiche (la H definita dalla (28) e la H_1 testè indicata), ossia da

$$H - H_1 = \frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2) + n\mathfrak{M}\,.$$

---

fra le variabili

$$\xi_\nu\,, \quad \eta_\nu\,,$$
$$\pi_\nu\,, \quad \chi_\nu\,,$$

e le

$$x_\nu\,, \quad y_\nu\,,$$
$$p_\nu\,, \quad q_\nu\,,$$

la quale corrisponde a far ruotare di ψ gli assi di riferimento.

Indicando con n la velocità angolare $\dot\psi$, si ha ovviamente:

$$d\xi_\nu + i\,d\eta_\nu = e^{i\psi}(dx_\nu + i\,dy_\nu) + in\,e^{i\psi}(x_\nu + iy_\nu)\,dt\,,$$

e quindi

$$\sum_0^2{}_\nu (\pi_\nu - i\chi_\nu)(d\xi_\nu + i\,d\eta_\nu) = \sum_0^2{}_\nu (p_\nu - iq_\nu)(dx_\nu + i\,dy_\nu) + in\,dt\sum_0^2{}_\nu (p_\nu - iq_\nu)(x_\nu + iy_\nu)\,,$$

da cui, eguagliando le parti reali,

$$\sum_0^2{}_\nu (\pi_\nu d\xi_\nu + \chi_\nu d\eta_\nu) = \sum_0^2{}_\nu (p_\nu dx_\nu + q_\nu dy_\nu) + n\mathfrak{M}\,dt\,.$$

Questa identità assicura (cfr. per es. MORERA, *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton*, « Rendiconti dei Lincei », ser. 5ª, vol. XII, 1° semestre 1903, pp. 118-119) che, nelle nuove variabili x_ν, y_ν, p_ν; q_ν, le equazioni sono ancora canoniche, la funzione caratteristica essendo quella di prima diminuita di $n\mathfrak{M}$, c. d. d.

www.rcin.org.pl

Rappresentiamo, come nel precedente §, con α uno qualunque degli argomenti x_ν, y_ν, p_ν, q_ν. Le differenze fra i secondi membri delle equazioni omologhe dei due sistemi saranno del tipo

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H - H_1) = \frac{1}{2}(K^2 - \mathfrak{M}^2)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{I_x}{D}\right) - \frac{I_x}{D}\mathfrak{M}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha} + n\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha}$$

$$= (K - \mathfrak{M})\left\{\frac{1}{2}(K + \mathfrak{M})\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{I_x}{D}\right) + \frac{I_x}{D}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha}\right\}.$$

Esse contengono a fattore $K - \mathfrak{M}$, cioè, per la (24),

$$K(1 - \cos\vartheta)\ ;$$

quindi si annullano tutte per $\vartheta = 0$, vale a dire quando il problema generale degenera nel caso piano. L'identità delle relative equazioni differenziali, concettualmente evidente, rimane così materialmente confermata sulle formule. Non si dimentichi tuttavia che, nella trattazione del caso generale, avevamo espressamente escluso (§ 1) il caso $\vartheta = 0$, talchè a rigore, solo per via di limite, è lecito porre dove che sia $\vartheta = 0$.

Interessante, per quanto nota e agevolmente deducibile anche dalle ordinarie equazioni cartesiane, è la conclusione pratica che ne consegue: *Il problema generale dei tre corpi, ridotto al loro piano, coincide col problema piano, ogni qualvolta i tre corpi si scostano abbastanza poco da un piano fisso, per modo che si possa trattare l'inclinazione* ϑ *come una quantità di primo ordine, assimilandosi in conformità* $\cos\vartheta$ *all'unità.*

12. - Verificazioni formali.

Va da sè che le (1), le quali esprimono che l'origine cade nel baricentro, debbono riuscire compatibili anche col sistema ridotto, di cui a § 10; e, insieme ad esse, pure le

$$\sum_0^2{}_\nu\, p_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, q_\nu = 0\,, \tag{29}$$

le quali esprimono che si annulla la risultante delle quantità di moto, ovvero la velocità del baricentro.

