SOPRA LE CURVE CANONICHE DI UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE E SOPRA CERTI LORO COVARIANTI QUARTICI

In una nota precedente [1], pubblicata in questi Atti, abbiamo dimostrato che sopra l'ente algebrico semplicemente infinito di genere p a moduli generali esistono solo $2^{p-1}\,(2^p + 1)$ corrispondenze simmetriche $(p\,,p)$ prive di coincidenze. E nel caso particolare $p = 3$ abbiamo fatto osservare che, rappresentato l'ente algebrico sopra una quartica piana, le 36 corrispondenze $(3\,,3)$ simmetriche e prive di coincidenze situate sull'ente si ottengono subito considerando le 36 quartiche di cui quella data è covariante S [2]. Ora è importante stabilire che un qualche cosa d'analogo vale anche pel caso di $p\,(> 3)$ qualunque, quando si rappresenti l'ente di genere p sopra una curva (*canonica*) di genere p e ordine $2\,p - 2$ di S_{p-1}.

Così insieme a una nuova proprietà delle curve canoniche si ottiene anche una definizione proiettiva assai semplice delle corrispondenze in questione [3].

1. Consideriamo una delle $2^{p-1}\,(2^p + 1)$ corrispondenze simmetriche $(p\,,p)$ prive di coincidenze esistenti sopra una curva d'ordine

(1) Scorza, *Sopra le corrispondenze (p,p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXXV, 1900. Indicheremo questa Nota colla lettera N. tutte le volte che ci occorrerà citarla.

(2) Scorza, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali*, « Math. Ann. », Bd. 52.

(3) Un'altra caratterizzazione di queste corrispondenze si ha rappresentando l'ente algebrico di genere p sopra una curva piana e considerando certi sistemi di curve (aggiunte) di contatto (cfr. per $p = 3$: Pascal, *Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti*, « Ann. di Mat. », serie II, t. XVII), e noi vi abbiamo già alluso nella N. al n. 12; ma crediamo inutile insistervi e perchè immediata e perchè assai meno notevole, sembra, di quella contenuta nelle pagine seguenti.

$2p-2$ e genere p, C_p^{2p-2}, dello spazio S_{p-1}, a $p-1$ dimensioni, e, per chiarezza, indichiamola con Σ. Poi diciamo *relativo* a un punto x di C_p^{2p-2} il p-gono storto che ha per vertici i p punti y', y'' ... $y^{(p)}$ corrispondenti a x per Σ.

Si ha subito:

Se un punto y' di C_p^{2p-2} è un vertice del p-gono relativo al punto x, x è un vertice del p-gono relativo ad y', e le faccie opposte ad y' e x in questi due p-goni coincidono (¹).

Infatti la corrispondenza Σ è simmetrica e i $2p-2$ punti, che si ottengono dai corrispondenti di x e y', escludendo questi punti medesimi formano un gruppo della serie canonica (²), che è tagliata su C_p^{2p-2} dagli iperpiani di S_{p-1}.

Ne segue che se per un punto di C_p^{2p-2} passa una faccia del p-gono relativo a un punto x, o x o il vertice opposto nel p-gono a quella faccia è vertice del p-gono relativo al punto considerato, e quindi:

Il sistema ∞^1 di iperpiani, Γ, costituito dalle faccie dei p-goni relativi ai punti di C_p^{2p-2} è della classe $p(p-1)$.

