AGGIUNTA ALLA NOTA SULLE CORRISPONDENZE (p, p) NELLE CURVE DI GENERE p.

(Estratto di una lettera del Dott. G. Scorza al Prof. C. Segre)

Nella mia Nota: *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » vol. XXXV) ho lasciata sospesa la questione delle corrispondenze *speciali* (5,5) di valenza 1 esistenti sulle curve di genere 5, credendola più difficile di quel che in realtà essa non fosse.

Ecco infatti come essa si può risolvere in modo breve e semplice.

1. Se sopra una curva del genere 5 esiste una corrispondenza speciale (5,5) di valenza 1 (¹), ogni punto X della curva, preso insieme ai suoi cinque punti Y corrispondenti, dà un gruppo di una serie speciale (completa) g_6^2 della curva, e ogni punto Y, preso insieme ai suoi cinque punti X corrispondenti, dà un gruppo di una seconda serie speciale (completa) G_6^2 appartenente alla curva medesima. Ne segue, che, se rappresentiamo la curva mediante una curva piana C del 6^0 ordine con cinque punti doppi e la g_6^2 mediante la serie segata su C dalle rette del suo piano, le quintuple di punti Y corrispondenti ai varii punti X di C saranno situate su rette, passanti pei punti medesimi e costituenti un (*vero e proprio*) inviluppo Γ di 6ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con C.

I gruppi di tangenti di questo inviluppo, che passano pei varii punti del piano, formano una serie lineare, che ha per omologa sulla curva C precisamente la serie G_6^2 contenente le sestuple formate dai

(¹) Beninteso qui sono escluse le corrispondenze (5,5) di valenza 1, che si ottengono considerando una serie speciale g_6^1 della curva e chiamando omologhi di un punto X i cinque punti, che insieme ad esso ne completano un gruppo.

punti Y di C insieme ai relativi cinque punti X corrispondenti, perchè se Y è un qualunque punto di C le sei rette dell'inviluppo che passano per Y sono appunto le sei rette relative al punto Y e ai suoi cinque punti X corrispondenti. Quindi, se si considera la rete delle cubiche (aggiunte a C), che passano (fuori dei punti doppii) per due certi punti fissi P e Q di C e segnano su C la serie G_6^2, l'inviluppo Γ si può ottenere dalla curva C applicando a questa una determinata trasformazione doppia dei punti del piano di C nelle rette del piano medesimo, il piano doppio essendo il piano rigato.

Ora si osservi che quando si fa una tale trasformazione doppia le rette, che contengono uno dei loro punti corrispondenti formano un inviluppo, che in generale è soltanto della 5ª classe, perchè mentre una retta del piano rigato descrive un fascio la coppia di punti corrispondenti si muove sopra una cubica, segnando su di essa una g_2^1; dunque la nostra particolare trasformazione doppia è tale, che ogni retta contiene la coppia dei punti omologhi, e nasce dalla involuzione (di 8^0 ordine con sette punti tripli), generata dalla rete di cubiche, coordinando ad ogni punto del piano la retta che lo congiunge al suo coniugato.

Ne segue, che, per costruire il più generale inviluppo Γ di 6ª classe della specie cercata, si dovrà procedere nella maniera seguente.

Si prenderà una rete qualunque di cubiche aggiunte a C, poi si coordinerà ad ogni punto X di C la retta x, che lo congiunge al nono punto-base del fascio delle cubiche della rete, che passano per X, e la retta x, al variare di X sopra C, descriverà un inviluppo Γ (*che sarà proprio*) della 6ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con C. Dopo ciò Γ darà luogo su C a una corrispondenza speciale (5,5) di valenza 1.

Le corrispondenze (5,5) di valenza 1 così coordinate alla g_6^2 segnata su C dalle rette del piano sono pertanto ∞^2 e quindi:

Le corrispondenze speciali (5,5) *di valenza* 1 *esistenti sopra una curva del genere* 5, *che non nascono dalle serie* g_6^1 *speciali* (*incomplete*), *sono* ∞^4.

