XXVII.

THÉORÈME DE TORRICELLI ET DÉBUT DE L'ÉCOULEMENT

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CLVII (1913),

pp. 481-484.

1. – La vitesse d'écoulement d'un liquide pesant par un (petit) orifice s'exprime, moyennant le théorème de TORRICELLI, sous la forme

$$v^2 = 2gh\,, \tag{1}$$

h étant le niveau de l'orifice au-dessous de la surface libre du liquide.

Depuis BERNOULLI, la démonstration qu'on en donne classiquement en Hydrodynamique [1] envisage le cas du régime permanent. Il n'est pas à ma connaissance qu'on ait signalé la validité de (1) aussi pour le début du mouvement, c'est-à-dire à l'instant où l'écoulement commence par la brusque ouverture d'un orifice dans la paroi d'un récipient contenant du liquide en repos. Je vais l'établir d'une manière bien élémentaire, en invoquant uniquement le théorème des forces vives. On constatera de la sorte (n. 3) que, quelle que soit l'étendue de l'orifice Ω, la formule (1) définit *rigoureusement* la vitesse initiale pour chaque élément $d\Omega$ (h se rapportant, bien entendu, à l'élément correspondant).

2. – Cette remarque fournit un renseignement, sans doute intéressant au point de vue pratique, mais encore très particulier sur l'état des vitesses prises par les particules liquides, immédiatement après l'ouverture de l'orifice. La question se pose de déterminer complètement ces vitesses initiales. Nous reconnaîtrons sans peine (n. 4) qu'analytiquement tout revient à un problème harmonique mixte pour l'intérieur du vase, la condition à l'orifice étant précisément la valeur torricellienne de v.

---

[1] Voir le Traité de M. P. APPELL, 2e édition, t. III, p. 371.

3. – Soient donc $d\Omega$ un élément de l'orifice, et v la valeur absolue de la vitesse avec la quelle se commence l'écoulement à travers $d\Omega$. v_n désignera la composante de cette vitesse suivant la normale extérieure à $d\Omega$.

Après un temps infiniment petit dt, il se sera écoulé, à travers $d\Omega$, une quantité élémentaire de liquide

$$dm = \mu\, d\Omega\, v_n\, dt\,,$$

en représentant la densité par μ.

Cette masse dm, qui était au repos avant l'ouverture, acquiert partant, pendant le temps très court dt, la force vive

$$\tfrac{1}{2}\, dm v^2\,. \tag{2}$$

Au moment même de l'ouverture, dm se trouvait à l'intérieur du vase, affectant une forme prismatique (aux infiniment petits d'ordre supérieur près). Il nous suffit d'ailleurs de retenir que sa surface terminale était nécessairement constituée par $d\Omega$, soumise à la pression atmosphérique p_0, et par une portion complémentaire $d\Omega_1$, sur laquelle agissait la pression

$$p_1 = p_0 + \mu g h\,,$$

correspondant au régime hydrostatique du récipient.

La résultante de ces pressions équivaut clairement à une force

$$(p_1 - p_0)\, d\Omega = \mu\, gh\, d\Omega\,,$$

dirigée normalement à $d\Omega$ (vers l'extérieur). Vis-à-vis d'elle, le poids de l'élément dm,

$$g\, dm = \mu g\, d\Omega \cdot v_n\, dt\,,$$

peut être négligé. Le travail, accompli pendant dt par toutes les forces agissantes sur dm, est par suite

$$\mu g h\, d\Omega \cdot v_n\, dt = dm \cdot gh\,. \tag{3}$$

Le théorème des forces vives exprime l'égalité entre (2) et (3), d'où la formule (1). C. q. f. d.

4. – On a ainsi la valeur absolue de la vitesse initiale dans un point quelconque de l'orifice. Il reste à déterminer sa direction, et, plus généralement, toute la distribution des vitesses initiales à l'intérieur du vase. On s'appuie pour cela sur la circonstance que la production instantanée (²) des vitesses, dans les conditions supposées, est un phénomène conservatif. Il n'exige en effet que la brusque ouverture d'un orifice, parfaitement réalisable (du moins en théorie), sans dépense d'énergie. Dès lors, les vitesses initiales communiquées au liquide doivent admettre un potentiel φ, fonction harmonique (à cause de l'incompressibilité) et régulière à l'intérieur du vase.