2. Il genere di Γ si trova subito senza alcuna difficoltà.

Osserviamo perciò che tra i punti di C_p^{2p-2} e gli iperpiani di Γ è stabilita una corrispondenza $(2, p)$, se si dicono omologhi un punto di C_p^{2p-2} e un iperpiano di Γ quando questo è una delle faccie del p-gono relativo a quello. Sopra Γ non si hanno elementi di diramazione perchè Σ è priva di coincidenze; invece il numero dei punti di diramazione di C_p^{2p-2} è dato dal numero dei punti uniti della corrispondenza che si ottiene sopra C_p^{2p-2} dicendo omologhi due punti che siano vertici di un medesimo p-gono della ∞^1. Ora questa corrispondenza è una $[p(p-1), p(p-1)]$ simmetrica di valenza $p-1$ (³), dunque possiede $4p(p-1)$ punti uniti, e tale è il nu-

(¹) Si osservi che i p punti corrispondenti a x per Σ non formano *mai* un gruppo speciale (N., n. 8), quindi il p-gono relativo ad x ha sempre p faccie ben determinate.

(²) N., n. 10.

(³) In generale, dimostriamo che:

Fra due punti y' e y'' di una curva algebrica corrispondenti a un punto x in una corrispondenza (α, β) di valenza γ, esistente sulla curva, passa una corrispondenza simmetrica $[\alpha(\beta-1), \alpha(\beta-1)]$ di valenza $\alpha-\gamma^2$.

Infatti diciamo $x_1, x_2 \dots x_\alpha$ gli α punti x corrispondenti ad y', e $y', y_i'' \dots$ $\dots y_i^{(\beta)}$ i β punti corrispondenti ad x_i $(i = 1, 2 \dots \alpha)$ nella corrispondenza (α, β). Detto p il genere della curva, $u_1, u_2 \dots u_p$ i p integrali normali di 1ª specie mero dei punti di diramazione della $(2, p)$ esistenti su C_p^{2p-2}. Ne segue, applicando una ben nota formula di ZEUTHEN (1), che:

Il sistema Γ è del genere $\dfrac{3p(p-1)}{2}+1$ (2).

3. Siano x ed x_1 due punti qualunque di C_p^{2p-2} e siano $y', y'' \dots y^{(p)}$; $y'_1, y''_1, \dots y_1^{(p)}$ i vertici dei p-goni ad essi relativi. Sappiamo (3) che i punti x ed x_1 insieme a un gruppo qualunque della serie canonica costituiscono un gruppo corresiduale al gruppo dei punti $y', y'' \dots y^{(p)}$, $y'_1, y''_1 \dots y_1^{(p)}$, dunque, rammentando che la serie doppia della serie canonica è completa ed è tagliata su C_p^{2p-2} dalle quadriche di S_{p-1} (4), si ha che un iperpiano qualunque per la retta xx_1 taglia C_p^{2p-2} in altri $2p-4$ punti che insieme ai punti $y' \dots y^{(p)}\, y'_1 \dots y_1^{(p)}$ costituiscono la completa intersezione di C_p^{2p-2} con una quadrica. La serie tagliata su C_p^{2p-2} dagli iperpiani per la retta xx_1 è una g_{2p-4}^{p-3}, quindi per i $2p$ punti $y' \dots y^{(p)}, y'_1 \dots y_1^{(p)}$ passano $p-2$ quadriche linearmente indipendenti fra loro e dalle $\dfrac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriche linearmente indipendenti, che, come è noto, passano per C_p^{2p-2}.

Si conclude che per i $2p$ punti $y' \dots y^{(p)}, y'_1 \dots y_1^{(p)}$ passano $\infty^{\frac{p(p-3)}{2}}$ quadriche e che quindi ogni quadrica passante per $2p-1$ qualunque di essi passa anche pel rimanente.

esistenti su di essa, e indicate con π_k e ϱ_k $(k=1\dots p)$ delle costanti opportune si ha (HURWITZ, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* « Math. Ann. », Bd. 28):

$$u_k(y') + u_k(y''_i) + \dots + u_k(y_i^{(\beta)}) + \gamma\, u_k(x_i) \equiv \pi_k \qquad (k=1\dots p\,;\ i=1\dots \alpha)$$

$$u_k(x_1) + u_k(x_2) + \dots + u_k(x_\alpha) + \gamma\, u_k(y') \equiv \varrho_k \qquad (k=1\dots p);$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha}[u_k(y''_i) + \dots + u_k(y_i^{(\beta)})] + (\alpha-\gamma^2)\, u_k(y') \equiv \alpha\,\pi_k - \gamma\,\varrho_k \qquad (k=1\dots p).$$

Ora $y''_i \dots y_i^{(\beta)}$ $(i=1\dots\alpha)$ sono appunto gli omologhi di y' nella detta corrispondenza $[\alpha(\beta-1), \alpha(\beta-1)]$, dunque ecc.