Si può osservare che le ∞^2 corrispondenze relative alla g_6^2 tagliata su C dalle rette del piano hanno tutte altrettante coppie involutorie nelle coppie di punti di C raccolte nei punti doppii: o, in altri termini (come del resto è ben naturale):

Le 10 coppie involutorie di una corrispondenza speciale (5,5) *di valenza* 1 (*della classe considerata*) *esistente sopra una curva di genere* 5 *si ottengono considerando le due quintuple di coppie neutre delle due serie lineari* g_6^2 *e* G_6^2 *coordinate alla corrispondenza medesima.*

2.- Anzi che rappresentare la curva di genere 5 mediante una curva piana del 6^0 ordine con cinque punti doppii, si può rappresentarla con la curva C^8 (speciale normale) dell'8^0 ordine di S_4 intersezione completa di tre quadriche e allora è facile (dopo le cose dette) costruire direttamente su questa la corrispondenza speciale (5,5) di valenza 1 coordinata a due date serie speciali (complete) g_6^2 e G_6^2 di C^8, ossia a due sue date corde AB e $A'B'$.

Infatti si proietti la C^8 dalla sua corda AB sopra un piano π. Il risultato della projezione sarà una curva del 6^0 ordine con cinque punti doppii nei cinque punti di incontro del piano π con gli S_2 quadrisecanti di C^8 che escono dalla corda AB; e quindi se si osserva al sistema lineare ∞^4 delle cubiche passanti per quei cinque punti e alla corrispondenza (omografica) che viene spontaneamente stabilita dalla C^8 fra le sue curve e gli iperpiani dell'S_4, si potrà affermare che la C^8 è situata sopra una V_2^4 di S_4 contenente la corda AB, le cinque corde di C^8 congiungenti gli ulteriori punti di intersezione della curva con gli S_2 quadrisecanti uscenti da AB e infine le 16 corde di C^8 congiungenti gli ulteriori punti di intersezione della curva medesima con gli iperpiani contenenti a coppie i precedenti S_2.

Ciò posto (senza fermarci a riportare proprietà notissime per la configurazione di queste sedici corde di C^8), siano: X un punto qualunque di C^8 e Z l'ulteriore punto di intersezione di questa V_2^4 col piano $A'B'X$. L'iperpiano $ABXZ$ taglia C^8 fuori di A, B, X, in cinque punti $Y_1, \ldots, Y_5$, che corrispondono a X in una corrispondenza (5,5) di valenza 1 della specie richiesta.

Infatti (per verificare che ad ogni punto Y corrispondono cinque punti X) si incominci dall'osservare, che i cinque punti Y corrispondenti ad un dato punto X di C sono le ulteriori intersezioni di C^8 con una cubica gobba di V_2^4 passante per X, situata in un iperpiano passante per AB e secante il piano $A'\,B'\,X$ nei punti X e Z.

Ora gli iperpiani passanti per la corda AB secano V_2^4 (oltre AB) in una rete di cubiche gobbe, ciascuna delle quali taglia in tre punti ogni quartica gobba ottenuta secando V_2^4 con un iperpiano passante per $A'B'$: quindi, se Y è un punto qualunque (di V_2^4, in particolare di) C^8, una qualunque delle ∞^1 quartiche gobbe di V_2^4 passanti per $A'B'Y$ è tagliata dal fascio delle cubiche di detta rete passanti pel punto Y nei gruppi di una sua determinata g_2^1. Ne segue che se Y' è l'ulteriore intersezione di V_2^4 col piano $A'\,B'\,Y$, la quartica gobba, che si ottiene secando V_2^4 coll'iperpiano (passante per $A'B'$ e) tangente nel punto Y alla cubica gobba sezione ulteriore di V_2^4 coll'iperpiano $ABYY'$, è tagliata dalle cubiche gobbe considerate nella serie g_2^1 segnata su di essa dagli S_2 uscenti da $A'B'$ e appartenenti all'iperpiano che la contiene: dunque i punti X corrispondenti a Y sono i cinque punti $X_1, \dots, X_5$, nei quali questa quartica sega C fuori di Y, A', B'.