È facile procurarsene conferma formale, constatando che le (1), (29) costituiscono effettivamente un sistema di relazioni invarianti di fronte alle (20), ossia che le derivate dei primi membri, calcolate in base alle

www.rcin.org.pl

(20), si annullano, in virtù delle (1), (29) stesse. Tali derivate sono infatti

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \frac{\partial H}{\partial q_\nu};$$

$$-\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial H}{\partial x_\nu}, \qquad -\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial H}{\partial y_\nu}.$$

Dacchè si ha, a norma delle (28) e (17),

$$\frac{\partial H}{\partial p_\nu} = \frac{1}{m_\nu} p_\nu + \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} y_\nu, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = \frac{1}{m_\nu} q_\nu - \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} x_\nu,$$

le prime due divengono

$$\sum_0^2{}_\nu\, p_\nu + \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, q_\nu - \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu,$$

che vanno manifestamente a zero, in forza delle (1), (29). Quanto alle ultime due, malgrado i numerosi termini di cui constano $\partial H/\partial x_\nu$, $\partial H/\partial y_\nu$ (provenienti dalla derivazione di U, I_z, D, $\mathfrak{M}$), il loro annullarsi risulta dal fatto che, come si riconosce a vista,

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial I_x}{\partial x_\nu},$$

sono identicamente nulle, mentre

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial I_x}{\partial y_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial D}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial D}{\partial y_\nu},$$

vanno a zero per le (1); e

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y_\nu},$$

vanno a zero per le (29)

13. - Definitiva riduzione a mezzo degli integrali delle quantità di moto.

Un ulteriore abbassamento di due gradi di libertà è recato dagli integrali delle quantità di moto. Lo si effettua nel modo migliore ricorrendo alla trasformazione canonica di POINCARÉ [10].

[10] *Leçons de mécanique céleste*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, n. 26. Va rilevato del resto

www.rcin.org.pl

Essa consiste nel sostituire alle variabili x, p; y, q del sistema (20) nuove variabili x', p'; y', q' mediante le posizioni

$$\text{(30)}\qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_0, & x_2' = x_2 - x_0, & x_0' = x_0, \\ p_1' = p_1, & p_2' = p_2, & p_0' = p_0 + p_1 + p_2; \end{cases}$$

ed analoghe per le y, q:

$$\text{(31)}\qquad \begin{cases} y_1' = y_1 - y_0, & y_2' = y_2 - y_0, & y_0' = y_0, \\ q_1' = q_1, & q_2' = q_2, & q_0' = q_0 + q_1 + q_2. \end{cases}$$

Con ciò x_1', y_1'; x_2', y_2' rappresentano manifestamente le coordinate relative di P_1, P_2 rispetto a P_0 (cioè rispetto ad assi paralleli ad Ox, Oy coll'origine in P_0), mentre p_1', q_1'; p_2', q_2' conservano il significato di componenti della quantità di moto assoluta dei due punti P_1, P_2; inoltre sussistono le identità

$$\sum_0^2{}_\nu\, x_\nu' q_\nu' = \sum_0^2{}_\nu\, x_\nu q_\nu, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu' p_\nu' = \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu p_\nu;$$

le (1) divengono

$$\text{(1')}\qquad x_0' = -\frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m}, \qquad y_0' = -\frac{m_1 y_1' + m_2 y_2'}{m},$$

$$(m = m_0 + m_1 + m_2),$$

e le relazioni (29) assumono la forma particolarmente semplice

$$\text{(29')}\qquad p_0' = 0, \qquad q_0' = 0.$$

Nella espressione (28) della funzione caratteristica H si devono introdurre le variabili accentate, a norma delle (30), (31), e il sistema differenziale trasformato conserverà la forma canonica, talchè in particolare le derivate rapporto a t di p_0', q_0' saranno $-\partial H/\partial x_0'$, $-\partial H/\partial y_0'$: le (29')

---

che anche la originaria trasformazione di JACOBI (di cui ai nn. 27-31 dell'opera testè citata) condurrebbe con pari semplicità allo scopo. Essa ha però l'inconveniente che, nelle nuove coordinate (che sono combinazioni lineari delle primitive a coefficienti dipendenti dalle masse), la U perde la sua forma tipica.

www.rcin.org.pl

implicano pertanto

$$\frac{\partial H}{\partial x_0'} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_0'} = 0, \tag{32}$$

valide per qualunque t, al pari delle (1'), (29').

