XXVI.

SULLE FUNZIONI CHE AMMETTONO UNA FORMULA D'ADDIZIONE DEL TIPO $f(x+y)=\sum_1^n{}_i\, X_i(x)\,Y_i(y)$.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXII$_2$ (1913$_2$), pp. 181-183.

1. – L'esponenziale $e^{\omega x}$ (ω costante arbitraria), le funzioni trigonometriche $\cos\omega x$, $\sin\omega x$, i polinomî $P(x)$ offrono altrettanti esempî di funzioni $f(x)$, che verificano un teorema di addizione della forma

$$f(x+y)=\sum_i^n{}_i\, X_i(x)\,Y_i(y)\,. \tag{1}$$

Basta manifestamente assumere

$$n=1\,,\qquad X_1=e^{\omega x}\,,\qquad Y_1=e^{\omega y}$$

per l'esponenziale;

$$n=2\,,\quad X_1=\cos\omega x\,,\quad Y_1=\cos\omega y\,,\quad X_2=\sin\omega x\,,\quad Y_2=-\sin\omega y$$

per $\cos\omega x$;

$n=$ grado di $P(x)$ aumentato di una unità ...; ecc.

In generale, però, una funzione $f(x)$ (uniforme e regolare in un certo campo, al quale intendiamo riferirci) non soddisfa ad alcuna equazione funzionale (1), in cui n rappresenti un intero finito. Si può soltanto (e in infiniti modi, per es. mercè la serie di TAYLOR) farla rientrare nel caso limite $n=\infty$. Ritenuta la circostanza essenziale che il secondo membro della (1) consti di un numero finito di termini, vien fatto naturalmente di domandarsi: Quali sono *tutte* le funzioni uniformi $f(x)$ per cui vale un teorema di addizione (1)? La risposta è che le somme di un numero finito di termini del tipo $P(x)e^{\omega x}$ (le P designando polinomî, e le ω costanti reali o complesse) esauriscono tutti i casi possibili: conclusione puramente negativa, in quanto non collega alla (1) alcuna nuova trascendente, annoverabile tuttavia fra le proprietà caratteristiche. Mi permetto pertanto di farne oggetto di brevissima comunicazione.

2. – Cominciamo coll'osservare che le funzioni $X_i(x)$ (e analogamente le Y_i) si possono supporre linearmente indipendenti. Infatti, qualora alcune tra esse fossero combinazioni lineari delle rimanenti, si potrebbero sostituire con queste combinazioni. Il secondo membro della (1) manterrebbe allora la stessa forma, salvo un più piccolo valore di n.

Riterremo, in conformità, che siano diversi da zero i due wronskiani:

$$A = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ X_1' & X_2' & \cdots & X_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_1^{(n-1)} & X_2^{(n-1)} & \cdots & X_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

delle X, e B delle Y.

3. – *Conseguenze della* (1). *Condizione necessaria per la funzione f.* – Deriviamo la (1) una prima volta rispetto ad x, una seconda volta rispetto ad y. Dall'eguaglianza dei primi membri segue

$$(2) \qquad \sum_1^n {}_i X_i' Y_i = \sum_1^n {}_i X_i Y_i' .$$

Derivando successivamente, rispetto ad y, $n-1$ volte, e formando sistema colla (2), si hanno n equazioni lineari nelle X', risolubili rispetto alle X' stesse, in forza di $B \neq 0$. Le espressioni risolute sono del tipo

$$X_i' = \sum_1^n {}_j \eta_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

le η designando funzioni della y.

Dacchè la (1) e, con essa, le derivate e loro combinazioni, devono sussistere per valori qualisivogliano di x, y (appartenenti ad un certo campo), potremo in particolare attribuire ad y, nelle espressioni testè ricavate per le X_i', un valore fisso y_0 (del campo). I coefficienti $\eta_{ij}(y_0)$ divengono, così, altrettante costanti a_{ij}, sicchè intanto *le X_i sono necessariamente soluzioni di un sistema*

$$X_i' = \sum_1^n {}_j a_{ij}X_j \qquad (i=1, 2, ..., n), \tag{3}$$

lineare, a coefficienti costanti.

Notiamo, per incidenza, che analoga proprietà spetta alle Y_i. Ove si designino con b_{ij} i coefficienti del corrispondente sistema, si trae dalla (2) [attesa l'indipendenza così delle $X_i(x)$, come delle $Y_i(y)$] $b_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, 2, ..., n)$. *Le Y_i sono quindi soluzioni del sistema aggiunto a* (3).

Ma il risultato relativo alle X_i basta da solo allo scopo essenziale di caratterizzare le funzioni f cui compete un teorema di addizione della forma (1). La (1) stessa implica infatti (ponendovi, come sopra, $y=y_0$) che f sia combinazione lineare a coefficienti costanti di $X_1, X_2, ..., X_n$. Lo stesso può dirsi, in virtù delle (3), delle derivate successive di f rapposto ad x: $f', f'', ..., f^{(n)}$. L'eliminazione delle X dà luogo ad una *equazione in f, lineare, omogenea, a coefficienti costanti* (d'ordine, al più, eguale ad n). Questa è dunque *condizione necessaria.*

4. – Ma è anche *sufficiente.* Infatti, ogni integrale $f(x)$ d'una tale equazione è somma di un numero finito di termini del tipo $P(x)e^{\omega x}$ (P polinomio in x, ω costante).

$f(x+y)$ è quindi esprimibile sotto la forma (1), c. d. d.