3. Il metodo qui seguito per le curve di genere 5, che del resto è una naturale estensione di quello già seguìto nella mia nota per le curve di genere 4, si può applicare con successo anche per la determinazione delle corrispondenze speciali (6,6) esistenti sulle curve di genere 6.

Infatti esiste sopra una curva del genere 6 una corrispondenza speciale (6,6) di valenza 1 [1] (non generata da una g incompleta) e siano g_7^2 e G_7^2 le serie lineari speciali (complete) coordinate nel solito modo alla corrispondenza medesima. Rappresentando la curva, mediante la g_7^2, con una curva piana C del 7^0 ordine dotata di nove punti doppii, si avrà, come prima, che la corrispondenza (6,6) considerata si otterrà sopra C per mezzo di un certo inviluppo Γ della 7^a classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con C, e che la corrispondenza intercedente fra C e Γ sarà contenuta in una trasformazione multipla del piano punteggiato nel piano rigato, per la quale i fasci del piano rigato vengono mutati nelle quartiche (aggiunte a C) della rete segnante su C la serie G_7^2.

In questa trasformazione i punti di C stanno sulle rette omologhe, dunque nella omografia stabilita dalla trasformazione medesima fra i punti del piano rigato (concepiti come centri di fasci di raggi) e le quartiche della rete, i punti di C appartengono alle quartiche corrispondenti. Ora in una omografia stabilita fra i punti di un piano e le quartiche di una rete del piano medesimo solo i punti di una curva del 5^0 ordine appartengono in generale alle quartiche corrispondenti, dunque nel nostro caso tutti i punti del piano stanno sulle quartiche corrispondenti, ossia nella trasformazione multipla ogni retta contiene il gruppo dei suoi punti omologhi [2].

Ne segue che la serie caratteristica della rete di quartiche segnanti la G_7^2 è una serie speciale e (non potendo essere una g_4^1, chè altrimenti essa non sarebbe completa) precisamente una g_3^1: ossia la rete di quartiche è sovrabbondante ed ha 13 punti-base (dei quali uno è fuori di C).

(1) Come pel caso del genere 5, si vede subito con considerazioni analoghe a quelle della mia nota, che questo è l'unico caso da considerare.

(2) Questo stesso ragionamento (estendibile a tutti i valori di p) avremmo potuto utilizzare per l'analoga conclusione nel caso $p = 5$.

Ora, allorchè si ha un sistema lineare ∞^3 di quartiche con 11 punti base, le coppie di punti del piano, per le quali passa una rete anzichè un fascio di curve del sistema, formano [1] una curva del 7^0 ordine con 11 punti doppii negli 11 punti-base, dunque la rete di quartiche aggiunte a C che segna la nostra G_7^2 ha sopra C 12 punti base dei quali (nove sono i punti doppii di C e altri) due sono perfettamente arbitrarii.

D'altra parte data una rete sovrabbondante di quartiche aggiunte a C con 12 punti-base su C è subito costruita una corrispondenza speciale (6,6) di valenza 1 coordinata alla g_7^2 segnata su C dalle rette del piano e alla G_7^2 segnata su C da quella rete : dunque:

« *Le corrispondenze speciali* (6,6) *di valenza* 1, *non generate da serie* g_7^1 *speciali incomplete, esistenti sulle curve di genere* 6, *son* ∞^5 ».

Come Ella vede, il metodo si può estendere anche a valori superiori del genere, ma non pare che esso basti a esaurire la questione per valori molto elevati, nei quali è dubbio se esistono corrispondenze speciali di valenza superiore a 1 e se esistono corrispondenze speciali di valenza 1 coordinate a serie lineari di dimensione superiore a 2.

Pisa, 28 Febbraio 1901.

[1] Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen*, ecc. « Math. Ann. », Bd. 1; Caporali, *Sopra i sistemi triplamente infiniti di curve algebriche piane*, Collect. Math. in mortem D. Chelini, Milano 1881.