XXV.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

« Atti Ist. Ven. di sc., lett. ed arti », t. LXXII, Parte seconda (1913), pp. 1331-1357.

Sia data un'equazione del tipo

$$E(u) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{1}^{n}{}_{r} B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0 ,$$

i coefficienti $A^{(rs)}$, B_r essendo funzioni qualisivogliono delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (finite, continue e derivabili quanto occorre nel campo che si considera).

Quali sono gli invarianti dell'equazione di fronte a tutte le trasformazioni delle variabili indipendenti? O, sotto altra forma, come si discute l'equivalenza di due equazioni del tipo indicato? come si riconosce cioè se e in qual modo sia possibile sostituire alle x nuove variabili x', atte a far passare dalla $E(u) = 0$ ad altra analoga equazione

$$E'(u) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A'^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{1}^{n}{}_{r} B'_r \frac{\partial u}{\partial x'_r} = 0 ,$$

in cui $A'^{(rs)}$, B'_r designano funzioni comunque assegnate delle x'?

Il sig. COTTON, in una fondamentale Memoria [1], ha trattato, con profondità pari all'eleganza, il problema più generale dell'equivalenza di due equazioni $E(u) = 0$, $E'(u') = 0$ (contenenti eventualmente anche termini lineari in u e in u'), quando si combina il cambiamento delle varia-

---

[1] *Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*, « Annales de l'École Normale Supérieure », t. XVII, 1900, pp. 211-244.

bili indipendenti con una trasformazione moltiplicativa della funzione: $u' = \lambda u$. Concettualmente, basta imporre la restrizione $\lambda = 1$ (attribuendo il valore zero ai coefficienti di u e di u') per riportarsi al caso nostro. Ma non sarebbe comodo il discuterlo per questa via, prendendo le mosse dai risultati del COTTON e procedendo alla determinazione dei caratteri invariantivi addizionali, cui dà luogo la condizione $\lambda = 1$.

Val meglio riprendere la questione *ex novo*, e fissare globalmente gli invarianti, considerando fin da principio il vincolo che la funzione u non si trasforma.

I metodi di RICCI sono naturalmente indicati in questo genere di ricerche; essi guidano lo studioso con operazioni già sistematizzate, di esecuzione, per così dire, automatica. Ne ho quindi profittato nella presente Nota, congiungendovi piccoli accorgimenti, intesi a renderne più spedita l'applicazione a esempi concreti.

Per un numero qualunque n di variabili indipendenti, mi sono limitato a indicazioni generali circa il modo di far rientrare la questione nello stretto ambito del calcolo differenziale assoluto, riconducendola alla determinazione di tutti gli invarianti spettanti ad un ds^2 con invarianti e sistemi covarianti associati.

Per $n = 2$, ho anche indagato i tipi, col seguente risultato:

Ogni equazione $E(u) = 0$ (non parabolica), nel caso generale in cui non si annulla un certo invariante J (funzione semplice dei coefficienti $A^{(rs)}$, B_r), può — univocamente e senza preventivi cambiamenti di variabili — essere posta sotto la forma

$$\Delta_2 u + \frac{du}{d\sigma} = 0\,,$$

il parametro differenziale Δ_2 riferendosi ad un opportuno

$$ds^2 = \sum_{rs\,1}^{\;\;2} a_{rs}\,dx_r\,dx_s\,,$$

e $d\sigma$ rappresentando, in ogni punto (x_1, x_2) uno speciale elemento ds. Ciò è come dire che le $E(u) = 0$ binarie (e non paraboliche) si classificano, per $J \neq 0$, alla stregua dei ds^2 con assegnata congruenza di linee (in quanto, beninteso, non si faccia questione di realità; altrimenti si richiederebbero distinzioni ulteriori).

Per $J = 0$ si hanno tre tipi distinti [cfr. § 6]. Uno di questi si classifica come i ds^2, cui sieno associati due invarianti j_1, j_2 (funzioni soltanto del posto). Gli altri due tipi non contengono più alcun modulo e sono rispettivamente caratterizzati dalla riducibilità alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 ,$$

ovvero alla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u\right) = 0 .$$

1. - Forma invariantiva di una espressione $e(u)$.

Ove sia

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{rs}^{n} {}_1 \, a_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

una forma differenziale quadratica irriducibile, e si designino al solito: con a il determinante delle a_{rs} (per ipotesi diverso da zero), con $a^{(rs)}$ gli elementi reciproci dei coefficienti a_{rs} (complementi algebrici divisi per a), si ha notoriamente come espressione del parametro differenziale secondo, relativo alla forma φ, di una generica funzione $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ (²):

$$(2) \qquad \Delta_2^{(\varphi)} u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left[\sqrt{a} \sum_1^n {}_r \, a^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial x_r}\right]$$

$$= \sum_1^n {}_{rs} \, a^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_1^n {}_r \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_s \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{a} a^{(rs)}) .$$

Dopo ciò è chiaro che, data a priori una generica espressione

$$(3) \qquad e(u) = \sum_1^n {}_{rs} \, a^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_1^n {}_r \, b_r \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

($a^{(rs)}$ e b_r funzioni assegnate delle x) *non parabolica*, tale cioè che sia diverso da zero il determinante a dei coefficienti delle derivate seconde,

---

(²) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, cap. II. Le premesse di questo paragrafo si trovano del resto in extenso nella citata memoria del sig. COTTON. Per le nozioni di calcolo differenziale assoluto che invocherò in appresso, rimando al riassunto: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, fattone dall'autore, prof. RICCI, e da me, nel volume 54 (1900) dei Mathematische Annalen [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, pp. 479-559].

basta porre

$$(4)\qquad l^{(r)} = b_r - \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_s \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{a}\, a^{(rs)}) , \qquad (r = 1, 2, ..., n),$$

$$(5)\qquad lu = \sum_1^n {}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

perchè si abbia identicamente

$$(6)\qquad e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + lu .$$

Come si vede, la forma differenziale quadratica φ e l'operatore lu rimangono univocamente individuati da $e(u)$. Diremo, col sig. COTTON, che essi sono *annessi* a detta espressione.