Prima di procedere, conviene prepararsi l'espressione H' di H, non solo riferita alle nuove variabili, ma altresì ridotta a mezzo delle (1'), (29'), con che vi rimangono esclusivamente x_ν', y_ν'; p_ν', q_ν' ($\nu=1, 2$), ossia coordinate (relative a P_0) e quantità di moto assolute dei *due* corpi P_1 e P_2.

Badando anzi tutto al primo termine della (28)

$$\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2),$$

si ha, come di solito, colla sola riduzione proveniente da $p_0' = 0$, $q_0' = 0$:

$$\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) = \frac{1}{2}\sum_1^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu'^2 + q_\nu'^2) + \frac{1}{2m_0}\{(p_1' + p_2')^2 + (q_1' + q_2')^2\}.$$

Nello stesso modo si ha

$$\mathfrak{M} = \sum_1^2{}_\nu (x_\nu' q_\nu' - y_\nu' p_\nu'). \tag{33}$$

U e D, a norma delle (11) e (2), dipendono esclusivamente (oltre che dai valori costanti delle masse) dalla configurazione del triangolo dei tre corpi: esse sono quindi direttamente esprimibili mediante le coordinate relative, con formule elementari (anche più semplici delle corrispondenti in coordinate assolute) che è superfluo trascrivere.

Resta I_z. La sua espressione ridotta si ricava comodamente dal significato di momento d'inerzia baricentrale, tenendo presente che le coordinate relative del baricentro O (di P_0, P_1, P_2) sono

$$\frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m}, \qquad \frac{m_1 y_1' + m_2 y_2'}{m}.$$

Infatti, essendo

$$\sum_1^2{}_\nu m_\nu y_\nu'^2$$

www.rcin.org.pl

il momento d'inerzia del sistema rispetto al nuovo asse delle x, si ha senz'altro dal teorema di HUYGENS

$$I_x = \sum_1^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu'^2 - \frac{1}{m}(m_1 y_1' + m_2 y_2')^2 \,. \tag{34}$$

Risulta pertanto

$$H' = \frac{1}{2}\sum_1^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu'^2 + q_\nu'^2) \tag{35}$$

$$+ \frac{1}{2m_0}\{(p_1' + p_2')^2 + (q_1' + q_2')^2\} - U + \frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2)\,,$$

dove U, D, $\mathfrak{M}$, I_x hanno semplici significati geometrico-materiali, che si desumono, per U e D, dalle (11) e (2), e che, per $\mathfrak{M}$ ed I_x, dati formalmente dalle (33) e (34), sono — ripetiamolo per essere completi — rispettivamente:

$\mathfrak{M}$ momento risultante delle quantità di moto del sistema rispetto alla perpendicolare al piano dei tre corpi (l'ubicazione di detta perpendicolare è indifferente, poichè si annulla la risultante delle quantità di moto);

I_x momento di inerzia del sistema rispetto alla linea (baricentrale) dei nodi.

La H' gode della proprietà che le sue derivate parziali rispetto ad uno qualunque degli otto argomenti x_ν', y_ν', p_ν', q_ν', $(\nu = 1, 2)$, da cui dipende, coincidono, durante tutto il movimento, colle corrispondenti derivate della H. Per dimostrarlo, basta pensare alla genesi di H'. Essa proviene, per sua definizione, da H ponendovi $p_0' = 0$, $q_0' = 0$, e sostituendovi per x_0', y_0' i valori (1'). Si ha quindi, indicando (come già a § 10) con α una qualunque delle otto variabili suaccennate,

$$\frac{\partial H'}{\partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial x_0'}\frac{\partial x_0'}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial y_0'}\frac{\partial y_0'}{\partial \alpha}\,,$$

da cui, per le (32),

$$\frac{\partial H'}{\partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

Ciò posto, consideriamo le equazioni del sistema [trasformato di (20)], che si riferiscono alle variabili

$$\begin{matrix} x_\nu'\,, & y_\nu'\,, \\ p_\nu'\,, & q_\nu' \end{matrix} \qquad (\nu = 1, 2).$$

www.rcin.org.pl

Per quanto precede, nei loro secondi membri, si può ovunque porre H' in luogo di H, e si ha in definitiva il sistema ridotto di WHITTAKER

$$\tag{36} \left\{ \begin{aligned} \dot{x}'_\nu &= \frac{\partial H'}{\partial p'_\nu}, & \dot{y}'_\nu &= \frac{\partial H'}{\partial q'_\nu}, \\ \dot{p}'_\nu &= -\frac{\partial H'}{\partial x'_\nu}, & \dot{q}'_\nu &= -\frac{\partial H'}{\partial y'_\nu}. \end{aligned} \right.$$

14. - Equazioni supplementari per ϑ e ψ. Retrogradazione della linea dei nodi.