(1) ZEUTHEN, *Nouvelle démonstration des théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes*, « Math. Ann. », Bd. 3.

(2) In particolare per $p=3$ si ha che il cosiddetto contravariante ψ di una quartica piana è di classe 6 e genere 10: quindi si scrivono subito le sue caratteristiche plückeriane. — Cfr. CIANI, *Sopra due curve invariantive della quartica piana*, « Ann. di Mat. », t. XX, 1892.

(3) N., n. 10.

(4) CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, « Rendiconti del Circ. matem. di Palermo », 1893.

Possiamo enunciare questo fatto dicendo che [1]:

I due p-goni relativi a due punti x ed x_1 di C_p^{2p-2} sono autoreciproci per una medesima quadrica.

4. Ciò posto tagliamo C_p^{2p-2} con un iperpiano qualunque e consideriamo i p-goni relativi ai $2p-2$ punti di intersezione: le loro faccie formano una $2p(p-1)$-pla di iperpiani di Γ, che possiamo riguardare come corrispondente a quell'iperpiano; quindi la totalità ∞^{p-1}, $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$, delle $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ, che così si ottiene al variare dell'iperpiano secante C_p^{2p-2}, è una totalità razionale. Come tale *appartiene* [2] ad una serie lineare $g_{2p(p-1)}^r$ di Γ di dimensione $r > p-1$ [3].

Le ∞^1 $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ corrispondenti agli iperpiani passanti per un S_{p-3} costituiscono nella varietà lineare $g_{2p(p-1)}^r$ una varietà quadratica, poichè un iperpiano di Γ fa parte delle due $2p(p-1)$-ple corrispondenti agli iperpiani passanti per l'S_{p-3} e per i due punti di C_p^{2p-2} aventi una faccia del relativo p-gono nel considerato iperpiano di Γ: dunque una qualunque delle ∞^r varietà ∞^{p-2} tagliate su $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ dalle varietà lineari $g_{2p(p-1)}^{r-1}$ di $g_{2p(p-1)}^r$ è rappresentata, nella rappresentazione di $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ sugli iperpiani di S_{p-1}, dagli ∞^{p-2} iperpiani di S_{p-1} tangenti a una quadrica-inviluppo. Le ∞^r quadriche-inviluppo che così si ottengono formano naturalmente un sistema lineare e si ha $r \leq \frac{(p-1)(p+2)}{2}$, perchè tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1} sono appunto $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$.

Or si consideri la $2p(p-1)$-pla di iperpiani corrispondente a un iperpiano di Γ. Essa si spezza in due $p(p-1)$-ple di iperpiani passanti rispettivamente pei due punti di C_p^{2p-2} che hanno nel considerato iperpiano di Γ una faccia dei relativi p-goni: dunque (ricordando che gli iperpiani di S_{p-1} passanti per due punti fissi costituiscono una quadrica-inviluppo $p-2$ volte specializzata) la serie lineare $g_{2p(p-1)}^r$ ha ∞^1 gruppi comuni colla serie lineare $g_{2p(p-1)}$ d'or-

[1] Castelnuovo, *Su certi gruppi associati di punti*, « Rendic. del Circ. mat. di Palermo », 1889.