Importa rilevare — ed è ciò che costituisce la superiorità della (6) sulla (3) — che, in seguito ad una qualsiasi trasformazione puntuale (con cui si sostituiscano alle x nuove variabili x'), la $e(u)$ conserva sempre il medesimo aspetto, bastando semplicemente intendere riferiti (per materiale sostituzione) alle nuove variabili la forma quadratica φ e l'operatore lu.

L'espressione

$$(7)\qquad j = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} l^{(r)} l^{(s)}$$

è manifestamente *invariante di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili indipendenti.*

2. - L'espressione $\varrho E(u) = e(u)$ e l'equazione $E(u) = 0$.

Consideriamo, accanto ad $e(u)$, un'analoga espressione

$$E(u) = \sum_1^n {}_{rs}\, A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_1^n {}_r\, B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

la quale non ne differisca che per un fattore ϱ, funzione delle x, non nulla nel campo che si considera, ma del resto arbitraria. Da

$$e(u) = \varrho E(u)$$

segue evidentemente

$$a^{(rs)} = \varrho A^{(rs)} , \qquad b_r = \varrho B_r \qquad (r, s = 1, 2, ..., n),$$

e, per conseguenza, designando con $1/A$ il determinante delle $A^{(rs)}$, con A_{rs} i rispettivi elementi reciproci, con

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A_{rs}\,dx_r\,dx_s$$

la forma quadratica annessa ad $E(u)$

$$a = \varrho^{-n}A\,, \qquad a_{rs} = \frac{1}{\varrho}A_{rs}\,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

donde

$$(8) \qquad \varphi = \frac{1}{\varrho}\Phi\,.$$

È facile riconoscere quale relazione corra fra $\Delta_2^{(\varphi)}u$ e $\Delta_2^{(\Phi)}u$. All'uopo basta, per es., partirsi dalla (2), sostituendovi, nel secondo membro, $\varrho A^{(rs)}$ in luogo di $a^{(rs)}$, $\varrho^{-n}A$ per a. Risulta senz'altro

$$\begin{aligned}\Delta_2^{(\varphi)}u &= \varrho\sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_r\,\partial x_s}\\ &\quad+\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{\partial u}{\partial x_r}\cdot\frac{\varrho^{-n/2}}{\sqrt{A}}\sum_{1}^{n}{}_{s}\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\varrho^{1-(n/2)}\sqrt{A}A^{(rs)}\right]\\ &= \varrho\sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)}\frac{\partial^2 x}{\partial x_r\partial x_s}+\varrho\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{\partial u}{\partial x_r}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{1}^{n}{}_{s}\frac{\partial}{\partial x_s}(\sqrt{A}A^{(rs)})\\ &\quad-\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{1}^{n}{}_{rs}A^{(rs)}\frac{\partial u}{\partial x_r}\,\frac{\partial \varrho}{\partial x_s}\,.\end{aligned}$$

I primi due termini costituiscono insieme $\varrho\Delta_2^{(\Phi)}u$. Per dar forma comprensiva anche all'ultimo addendo, si ricorda l'espressione del parametro differenziale misto $\nabla^{(\Phi)}(u, v)$ di due generiche funzioni u, v (relativo alla forma Φ) che è

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}A^{(rs)}\frac{\partial u}{\partial x_r}\,\frac{\partial v}{\partial x_s}\,.$$

Ne consegue ovviamente

$$(9) \qquad \Delta_2^{(\varphi)}u = \varrho\Delta_2^{(\Phi)}u - \left(\frac{n}{2}-1\right)\nabla^{(\Phi)}(u, \varrho)\,.$$

D'altra parte, indicando con

$$Lu = \sum_1^n {}_r \, L^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \,,$$

l'operatore lineare annesso ad $E(u)$, si ha dal precedente paragrafo

$$E(u) = \Delta_2^{(\Phi)} u + Lu \,,$$

e quindi

$$e(u) = \varrho E(u) = \varrho \Delta_2^{(\Phi)} u + \varrho Lu \,,$$

che, confrontata colla (6), dà luogo all'identità

$$\Delta_2^{(\Phi)} u + lu = \varrho \Delta_2^{(\Phi)} u + \varrho Lu \,.$$

In virtù della (9), se ne ricava

$$lu = \varrho Lu + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \nabla^{(\Phi)}(u, \varrho) \,, \tag{10}$$

la quale, eguagliando i coefficienti delle stesse derivate di u nei due membri, porge

$$l^{(r)} = \varrho L^{(r)} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \varrho^{(r)} \,, \qquad (r = 1, 2, ..., n): \tag{11}$$

le

$$\varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_s \, A^{(rs)} \frac{\partial \varrho}{\partial x_s} \,,$$

indicano, ben si intende, derivate contravarianti della ϱ.

Introduciamo, accanto al sistema contravariante $L^{(r)}$, il suo reciproco rispetto a Φ,

$$L_r = \sum_1^n {}_s \, A_{rs} L^{(s)} \,,$$

e analogamente, accanto a $l^{(r)}$, il suo reciproco rispetto a φ,

$$l_r = \sum_1^n {}_s \, a_{rs} l^{(s)} = \frac{1}{\varrho} \sum_1^n {}_s \, A_{rs} l^{(s)} \,.$$

Dalle (11) (moltiplicando per $a_{rs} = (1/\varrho)A_{rs}$, sommando rispetto all'indice r e cambiando poi s in r) si traggono le equivalenti

$$l_r = L_r + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{1}{\varrho}\varrho_r\,, \qquad (r = 1, 2, ..., n), \tag{11'}$$

dove, per uniformità, sono indicate con ϱ_r le derivate $\partial\varrho/\partial x_r$.