Si supponga risoluto il problema ridotto di funzione caratteristica H', con che, per le (30) e (31), rimangono individuate anche le coordinate baricentrali x_ν, y_ν ($\nu = 0, 1, 2$). Più precisamente si supponga di conoscere quella soluzione particolare Σ del sistema ridotto, che conviene a date condizioni iniziali.

Conoscere Σ equivale naturalmente a conoscere il moto relativo dei tre corpi nel loro piano, con la specificazione che tale conoscenza deve, per la stessa genesi, essere riferita ad assi *aventi le solite direzioni variabili* Ox, Oy (Ox secondo la linea dei nodi, ecc.).

In queste condizioni, la determinazione delle variabili oblique ϑ e ψ esige ancora soltanto una quadratura. Più precisamente l'inclinazione ϑ è data dalla equazione in termini finiti (24), ossia, potendosi senza riserva dividere per K (§ 1), da

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{M}}{K}.$$

Della longitudine del nodo risulta invece conosciuta, a norma della (26), la derivata

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} I_x,$$

donde ψ con una quadratura. L'espressione di $\dot{\psi}$ mette in luce il notevole fatto qualitativo che tale derivata è essenzialmente positiva, talchè *la linea dei nodi ruota sempre nel medesimo verso, positivo rispetto ai nostri assi sinistrorsi, attorno al momento risultante* **K**. *Se, come usano gli astronomi, si adottassero assi destrorsi, varrebbe la conclusione che la linea dei nodi va incessantemente retrogradando.*

Un po' meno semplice riesce il calcolo di ψ, qualora del sistema ri-

www.rcin.org.pl

dotto si supponga ancora conosciuta una soluzione Σ, però con referenza ad assi fissi $O\xi\eta$, anzichè paralleli ad Ox, Oy.

In tal caso tutti gli elementi intrinseci della configurazione dei tre corpi, in particolare per es. l'area τ del loro triangolo e con essa [formula (2)] il determinante D, risultano funzioni note di t. Del pari i momenti di inerzia I_ξ, I_η rispetto agli assi $O\xi$, $O\eta$, e così il relativo prodotto di inerzia λ: non altrettanto può dirsi invece di I_x, che dipende dall'orientazione tuttora incognita ψ dell'asse Ox rispetto al riferimento fisso. Tuttavia, avendosi dalla teoria dei momenti di inerzia,

$$I_x = I_\xi \cos^2 \psi + I_\eta \sin^2 \psi - 2\lambda \cos \psi \sin \psi ,$$

la (26) diviene

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} (I_\xi \cos^2 \psi + I_\eta \sin^2 \psi - 2\lambda \cos \psi \sin \psi) , \tag{37}$$

dove tutti i coefficienti sono a risguardarsi funzioni note di t. La determinazione di ψ si trova pertanto ricondotta alla integrazione della equazione di prim'ordine (37).

15. - Si toglie una inessenziale restrizione circa l'intervallo di tempo, cui è lecito riferirsi.

Importa rilevare che, *fino a che il moto dei tre corpi segue con regolarità, il sistema ridotto* (36) *cui siamo in definitiva pervenuti, e così il precedente sistema* (20), *e le relazioni invarianti* (24) *e* (26), *definienti* ϑ *e* ψ, *rimangono validi per qualunque* t, non ostante l'originaria restrizione del § 1, a norma della quale tutte le nostre deduzioni dovevano intendersi limitate ad un intervallo di tempo, in cui il piano dei tre corpi non coincide mai col piano invariabile.