Les conditions à la frontière sont:

a) $d\varphi/dn = 0$ sur les parois du vase (n indiquant évidemment la direction normale;

b) $(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 = 2gh$ en tout point de Ω, d'après ce qu'on vient de dire;

c) $\varphi = 0$ sur la surface libre supérieure du liquide. On se rend compte de cette dernière condition en ayant égard à l'interprétation de $\mu\varphi$. C'est, comme on sait (³), la pression de percussion due à la discontinuité φ du potentiel des vitesses. Or toute surface libre est constamment soumise à la pression atmosphérique; elle ne peut, par conséquent, ressentir aucune pression de percussion; d'où $\varphi = 0$.

5. – Il ne sera peut-être pas inutile d'avertir que la même condition (pression exactement égale à la pression atmosphérique) ne subsiste pas à l'orifice *pendant l'ouverture*, mais seulement *immédiatement aprés*, dès que s'est établi le régime des vitesses initiales correspondant au potentiel φ. La justification intuitive de cette distinction apparaît aisément pourvu qu'on fasse attention aux circonstances réelles du phénomène envisagé. Nous sommes passé à la limite, en considérant comme instantanés l'ouverture de l'orifice et l'etablissement des vitesses initiales. En fait, ils ont une durée très courte, mais finie, et dans ce bref délai il se produit quelque chose d'extrêmement compliqué, qui ne laisse pas apercevoir, même schématiquement, l'allure de la pression sur Ω, tandis qu'au niveau supérieur du liquide, dans le vase, c'est évidemment la pression atmosphérique qui règne toujours. Il est au contraire facile, comme on l'a vu, de fixer, justement pour les points de Ω, la valeur

---

(²) C'est évidemment une abstraction mathématique que de regarder comme instantanée l'acquisition des vitesses par les différentes particules fluides. En réalité, l'ébranlement se propage, à partir de l'orifice, d'autant plus rapidement que le fluide est plus élastique, la vitesse de propagation devenant infinie pour un fluide rigoureusement incompressible. Nous admettons bien qu'il soit ainsi. Mais, même pour un gaz, il serait tout à fait légitime (tant qu'on vise la mécanique, relativement grossière, de l'écoulement) d'assimiler à un mouvement impulsif (rentrant dans la théorie ordinaire des percussions) ce qui se passe dans la masse gazeuse au moment de l'ouverture de l'orifice.

(³) Voir par exemple LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1906), p. 11.

absolue de la vitesse initiale de sortie; d'où, *a posteriori*, la conclusion que l'effet dynamique à l'orifice se résume dans une pression de percussion $\mu\varphi$. Cette pression (φ étant la valeur que prend, sur Ω, la fonction harmonique caractérisée par a, b, c) dépend toutefois fonctionnellement des données: forme du vase et de l'orifice.

6. – S'il s'agit d'un orifice rectangulaire allongé, percé dans le fond du vase (auquel cas l'écoulement se fait sensiblement par plans verticaux), le problème harmonique mixte peut être résolu par des formules expressives, ainsi que l'a montré BETTI dès 1850 [4]. Il faut remarquer toutefois que BETTI rapportait sa recherche à l'écoulement permanent. On sait bien aujourd'hui, d'après KIRCHHOFF et RAYLEIGH, que la mise en équation en est différente. La pénétrante analyse de BETTI ne garde pas moins un intérêt physique, puisqu'elle convient au régime des vitesses, qui suit immédiatement l'ouverture d'un orifice.

---

[4] *Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura*, « Annali di Scienze matematiche e fisiche » (di Tortolini) t. I, pp. 425-443 (Roma, 1850); ou bien t. I de ses *Opere matematiche* (Milano, 1903), pp. 3-16.