Ciò posto, rivolgiamo la nostra attenzione all'equazione

$$E(u) = 0\,.$$

Prendendone il primo membro come accidentalmente si presenta, i coefficienti $A^{(rs)}$, B_r hanno certe determinazioni; ma si possono moltiplicare tutti per ϱ senza alterare l'*equazione*. Proponiamoci di fissare questo fattore a priori arbitrario con criterio invariantivo di fronte a trasformazioni qualisivogliono delle variabili indipendenti, per modo che ne rimanga individuata una *espressione*

$$e(u) = \varrho E(u)\,.$$

È chiaro che basta all'uopo ricorrere ad una qualunque funzione I dei coefficienti $A^{(rs)}$, B_r [o, se si vuole, delle loro combinazioni $A^{(rs)}$, $L^{(r)}$], la quale sia invariante di fronte ai cambiamenti di variabili, ma non contemporaneamente di fronte alla moltiplicazione per ϱ degli stessi coefficienti $A^{(rs)}$, B_r. Sfruttando la presenza di ϱ nell'espressione trasformata, sarà in generale possibile attribuire ad I un particolare valore numerico, per es. 1. Più precisamente se, almeno in un certo campo, ciò può farsi in un modo solo, cioè se la ϱ, nel detto campo, rimane definita senza ambiguità, si sarà raggiunto l'intento di far corrispondere ad ogni assegnata equazione $E(u) = 0$, una ben determinata *espressione canonica del primo membro*, $e(u) = \varrho E(u)$, caratterizzata dalla speciale proprietà che il relativo invariante I ha il valore numerico 1. *Rimangono surbodinatamente individuati il* $ds^2 = \varphi$, *e l'operatore* lu, annessi alla $e(u)$, *che si potranno pur dire annessi alla equazione* $E(u) = 0$.

A questo punto l'indagine è a ritenersi sostanzialmente esaurita, poichè la caratterizzazione invariantiva delle equazioni $E(u) = 0$ e la teoria delle loro trasformazioni rimangono ricondotte al problema specifico del calcolo differenziale assoluto « studio invariantivo di sistemi associati ad un ds^2 » ([3]).

([3]) L'interpretazione di φ come quadrato dell'elemento lineare di una varietà implica, nel campo reale, che si tratti di una forma quadratica positiva. In realtà noi abbiamo semplicemente

Esse si trovano del resto già discusse nei nn. 4-8 del citato lavoro del sig. COTTON. Ne farò qui una discussione alquanto più approfondita per $n = 2$; per n qualunque mi limiterò ad esplicitare la scelta dell'invariante I e la corrispondente espressione di φ.

3. - Equazioni binarie. Il tipo generale a invariante J non nullo.

Per le equazioni $E(u) = 0$ con due sole variabili indipendenti ($n = 2$) si presenta, in virtù delle (11′), la particolare circostanza che il sistema covariante L_r è indipendente da ϱ ($l_r = L_r$). Le (11) poi si riducono a

$$l^{(r)} = \varrho L^{(r)} \qquad (r = 1, 2).$$

Dacchè alla definizione (7) di j si può attribuire la forma

$$j = \sum_1^2{}_r\, l_r l^{(r)}\,, \tag{7′}$$

designando con

$$J = \sum_1^2{}_r\, L_r L^{(r)}$$

l'analogo invariante di $E(u)$, avremo

$$j = \varrho J\,. \tag{12}$$

Il caso generale sarà $J \neq 0$, carattere qualitativo che manifestamente si conserva, in forza della (12), quando la $E(u)$ si moltiplica per un generico ϱ.

Ritenuto $J \neq 0$, si potrà prendere

$$\varrho = \frac{1}{J}\,,$$

supposto — e, data l'indole della ricerca, va tenuta ferma questa sola restrizione — che si tratti di forme irriducibili. Ma questo basta ad assicurare che (ove non si distingua il reale dal complesso) le formule e i risultati analitici del testo rimangono perfettamente validi in ogni caso. Possono soltanto — quando φ non è definita positiva — venir meno le concrete rappresentazioni geometriche. Il linguaggio adottato deve allora risguardarsi come un'estensione convenzionale, che serve ad evitare distinzioni inessenziali per lo scopo cui si mira.

e risguardare come *forma canonica della equazione* $E(u) = 0$ la

$$\frac{1}{J} E(u) = e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + \sum_1^2{}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0\,,$$

in cui $j = \sum_1^2{}_r\, l_r l^{(r)} = 1$, *in cui cioè le* $l^{(r)}$ *costituiscono il sistema coordinato contravariante di una congruenza* $[C]$ *di curve* C (tracciate sopra una superficie di elemento lineare $ds = \sqrt{\varphi}$). Detto σ l'arco di una C, la $e(u)$ può manifestamente essere scritta

$$e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + \frac{du}{d\sigma}\,. \tag{13}$$

Gli invarianti della originaria equazione $E(u) = 0$ *sono pertanto tutti e soli quelli del* $ds^2 = \varphi$ *cui sia associata la congruenza* $[C]$. Tra questi figurano quindi le caratteristiche della congruenza, in particolare (fissandosi su quelle di prim'ordine rispetto al sistema $l^{(r)}$) le curvature geodetiche γ_1, γ_2, spettanti alle C e alle loro traiettorie ortogonali $\overline{C}$.