[2] Con la parola *appartenere* intendiamo significare, secondo l'uso, che la totalità $\gamma_{2p(p-1)}^{p-1}$ è contenuta nella serie lineare $g_{2p(p-1)}^r$ e non in una serie lineare di dimensione inferiore.

[3] Enriques, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, « Rendic. del Circ. mat. di Palermo », 1896.

dine $2p(p-1)$ determinata su Γ da tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}.

Ma le coppie di punti di C_p^{2p-2} omologhi nella corrispondenza Σ, considerate come quadriche-inviluppo di S_{p-1} $p-2$ volte specializzate, dànno una ∞^1 di quadriche *appartenente* al sistema totale $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ delle quadriche-inviluppo di S_{p-1}, poichè altrimenti esisterebbe almeno una quadrica-luogo rispetto a cui sarebbero coniugate tutte quelle coppie [1], e i punti corrispondenti per Σ a un punto di C_p^{2p-2} sarebbero situati almeno in un iperpiano, quindi possiamo concludere che $g^r_{2p(p-1)}$ è proprio della dimensione $r=\dfrac{(p-1)(p+2)}{2}$ e coincide colla serie lineare determinata su Γ da tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}.

Abbiamo pertanto il teorema:

I $2p-2$ p-goni relativi ai punti di C_p^{2p-2} situati in un iperpiano sono circoscritti a una medesima quadrica di S_{p-1} [2].

5. Pel teorema ora dimostrato agli ∞^{p-1} iperpiani di S_{p-1} vengono coordinate le quadriche-inviluppo di un sistema ∞^{p-1} Λ appartenente al sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ di tutte le quadriche-inviluppo, e la corrispondenza fra gli iperpiani di S_{p-1} e le quadriche inviluppo, di Λ (al pari di quella fra gli iperpiani di S_{p-1} e le $2p(p-1)$-ple di iperpiani di Γ considerate) è tale, che alle ∞^{p-2} quadriche di Λ contenute in un sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-1}$ corrispondono gli ∞^{p-2} iperpiani di S_{p-1} tangenti a una quadrica.

Dunque il grado di Λ è 2^{p-1} e quella corrispondenza, considerati gli iperpiani di S_{p-1} come quadriche-luogo $p-1$ volte specializzate, è contenuta in una corrispondenza reciproca fra il sistema

[1] Come è noto, in S_{p-1} ad ogni sistema lineare ∞^s di quadriche-inviluppo è *associato* un sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-s-1}$ di quadriche-luogo così che ogni quadrica del primo sistema è coniugata ad ogni quadrica del secondo.

[2] Pel caso $p=3$ cfr. Ciani, *Sopra la corrispondenza polare fra coniche-inviluppo e coniche-luogo stabilita da una quartica piana*, « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », 1895.

lineare di tutte le quadriche-luogo di S_{p-1} e il sistema di tutte le quadriche-inviluppo dello spazio medesimo [1].

In tale reciprocità una quadrica-luogo spezzata in un iperpiano ξ di Γ contato due volte e la quadrica-inviluppo spezzata nella relativa coppia di punti x, y' di C_p^{2p-2} si corrispondono in doppio modo. Infatti una quadrica-luogo, spezzata in un iperpiano qualunque passante per x o per y', contato due volte, e quindi coniugata alla quadrica-inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y', ha per corrispondente una quadrica-inviluppo tangente all'iperpiano ξ, ossia coniugata alla quadrica-luogo spezzata nell'iperpiano ξ contato due volte. Ora il sistema lineare $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-1}$ di quadriche luogo coniugate a quella inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y' è determinato dalle due ∞^{p-2} (non lineari) di quadriche-luogo spezzate negli iperpiani delle due stelle x, y' contati ciascuno due volte, dunque può affermarsi, che in quella reciprocità ogni quadrica-luogo coniugata alla quadrica-inviluppo spezzata nella coppia di punti x, y' ha per quadrica-inviluppo corrispondente una quadrica coniugata a quella spezzata nell'iperpiano ξ contato due volte; ossia, può affermarsi che quelle due quadriche si corrispondono in doppio modo. Ora la varietà ∞^1 di quadriche-inviluppo costituite dalle coppie di punti omologhi di Σ *appartiene* al sistema di tutte le quadriche-inviluppo di S_{p-1}, dunque la reciprocità è involutoria, e, non potendo essere un sistema nullo, è una polarità.