Si osservi infatti che, se t_1 è un istante (necessariamente isolato per le premesse dello stesso § 1) in cui si presenta la eventualità suaccennata:

1) le (36), (20), (24), (26) devono essere verificate sia per $t < t_1$, che per $t > t_1$;

2) esse non presentano per $t = t_1$, cioè per il fatto che si annulla l'inclinazione, alcuna singolarità:

3) le due soluzioni del problema piano, valide rispettivamente prima e dopo dell'istante t_1, debbono riattaccarsi con continuità; così i due valori di ψ e di ϑ (quest'ultimo attraverso lo zero).

www.rcin.org.pl

Tanto basta ad assicurare che, per ognuno dei sistemi in questione, si tratta necessariamente della continuazione analitica di una stessa soluzione, c. d. d.

16. - Moto medio di ψ in corrispondenza ad una soluzione periodica del sistema ridotto.

L'osservazione del precedente § rende legittima l'applicazione delle nostre equazioni anche ad eventuali indagini di comportamento asintotico.

Occupiamoci in particolare della funzione $\psi(t)$, nell'ipotesi che sia periodica la soluzione Σ del sistema ridotto, che si suppone conosciuta.

Se si tratta di periodicità rispetto agli assi Oxy (se cioè sono le coordinate x_ν, y_ν funzioni periodiche di t), allora anche ψ risulta, per la (26), funzione periodica di t. Si può anzi aggiungere, pensando allo sviluppo di questa funzione in serie di FOURIER, che certamente vi figurerà un termine secolare μ (indipendente da t), poichè la funzione si mantiene sempre positiva, e quindi ha un valore medio μ diverso da zero. In tal caso la ψ possiede un *effettivo moto medio* μ.

Qualora invece la periodicità di Σ sia relativa agli assi $O\xi\eta$, allora risultano funzioni periodiche di t i coefficienti della (37). Non esiste più in generale moto medio effettivo, ma si ha sempre un *moto medio asintotico*, cioè un limite determinato μ per il rapporto ψ/t al crescere indefinito di t [11].

Analoga conclusione si ha, se la periodicità di Σ si riferisce più generalmente ad assi OXY ruotanti (rispetto agli assi fissi $O\xi\eta$) con velocità angolare Ω *costante, ovvero avente lo stesso periodo della* Σ. Ecco come lo si constata.

Sia χ l'anomalia della linea dei nodi Ox rispetto agli assi OXY, e quindi $\dot\chi$ la sua velocità angolare. Si ha manifestamente

$$\dot\chi = \dot\psi - \Omega\,, \tag{38}$$

ossia, per la (26),

$$\dot\chi = -\,\Omega + \frac{K}{D} I_x\,.$$

Esprimendo I_x per mezzo dei momenti e prodotto d'inerzia A, B, p

[11] Cfr. la mia memoria *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire*, « Annales de l'École Normale Supérieure », 3ᵉ série, t. 28, 1911, pp. 325-376 [in questo vol.: XVI, pp. 205-252].

www.rcin.org.pl

relativi alla coppia OX, OY, risulta

$$\dot{\chi} = -\Omega + \frac{K}{D}(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi - 2p\cos\chi\sin\chi),$$

od anche

$$\dot{\chi} = \left(\frac{K}{D}A - \Omega\right)\cos^2\chi + \left(\frac{K}{D}B - \Omega\right)\sin^2\chi - 2\frac{K}{D}p\cos\chi\sin\chi, \tag{39}$$

che ha proprio lo stesso tipo della (37), dovendovisi risguardare A, B, p, Ω, e quindi tutti e tre i coefficienti di $\cos^2\chi$, $\sin^2\chi$, $\cos\chi\sin\chi$, funzioni periodiche di t. La χ ammette pertanto un moto medio asintotico $q = \lim_{t=0}\chi/t$. Detto $\overline{\Omega}$ il valor medio della funzione periodica Ω, si ha dalla (38) (integrando, dividendo per t e facendo poi crescere t indefinitamente)

$$\mu = q + \overline{\Omega}\,. \tag{40}$$

Il calcolo effettivo di μ è semplicissimo nel caso elementare in cui sono costanti Ω, A, B, p, e con essi i coefficienti della (39). Si può desumerlo da acconcia interpretazione geometrico-cinematica nel modo che segue:

Indicata con

$$Q = \tfrac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy)$$

una generica forma quadratica *definita, a coefficienti costanti*, si consideri il sistema canonico

$$\dot{x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{41}$$

e si noti:

1) che $Q = \text{cost.}$ è un integrale del sistema;

2) che dalle equazioni (41) segue

$$x\dot{y} - y\dot{x} = x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = 2Q; \tag{42}$$

3) che, interpretando x, y come coordinate cartesiane di un punto mobile e designando con ϱ e χ le corrispondenti coordinate polari, la

www.rcin.org.pl

(42) equivale a

$$\dot{\chi} = \frac{2Q}{\varrho^2} = a_{11}\cos^2\chi + a_{22}\sin^2\chi + 2a_{12}\cos\chi\sin\chi ;$$

4) che il moto del punto (x, y) definito dalle (41) avviene sopra un ellisse $Q = \text{cost.}$ con velocità areolare

$$\tfrac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = Q = \text{cost}\,.$$

Il tempo impiegato a descrivere l'intera ellisse vale in conformità

$$\frac{\text{Area dell'ellisse}}{Q} = \frac{1}{Q}\pi\cdot\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{a_{11}}{2Q} & \frac{a_{12}}{2Q}\\ \frac{a_{21}}{2Q} & \frac{a_{22}}{2Q}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \tag{42'}$$

dove si designa al solito con a il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, e il radicale si intende preso in valore assoluto.

Ne viene che l'anomalia χ, la quale a norma della (42') varia sempre nello stesso senso, aumenta o diminuisce di 2π, ogniqualvolta t aumenta di $2\pi/\sqrt{a}$. Questo assicura che il limite del rapporto χ/t non può differire da $\pm\sqrt{a}$, valendo naturalmente il segno $+$ quando χ cresce sempre, ossia quando è positiva la forma definita Q, e il segno $-$ nel caso opposto. Si ha dunque, con tale avvertenza circa il doppio segno, il moto medio $q = \pm\sqrt{a}$.

Questa conclusione si applica alla (39) nel caso di A, B, p, Ω costanti, semprechè la forma del secondo membro riesca definita, semprechè cioè, prendendo

$$a_{11} = \frac{K}{D}A - \Omega, \quad a_{22} = \frac{K}{D}B - \Omega, \quad a_{12} = -\frac{K}{D}p,$$

e notando che D può anche presentarsi sotto la forma $AB - p^2$, risulti

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{K}{D}\{K - (A + B)\Omega\} + \Omega^2 > 0\,. \tag{43}$$

La espressione (40) del moto medio (assoluto) diviene in tal caso

$$\mu = \pm\sqrt{a} + \Omega\,, \tag{40'}$$

www.rcin.org.pl

dove si deve prendere il segno superiore o l'inferiore, secondochè la forma in questione è positiva o negativa.

17. - Caso in cui i tre corpi si scostano poco da un piano fisso. Moto medio del nodo per le soluzioni prossime alle triangolari di Lagrange.

Le considerazioni che precedono possono in particolare applicarsi al caso in cui i tre corpi si scostano poco da un piano fisso. Prossimo a questo è allora necessariamente anche il piano invariabile, sicchè si può supporre senz'altro che i tre corpi si scostino poco dal piano invariabile, precisando l'ipotesi nel senso che l'inclinazione ϑ possa trattarsi (per qualunque t) come quantità di prim'ordine, trascurandosi tutto ciò che è, rispetto a ϑ, d'ordine superiore al primo.

In tale condizione (cfr. § 11) riesce trascurabile il divario fra il moto dei tre corpi nel loro piano e quello delle loro proiezioni sul piano invariabile, sicchè il problema ridotto si confonde col problema piano.

Si confondono pure $\cos\vartheta$ coll'unità, $\mathfrak{M}$ con K, di guisachè la

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{M}}{K},$$

non è più atta ad individuare ϑ, ma diviene una pura identità.