4. - Calcolo effettivo delle curvature.

Ove si designino con $\overline{l}^{(r)}$, $\overline{l}_r$ $(r = 1, 2)$ i due sistemi coordinati, rispettivamente contravariante e covariante, delle curve C, si hanno, per γ_1, γ_2 le espressioni di RICCI (4):

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum_1^2{}_{rs}\, l_{rs} \overline{l}^{(r)} l^{(s)} = -\sum_1^2{}_{rs}\, \overline{l}_{rs} l^{(r)} l^{(s)}\,,\\ \gamma_2 &= \sum_1^2{}_{rs}\, \overline{l}_{rs} l^{(r)} \overline{l}^{(s)} = -\sum_1^2{}_{rs}\, l_{rs} \overline{l}^{(r)} \overline{l}^{(s)}\,. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Esse non sono sempre opportune per la effettiva valutazione delle γ, esigendo la preventiva formazione delle derivate covarianti l_{rs} (o $\overline{l}_{rs}$).

Il calcolo riesce più comodo ricorrendo alle relazioni fra le derivate intrinseche. Si sa infatti che le derivate di una generica funzione u ri-

(4) Colla notazione a tre indici, che conviene ai coefficienti di rotazione in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni [cfr. *Méthodes* ecc., Cap. II, § 1], si ha $\gamma_1 = \gamma_{121}$; $\gamma_2 = \gamma_{212}$.

spetto agli archi delle curve C, $\overline{C}$, ossia gli operatori

$$(15)\qquad \begin{cases} lu = \dfrac{du}{d\sigma} = \sum_1^2{}_r\, l^{(r)} \dfrac{\partial u}{\partial x_r}\,, \\ \bar{l}u = \dfrac{du}{d\bar\sigma} = \sum_1^2{}_r\, \bar{l}^{(r)} \dfrac{\partial u}{\partial x_r}\,, \end{cases}$$

sono legati dalla relazione ([5])

$$(16)\qquad (l, \bar{l})u = \frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\bar\sigma}u - \frac{d}{d\bar\sigma}\frac{d}{d\sigma}u$$

$$= -\gamma_1 \frac{du}{d\sigma} + \gamma_2 \frac{du}{d\bar\sigma} = -\gamma_1 lu + \gamma_2 \bar{l}u\,.$$

Di qua la regola:

Data un'equazione $E(u) = 0$, e preso come capita il suo primo membro, lo si riduce alla forma $\Delta_2^{(\Phi)}u + Lu$. Direttamente date sono quindi le $A^{(rs)}$, B_r; immediatamente desumibili da esse le A_{rs}, il relativo determinante A, e le $L^{(r)}$, mercè le (4) $(r, s = 1, 2)$.

Si valuta in conformità

$$(17)\qquad J = \sum_1^2{}_{rs}\, A_{rs} L^{(r)} L^{(s)}\,,$$

e si possono subito definire le

$$(18)\qquad l^{(r)} = \frac{L^{(r)}}{J}\,.$$

Per procurarsi le $\bar{l}^{(r)}$ delle traiettorie ortogonali $\overline{C}$, si ricorda che esse sono definite da

$$\bar{l}^{(r)} = -\sum_1^2{}_p\, \varepsilon^{(rp)} l_p = -\sum_1^2{}_p\, \varepsilon^{(rp)} L_p = -\sum_1^2{}_{pq}\, \varepsilon^{(rp)} A_{pq} L^{(q)}\,,$$

le $\varepsilon^{(rs)}$ riferendosi alla forma φ di coefficienti JA_{rs}, con che

$$\varepsilon^{(11)} = 0\,, \qquad \varepsilon^{(22)} = 0\,, \qquad \varepsilon^{(12)} = -\varepsilon^{(21)} = \frac{1}{J\sqrt{A}}\,.$$

([5]) *Méthodes* ecc., Cap. II, § 2.

Ne consegue, facendo successivamente $r=1$, $r=2$:

$$(19)\quad \begin{cases} \bar{l}^{(1)} = -\dfrac{1}{J\sqrt{A}} \sum_1^2{}_q A_{2q} L^{(q)}, \\[2ex] \bar{l}^{(2)} = \dfrac{1}{J\sqrt{A}} \sum_1^2{}_q A_{iq} L^{(q)}. \end{cases}$$

Rimangono così esplicitati [formule (18) e (19)] i coefficienti di entrambi gli operatori lu, $\bar{l}u$. Se ne forma la parentesi di Poisson $(l,\bar{l})u$, presentandola come combinazione lineare degli stessi lu, $\bar{l}u$. Il confronto col secondo membro della (16) fornisce le espressioni cercate di γ_1, γ_2.

Esempio I. – Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

di tipo ellittico, colla parte di second'ordine già ridotta alla forma di Laplace, e $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Avremo

$$A^{(11)} = A^{(22)} = 1, \qquad A^{(12)} = 0, \qquad \frac{1}{A} = 1;$$

$$A_{11} = A_{22} = 1 , \qquad A_{12} = 0 , \qquad A = 1 ;$$

$$B_1 = \alpha , \qquad\qquad B_2 = \beta ;$$

inoltre, dacchè in generale [formule (4)] $L^{(r)} = B_r$, ogniqualvolta le A sono costanti, dovremo prendere

$$L^{(1)} = \alpha , \qquad L^{(2)} = \beta .$$

Ne viene

$$J = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 ,$$

$$l^{(1)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} , \qquad l^{(2)} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} ,$$

con che le (19) danno

$$\bar{l}^{(1)} = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} , \qquad \bar{l}^{(2)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} ;$$

e le (15):

$$\begin{cases} lu = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \bar{l}u = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\beta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\right). \end{cases}$$