Abbiamo pertanto il teorema:

La corrispondenza, che passa tra gli iperpiani di S_{p-1} e le quadriche-inviluppo inscritte nei p-goni relativi alle $2p-2$ intersezioni

[1] Per vedere questo, e il seguito, con tutta chiarezza giova riferire proiettivamente le quadriche-inviluppo e le quadriche-luogo di S_{p-1} ai punti e agli iperpiani di un $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, così che un punto e un iperpiano di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ si appartengano quando le relative quadriche di S_{p-1} sono coniugate. Allora il sistema Λ vien rappresentato da una $F_{p-1}^{2^{p-1}}$ di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ razionale normale (che per $p=3$ coincide colla notissima *superficie di* VERONESE) e il sistema degli iperpiani di S_{p-1}, considerati come quadriche-luogo $p-1$ volte specializzate, viene rappresentato da una $\Phi_{p-1}^{2^{p-1}}$ di iperpiani di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, pure razionale normale. Le due varietà $F_{p-1}^{2^{p-1}}$ e $\Phi_{p-1}^{2^{p-1}}$ saranno riferite biunivocamente così che alle sezioni iperpiane della prima corrisponderanno nella seconda le varietà di iperpiani passanti pei varii punti di $S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$, quindi si corrisponderanno in una reciprocità.

degli iperpiani medesimi con la curva C_p^{2p-2}, *è contenuta in una corrispondenza polare reciproca fra le quadriche-luogo e le quadriche-inviluppo di* S_{p-1}.

6. Dimostriamo che questa corrispondenza polare reciproca S è semplicemente una corrispondenza polare stabilita fra le quadriche-inviluppo e le quadriche-luogo di S_{p-1} da una certa forma quartica M_{p-2}^4 dello spazio medesimo.

Se $y_1', y_1'' \dots y_1^{(p)}$ è il p-gono relativo a un punto x_1 di C_p^{2p-2}, nella corrispondenza S alle quadriche-inviluppo spezzate nelle coppie di punti $x_1 y_1^{(i)}$ $(i = 1 \dots p)$ corrispondono rispettivamente le quadriche-luogo spezzate negli iperpiani congiungenti i punti $y_1' \dots y_1^{(i-1)}$ $y_1^{(i+1)} \dots y_1^{(p)}$ contati ciascuno due volte: dunque alla ∞^{p-2} lineare delle quadriche-inviluppo spezzate nel punto fisso x_1 e in un punto variabile nell'S_{p-1} corrisponde in S la ∞^{p-1} (lineare) delle quadriche-luogo aventi un p-edro polare nel p-edro $y_1' y_1'' \dots y_1^{(p)}$.

La corrispondenza (omografica) che intercede fra queste due ∞^{p-1} lineari può interpretarsi come una omografia fra i punti dell'S_{p-1} e le quadriche-luogo aventi $y_1' \dots y_1^{(p)}$ come p-edro polare, e allora, considerando una determinata [1] forma cubica delle ∞^{p-1} che hanno in $y_1' \dots y_1^{(p)}$ un p-edro polare, quella corrispondenza potrà caratterizzarsi dicendo che per essa alla quadrica-inviluppo, spezzata nel punto x_1 e in un punto variabile x di S_{p-1}, corrisponde la quadrica-luogo polare di x rispetto a quella forma cubica.