Comunque, *si può trar partito da ogni soluzione nota Σ del problema piano (dei tre corpi) per desumerne ∞^1 soluzioni non piane* ($\vartheta \neq 0$), richiedendosi all'uopo al più una equazione di Riccati ([12]) per la determinazione di ψ, e una quadratura per la ϑ. Quest'ultima deve infatti (dal momento che la (24), in prima approssimazione, costituisce una semplice identità) ricavarsi dalla (27), ossia (colla stessa approssimazione) da

$$\dot{\vartheta} = \frac{K}{D} J\vartheta,$$

la quale porge

$$\vartheta = e^{\int (K/D) J\, dt},$$

introducendo una costante moltiplicativa (arbitraria purchè infinitesima). Un'altra costante è, a dir vero, introdotta nell'espressione di ψ dall'in-

([12]) Tale è infatti la (37), come tosto si riconosce assumendo per funzione incognita $e^{i\psi}$; e lo è pure la (39). Quando poi la Σ fosse conosciuta addirittura con referenza agli assi Oxy, allora, a norma della (26), basta una quadratura, come dal § 14.

www.rcin.org.pl

tegrazione dell'equazione che serve a definirla [(26), (37) o (39), a norma dei casi], ma si tratta di una costante inessenziale, che corrisponde ad un semplice mutamento di orientazione della coppia fissa $O\xi\eta$ nel piano invariabile. Ecco perchè è giustificata l'affermazione che ogni soluzione piana Σ dà luogo a ∞^1 soluzioni non piane.

Quando la Σ è periodica, valgono naturalmente le considerazioni del precedente §, e si ritrova così il risultato già noto ([13]) che tutte le ∞^1 soluzioni ad essa subordinate posseggono uno stesso moto medio asintotico μ del nodo.

Diamo un esempio di effettiva determinazione di μ, assumendo quale Σ una delle soluzioni triangolari di LAGRANGE.

Più precisamente riferiamoci al caso tipico in cui i tre corpi costituiscono un triangolo equilatero di grandezza costante, che ruota uniformemente attorno al baricentro O. La velocità angolare Ω è data, come si sa ([14]), da

$$\Omega^2 = \frac{\mathrm{f}m}{\Delta^3},$$

(Δ lato del triangolo; $m = m_0 + m_1 + m_2$; f costante di attrazione). Attesa la definizione di momento, essa è necessariamente sinistrorsa rispetto al momento risultante $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto; quindi (§ 1) positiva rispetto ai nostri assi di riferimento. Prendiamo in particolare assi OXY solidali col triangolo. Essi ruoteranno colla detta velocità angolare *costante* Ω, risultando pure *costanti* i relativi momenti e prodotto d'inerzia A, B, p delle tre masse. Detta ϱ_ν la distanza baricentrale della massa P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$, sarà manifestamente

$$K = Q \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu \varrho_\nu^2 = (A + B)\Omega \,.$$

La (43) diviene in conformità

$$a = \Omega^2 \tag{43'}$$

([13]) Cfr. L. TREVISANI, *Sul moto medio dei nodi nel problema dei tre corpi*, in questi Atti, t. LXXI, 1912, pp. 1089-1137. A titolo d'esempio è ivi determinato il valore numerico di μ per le soluzioni prossime alle rettilinee di LAGRANGE. Si noti che un tal caso non si potrebbe trattare colle più comprensive formule della presente memoria, le quali poggiano sull'ipotesi preliminare che i tre corpi costituiscano un effettivo triangolo.

([14]) LAPLACE, *Oeuvres*, t. IV, p. 311. Altra deduzione, pure semplicissima, delle soluzioni in questione si trova nella memoria *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*, «Prac matematyczno-fizycznych», t. XVII (Varsavia, 1906), p. 32 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXVII, pp. 465-502].

www.rcin.org.pl

con che, a risultando positivo, si trovano soddisfatte tutte le condizioni, di cui al precedente §, per l'applicabilità della formula (40')

$$\mu = \pm \sqrt{a} + \Omega .$$

Va preso il segno superiore perchè la forma di coefficienti

$$a_{11} = \frac{K}{D} A - \Omega, \qquad a_{22} = \frac{K}{D} B - \Omega, \qquad a_{12} = -\frac{K}{D} p ,$$

definita in virtù della (43'), è positiva.

Ciò risulta dall'osservare che

$$a_{11} + a_{22} = \frac{K(A+B)}{D} - 2\Omega$$

$$= \frac{\Omega}{D}\{(A+B)^2 - 2D\} = \frac{\Omega}{D}(A^2 + B^2 + 2p^2) > 0 .$$

Si ha quindi dalla (43')

$$\mu = 2\Omega ,$$

ossia: *il moto medio della linea dei nodi è doppio della velocità angolare con cui ruota il triangolo dei tre corpi.*

www.rcin.org.pl