Posto per brevità

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\tau\,,\qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\vartheta\,,\qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\vartheta\,,$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sin\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\Theta u\,, \\ -\sin\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\bar{\Theta}u\,, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} lu=\tau\Theta u\,, \\ \bar{l}u=\tau\bar{\Theta}u\,, \end{cases}$$

e siccome

$$(\Theta,\bar{\Theta})u=\Theta\bar{\Theta}u-\bar{\Theta}\Theta u$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\left\{-\Theta\sin\vartheta-\bar{\Theta}\cos\vartheta\right\}+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\Theta\cos\vartheta-\bar{\Theta}\sin\vartheta\right\}$$

$$=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=-\{\Theta\vartheta\cdot\Theta u+\bar{\Theta}\vartheta\cdot\bar{\Theta}u\}\,,$$

così risulta:

$$(l,\bar{l})u=(\tau\Theta,\tau\bar{\Theta})u=\tau^2(\Theta,\bar{\Theta})u+\tau\Theta\tau\cdot\bar{\Theta}u-\tau\bar{\Theta}\tau\cdot\Theta u$$

$$=-\tau^2\{\Theta\vartheta\cdot\Theta u+\bar{\Theta}\vartheta\cdot\bar{\Theta}u\}+\tau\Theta\tau\cdot\bar{\Theta}u-\tau\bar{\Theta}\tau\cdot\Theta u\,.$$

Riponendo nell'ultimo membro gli operatori l, $\bar{l}$ al posto di Θ, $\bar{\Theta}$, otteniamo

$$(l,\bar{l})u=-\{l\vartheta+\bar{l}\log\tau\}\,lu+\{-\bar{l}\vartheta+l\log\tau\}\bar{l}u\,,$$

e per conseguenza, in base alla (16),

$$\begin{cases} \gamma_1=l\vartheta+\bar{l}\log\tau\,, \\ \gamma_2=-\bar{l}\vartheta+l\log\tau\,, \end{cases}$$

dove, ricordiamolo,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nella varietà rappresentativa di elemento lineare

$$\varphi = J\Phi = (\alpha^2 + \beta^2)(dx^2 + dy^2)$$

ϑ si interpreta come l'angolo che, in un punto generico (x, y), la curva C forma colla linea coordinata x ($y = \text{cost}$) passante pel punto.

Esempio II. – Equazione di tipo iperbolico riferita alle caratteristiche:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (\alpha \text{ e } \beta \text{ entrambi diversi da zero}).$$

Si ha manifestamente

$$A^{(11)} = A^{(22)} = 0, \qquad A^{(12)} = 1, \qquad \frac{1}{A} = -1;$$
$$A_{11} = A_{22} = 0, \qquad A_{12} = 1, \qquad A = -1;$$
$$B_1 = \alpha, \qquad B_2 = \beta;$$

da cui, essendo qui ancora costanti le A, e quindi $L^{(r)} = B_r$:

$$L^{(1)} = \alpha, \qquad L^{(2)} = \beta.$$

Con ciò

$$J = 2\alpha\beta \neq 0,$$

e le (18), (19) porgono

$$l^{(1)} = \frac{1}{2\beta}, \qquad l^{(2)} = \frac{1}{2\alpha};$$
$$\bar{l}^{(1)} = \frac{i}{2\beta}, \qquad \bar{l}^{(2)} = -\frac{i}{2\alpha}.$$

Le (15) si scrivono in conformità

$$\begin{cases} lu = \dfrac{1}{2\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \bar{l}u = \dfrac{i}{2\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{i}{2\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

le quali equivalgono a

$$\begin{cases} (l - i\bar{l})u = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ (l + i\bar{l})u = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Formiamone la parentesi di Poisson. Si ha dai primi membri

$$(l - i\bar{l},\, l + i\bar{l})u = i(l, \bar{l})u - i(\bar{l}, l)u = 2i(l, \bar{l})u\ ;$$

dai secondi

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial y}\cdot\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right\},$$

talchè

$$(l, \bar{l})u = \frac{1}{2i\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial y}\cdot\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}.$$

Sostituendo a $(1/\beta)\partial u/\partial x$, $(1/\alpha)\partial u/\partial x$ le precedenti espressioni $(l - i\bar{l})u$, $(l + i\bar{l})u$, si ha in definitiva

$$(l, \bar{l})u = \frac{1}{2i\alpha\beta}\left\{\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)lu - i\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\bar{l}u\right\}.$$

Il secondo membro, a norma della (16), deve coincidere con

$$-\gamma_1 lu + \gamma_2 \bar{l}u\,.$$

Sarà pertanto

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{2i\alpha\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right), \\ \gamma_2 = -\dfrac{1}{2\alpha\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Anche più semplici si presentano in questo caso le combinazioni $\gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1 - i\gamma_2$ (invarianti al pari di γ_1, γ_2, e atte quindi a sostituirli, ove ciò faccia comodo). Si ha infatti

$$\begin{cases} \gamma_1 + i\gamma_2 = \dfrac{1}{i\alpha\beta}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = -\dfrac{1}{i\alpha\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial y}. \end{cases}$$

5. - Equivalenza di due equazioni di tipo generale.

Data, assieme ad $E(u) = 0$, una seconda equazione

$$E'(u) = 0\,,$$

riferita ad altre variabili qualisivogliono x_1', x_2', importa riconoscere se o meno esista una qualche trasformazione puntuale che realizzi il passaggio dall'una all'altra. In tal caso, e in tal caso soltanto, le due equazioni si dicono equivalenti.