In questo modo ad ogni punto x_1 di C_p^{2p-2} vien collegata una forma cubica $M_{p-2}^{(1)}$, ed è chiaro che se ad x_1 è collegata la forma

(1) In una determinazione parametrica dei punti di S_{p-1} mediante coordinate, $y_1, y_2 \dots y_p$, prendiamo $y_1' \dots y_1^{(p)}$ come vertici della piramide fondamentale (ciò che è permesso, per una osservazione precedente circa l'indipendenza dei punti $y_1' \dots y_1^{(p)}$; allora il sistema lineare ∞^{p-1} di quadriche-luogo in discorso è rappresentato dall'equazione:

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 = 0, \tag{1}$$

e nell'omografia considerata, fra le quadriche del detto sistema e i punti di S_{p-1}, alla quadrica rappresentata dalla equazione (1) corrisponde un punto di coordinate $a_1 \lambda_1 \dots a_p \lambda_p$, $a_1 \dots a_p$ essendo delle costanti opportune.

Allora la forma cubica:

$$\frac{1}{a_1} y_1^3 + \dots + \frac{1}{a_p} y_p^3 = 0 \tag{2}$$

è appunto quella di cui si parla nel testo.

cubica $M^{(1)}_{p-2}$ e al punto x_2 la forma cubica $M^{(2)}_{p-2}$, la quadrica polare di x_1 rispetto ad $M^{(2)}_{p-2}$ è anche la quadrica polare di x_2 rispetto ad $M^{(1)}_{p-2}$. Infatti ambedue queste quadriche coincidono coll'unica che ha per p-edri polari i p-edri $y_1' y_1'' \dots y_1^{(p)}$ e $y_2' y_2'' \dots y_2^{(p)}$ relativi ad x_1 e x_2 rispettivamente.

Allora, presi p punti indipendenti di C_p^{2p-2} $x_1 \dots x_p$ e le relative forme cubiche $M^{(1)}_{p-2} \dots M^{(p)}_{p-2}$, consideriamo quella *determinata* forma quartica M^4_{p-2} di S_{p-1} rispetto a cui $M^{(i)}_{p-2}$ è appunto la prima polare del punto $x_i \, (i=1 \dots p)$, e consideriamo inoltre la corrispondenza polare S' da essa stabilita fra le quadriche-inviluppo e le quadriche-luogo di S_{p-1}. Tanto per S quanto per S', a tutte le quadriche-inviluppo spezzate nel punto fisso $x_i \, (i=1 \dots p)$ e in un punto variabile dell'S_{p-1} corrisponde la medesima quadrica-luogo: ora questi p sistemi lineari ∞^{p-1} di quadriche-inviluppo *appartengono* al sistema totale delle quadriche-inviluppo di S_{p-1} dunque S ed S' coincidono e la nostra asserzione è pienamente giustificata.

Possiamo dire pertanto:

Esiste una forma quartica M^4_{p-2} di S_{p-1} tale che rispetto ad essa ogni coppia di punti di C_p^{2p-2} corrispondenti per Σ ha per quadrica polare mista un iperpiano doppio: oppure, *tale che rispetto ad essa ogni punto di C_p^{2p-2} ha per prima polare una forma cubica con un p-edro polare nel p-gono relativo.*

7. Il teorema precedente coordina ad ogni C_p^{2p-2} di S_{p-1} $2^{p-1}(2^p+1)$ forme quartiche (particolari, se $p>3$, come subito si vede con un computo di costanti): quindi si presenta spontanea la questione di trovare le relazioni che legano queste forme fra di loro. Ma tale questione, certo assai attraente, pare assai difficile a risolvere [1].

Torino, 22 maggio 1900.

[1] Recentemente essa è stata affrontata dal sig. Ciani per $p=3$ in un caso particolare notevole. Le sue ricerche già annunziate nella Nota: *Un teorema sopra la quartica di* Klein («Rendic. del R. Ist. Lombardo di scienze e lettere», serie II, vol. XXXIII, 1900), usciranno prossimamente alla luce.