Dalle considerazioni del § 3 scende immediatamente che, ove si abbia equivalenza, le formule di trasformazione fra le x e le x' devono rendere identicamente

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1(x_1, x_2) &= \gamma_1'(x_1', x_2')\,, \\ \gamma_2(x_1, x_2) &= \gamma_2'(x_1', x_2')\,, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

con manifesto significato delle lettere accentate.

Se queste equazioni (20) sono incompatibili, rimane acquisita la irriducibilità delle due equazioni. Quando c'è compatibilità, possono darsi tre casi: le (20) definiscono una effettiva trasformazione fra le x e le x'; esse si riducono ad una relazione unica fra le dette due coppie di variabili; oppure addirittura ad identità (le γ_1, γ_2, γ_1', γ_2' avendo valori costanti, rispettivamente eguali).

Nel primo caso basterebbe verificare materialmente se la trasformazione definita dalle (20) realizza o no il passaggio da $E(u)=0$ ad $E'(u)=0$. Nel secondo e terzo caso bisogna prendere in considerazione altre relazioni invariantive (per es. quella tra le curvature totali dei due ds^2). Potrà spesso convenire il farlo alla spicciolata, lasciandosi guidare da criteri particolari; per questo segnatamente che, constatata una qualsiasi incompatibilità, la discussione rimane esaurita.

In via teorica sarà bene ritenere che, *trovate due relazioni fra invarianti* [del tipo (20)]

$$\xi_r(x_1, x_2) = \xi_r'(x_1', x_2') \qquad (r = 1, 2), \tag{21}$$

le quali definiscano una effettiva trasformazione di variabili, se ne possono immediatamente associare altre quattro ([6]), *la cui compatibilità è condizione*

([6]) La proposizione è analoga a quella che si incontra nella teoria dell'applicabilità di due superficie. Le equazioni da associare sono ivi in numero di *tre*. Cfr. per es. BIANCHI, loco cit., Cap. VII, § 99.

necessaria e sufficiente per l'equivalenza delle equazioni assegnate. *Basta all'uopo eguagliare ai corrispondenti accentati i quattro invarianti*

$$\frac{d\xi_1}{d\sigma}, \quad \frac{d\xi_2}{d\sigma}, \quad \frac{d\xi_1}{d\bar{\sigma}}, \quad \frac{d\xi_2}{d\bar{\sigma}}. \tag{22}$$

Che si tratti di condizione necessaria è chiaro senz'altro, poichè tutti gli elementi intrinseci debbono risultare identici, in virtù delle (21). Per riconoscere la sufficienza, si ragiona come segue:

1) Il sistema coordinato contravariante di una congruenza $[C]$ (rispetto a coordinate generiche x_1, x_2) è costituito dalle derivate $dx_r/d\sigma$ delle x_r secondo l'arco delle C; e analogamente si ha $\bar{l}^{(r)} = dx_r/d\bar{\sigma}$.

2) Quando in particolare si adottano ξ_1, ξ_2 quali variabili indipendenti, gli elementi dei sistemi contravarianti delle C e delle $\bar{C}$ sono precisamente le quattro derivate (22).

3) Riferendo alle speciali variabili ξ_1, ξ_2 le identità (valide per coordinate qualisivogliono)

$$a^{(rs)} = l^{(r)}l^{(s)} + \bar{l}^{(r)}\bar{l}^{(s)} \qquad (r, s = 1, 2),$$

la precedente osservazione [sub 2)] ci dice che gli elementi reciproci $a^{(rs)}$, e quindi i coefficienti della forma φ annessa ad $E(u) = 0$, sono combinazioni delle (22).

Ciò posto, dall'eguaglianza degli invarianti (22) ai corrispondenti accentati, risulterà senz'altro quella dei coefficienti delle due forme φ, φ', annesse rispettivamente ad $E(u) = 0$, $E'(u) = 0$, in quanto si riferiscano alle variabili $\xi_r = \xi'_r$.

La stessa eguaglianza implicherà inoltre coincidenza dei sistemi contravarianti $l^{(r)}$, $l'^{(r)}$, c. d. d.

Un'ultima osservazione. Oltre alle eventualità considerate [incompatibilità, univoca determinazione di una trasformazione di variabili mercè due equazioni di tipo (20)], può darsi che il confronto delle curvature (geodetiche e totali) e quello delle loro derivate, pur essendo esente da contraddizioni, non basti a definire una trasformazione fra le x e x'. Si dovrà allora concludere che è possibile in infiniti modi passare da $E(u) = 0$ ad $E'(u) = 0$. La discussione è del tutto conforme a quella che interviene quando si tratta dell'applicabilità di due superficie, presentandosi qui ancora la circostanza che possono al più introdursi tre costanti arbitrarie.

6. - I tre tipi speciali a invariante J nullo.

Se

$$J = \sum_{1}^{2}{}_{rs} A_{rs} L^{(r)} L^{(s)} = 0 ,$$

distingueremo le due eventualità (evidentemente invariantive rispetto ai cambiamenti di variabili):

S) si ha addirittura $L^{(1)} = L^{(2)} = 0$;

T) non è identicamente nullo il sistema contravariante $L^{(r)}$ $(r=1, 2)$.

Il sottocaso S) è subito esaurito. In $E(u)$ rimane soltanto il primo termine $\Delta_2^{(\Phi)} u = 0$. Si ha così un'equazione di Beltrami che, riferita alle caratteristiche, si riduce alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0 .$$

Due qualisivogliono equazioni S) sono quindi sempre equivalenti; ben si intende, nell'ambito di tutte le trasformazioni puntuali (reali o complesse). Invece, nel campo reale, operando solo trasformazioni reali, bisognerebbe contemplare anche l'ipotesi delle caratteristiche immaginarie, cui corrisponde l'altra forma ridotta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

E veniamo al tipo T).

Esso corrisponde manifestamente, nell'adottata interpretazione geometrica, al caso in cui la congruenza $[C]$, definita dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{L^{(1)}} = \frac{dx_2}{L^{(2)}} ,$$

consta di linee di lunghezza nulla (in causa di $J = 0$). Dacchè J è identicamente nullo, non possiamo valercene per dar forma canonica alla equazione. Conviene ricorrere a qualche altro invariante. D'ordine zero, rispetto al sistema L_r, c'è il solo J. Siamo pertanto condotti a passare al prim'ordine, prendendo in considerazione, accanto al sistema L_r, anche il suo derivato covariante L_{rs}, e un qualche invariante del sistema così esteso. Giova fissarsi sul seguente:

$$(22) \qquad \Omega = \frac{1}{2}\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, \varepsilon^{(rs)} L_{rs} = \frac{L_{12}-L_{21}}{2\sqrt{A}} = \frac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{A}},$$

il cui annullarsi esprime che

$$L_1\,dx_1 + L_2\,dx_2$$

costituisce un differenziale esatto

Supponiamo dapprima $\Omega \neq 0$, e cerchiamo come esso si altera, quando $E(u)$ si moltiplica per ϱ. In conformità alla notazione adoperata nei precedenti §§, chiameremo ω il nuovo Ω. Dacchè si ha (§ 3) $l_r = L_r$, mentre, per la (8), $\varphi = (1/\varrho)\Phi$ e quindi $\sqrt{a} = (1/\varrho)\sqrt{A}$, l'ultima delle espressioni (22) di Ω, applicata ad ω, dà

$$\omega = \frac{\dfrac{\partial l_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{a}} = \varrho\,\frac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{A}} = \varrho\Omega\,.$$

ω è quindi legato ad Ω, come già j ad J. Si può pertanto — e noi converremo di attenerci a questo criterio — assumere come forma canonica $e(u)$ del primo membro di $E(u) = 0$ quella che risulta dalla moltiplicazione per $1/\Omega$. Il corrispondente invariante ω ha così il valore 1.

Riferiamoci ormai ad $e(u) = (1/\Omega)E(u)$, e designiamo con l_{rs} le derivate covarianti delle l_r $(=L_r)$, rispetto all'annessa forma $\varphi = (1/\varrho)\Phi = \Omega\Phi$. In virtù dell'identità

$$j = \sum_{1}^{2}{}_r\, l_r l^{(r)} = 0\,,$$

e sue derivate,

$$\sum_{1}^{2}{}_r\, l_{rs} l^{(r)} = 0 \qquad (s = 1, 2),$$

potremo attribuire alle l_{rs} la forma

$$(23) \qquad l_{rs} = l_r m_s\,,$$

essendo m_1, m_2 elementi di un sistema covariante semplice.

Avremo, badando alla (22),

$$(22') \qquad \frac{1}{2\sqrt{a}}\begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix} = \frac{l_{12}-l_{21}}{2\sqrt{a}} = \omega = 1\,.$$

Complessivamente i due sistemi semplici l_r, m_r ($r = 1, 2$), associati alla forma φ, posseggono quattro invarianti (razionali) indipendenti, cioè, per es.,

$$
(24) \qquad \begin{cases}
j = \sum_{1}^{2}{}_r\, l_r l^{(r)} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} l_r l_s\,, \\[2mm]
j_1 = \sum_{1}^{2}{}_r\, l_r m^{(r)} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} l_r m_s\,, \\[2mm]
j_2 = \sum_{1}^{2}{}_r\, m_r m^{(r)} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} m_r m_s\,, \\[2mm]
\omega = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

Viceversa questi quattro invarianti (in concorso coi coefficienti a_{rs} della forma φ) definiscono (in termini finiti) gli elementi l_r, m_r dei due sistemi; e in particolare l'operatore

$$lu = \sum_{1}^{2}{}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r}\,.$$

Ne desumiamo che *gli invarianti di una equazione* $E(u) = 0$ *di tipo* T) *sono, per* $\Omega \neq 0$, *tutti e soli quelli che spettano al sistema delle due funzioni* j_1, j_2 (non occorre considerare j ed ω che si riducono a costanti) *associate alla forma differenziale* $\varphi = \Omega\Phi$.

Ciò ritenuto, per decidere dell'equivalenza di due equazioni $E(u) = 0$, $E'(u) = 0$, entrambe di tipo T), si imposterà la discussione prendendo in esame le due equazioni

$$j_1 = j_1'\,, \qquad j_2 = j_2'\,,$$

con manifesto significato di j_1', j_2'.

Se esse danno luogo a incompatibilità, l'equivalenza rimane esclusa; se definiscono una effettiva trasformazione fra le variabili x_1, x_2 e le x_1', x_2', condizione necessaria e sufficiente di equivalenza è quella dei rispettivi ds^2; ecc.

Rimane da considerare il *caso particolare in cui* (non solo J, ma anche) $\Omega = 0$.

Si riconosce facilmente che ogni equazione siffatta è riducibile alla forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + u\right\} = 0\,,$$

ed è quindi sempre equivalente ad ogni altra equazione dello stesso tipo T) a invariante $\Omega = 0$.

Immaginiamo infatti di riferire la assegnata $E(u) = 0$ alle caratteristiche. Essa potrà scriversi

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \tag{25}$$

avendosi così [come già a § 4, Esempio II]

$$A_{11} = A_{22} = 0\,, \qquad A_{12} = 1\,, \qquad A = -1\,;$$

$$L^{(1)} = \alpha\,, \qquad L^{(2)} = \beta\,.$$

La condizione

$$J = \sum_{rs}^{2}{}_{1} A_{rs}L^{(r)}L^{(s)} = 2\alpha\beta = 0$$

implica che si annullino α o β, non però entrambi, perchè altrimenti si ricadrebbe nel tipo S).

Potremo supporre (scambiando all'occorrenza x con y) che sia precisamente $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Gli elementi del sistema covariante L_r sono in conformità

$$L_1 = \sum_{r}{}_{1}^{2} A_{1r}L^{(r)} = 0\,, \qquad L_2 = \sum_{r}{}_{1}^{2} A_{2r}L^{(r)} = \alpha\,.$$

L'annullarsi di Ω sta ad esprimere, come già abbiamo rilevato, che

$$L_1\,dx_1 + L_2\,dx_2\,,$$

cioè, nel caso presente, $\alpha\,dy$, è un differenziale esatto. α dipende quindi dalla sola y, sicchè diviene possibile sostituire ad y una sua funzione y^*, definita da

$$dy^* = \frac{\alpha}{2}\,dy\,.$$

Con questa sostituzione, la (25), tenuto conto che $\beta = 0$, diviene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial y^*} + u\right\} = 0\,,$$

che è precisamente l'annunciata forma ridotta.

7. - Equazioni con n variabili indipendenti.

Per $n > 2$, la moltiplicazione di una $E(u)$ per ϱ, non assoggetta più l'invariante

$$J = \sum_1^n {}_r\, L_r L^{(r)}$$

a semplice moltiplicazione per ϱ.

Si ha invece dalle (11) e (11)', badando alle identità

$$\begin{cases} \sum_1^n {}_r\, L_r \varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_r\, L^{(r)} \varrho_r = \sum_1^n {}_r\, L^{(r)} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x_r}\,, \\ \sum_1^n {}_r\, \varrho_r \varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_{rs}\, A^{(rs)} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x_r} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x_s} = \Delta^{(\Phi)} \varrho\,, \end{cases}$$

la relazione

$$j = \varrho J + (n-2) \sum_1^n {}_r\, L^r \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2}{\varrho} \Delta^{(\Phi)} \varrho\,. \tag{26}$$

Come si vede, ϱ interviene assieme alle sue derivate prime; anzi queste, per $n > 2$, intervengono certo essenzialmente, non potendo mai sparire l'ultimo termine (attesa l'irriducibilità di Φ). In vista di ciò, per $n > 2$, sarebbe possibile, senza alcuna eccezione (⁷), valersi del moltiplicatore ϱ in guisa da rendere $j = 1$. Ma il moltiplicatore stesso non ne risulterebbe univocamente determinato, dovendo soltanto verificare una equazione a derivate parziali del primo ordine [la (26), in cui si faccia $j = 1$].

Conviene pertanto, secondo il criterio esposto alla fine del § 2, prendere in considerazione qualche altro invariante (di fronte ai cambiamenti di variabili), il quale, quando la $E(u)$ si moltiplica per ϱ, subisca — se possibile — appena una trasformazione moltiplicativa.

A ciò si è condotti con tutta facilità, associando al sistema L_r il suo derivato covariante L_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ (rispetto alla forma Φ). Basta anzi aver riguardo ad una sua parte soltanto, cioè al sistema emisimmetrico

$$G_{rs} = -G_{sr} = L_{rs} - L_{sr}\,. \tag{27}$$

Ove si tenga presente che le *differenze* delle derivate covarianti

(⁷) Nel caso di $n = 2$, si presentava l'eccezione $J = 0$.

$L_{rs} - L_{sr}$ coincidono colle differenze delle analoghe derivate ordinarie

$$\frac{\partial L_r}{\partial x_s} - \frac{\partial L_s}{\partial x_r},$$

si vede subito che le G_{rs} si identificano coi coefficienti del *covariante bilineare* $\varkappa$ della forma pfaffiana $\sum_1^n{}_r L_r dx_r$:

$$\varkappa = \delta\left(\sum_1^n{}_r L_r dx_r\right) - d\left(\sum_1^n{}_r L_r dx_r\right).$$

Risultando dalle (11′)

$$\sum_1^n{}_r l_r dx_r = \sum_1^n{}_r L_r dx_r + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d \log \varrho\,, \tag{28}$$

le due forme $\sum_1^n{}_r l_r dx_r$, $\sum_1^n{}_r L_r dx_r$ differiscono per un differenziale esatto. Esse hanno quindi identico covariante bilineare, talchè

$$g_{rs} = G_{rs}\,, \tag{29}$$

le g_{rs} essendo formate colle derivate delle l_r, come le G_{rs} con quelle delle L_r.

Consideriamo dapprima il *caso particolare in cui si annulla identicamente il covariante* $\varkappa$ (circostanza, per quanto abbiamo rilevato, invariante anche di fronte alla moltiplicazione di $E(u)$ per ϱ). Sotto questa ipotesi $\sum_1^n{}_r L_r dx_r$ è il differenziale totale di una funzione V, e si può scegliere ϱ in guisa che $\varrho E(u)$ si riduca al solo termine $\Delta_2^{(\varphi)} u$. Basta infatti, badando alla (28), rendere nullo il suo secondo membro

$$dV + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d \log \varrho\,,$$

ciò che individua ϱ a meno di un fattore costante. Tutte le l_r vanno allora a zero; con esse le $l^{(r)}$, e quindi lu. Ridotta l'equazione alla forma $\Delta_2^{(\varphi)} u = 0$ (per quanto φ si trovi individuato a meno di un fattore *costante*), la classificazione si fa come per i ds^2 a n variabili.

Caso generale ($\varkappa$ non identicamente nullo).

Il sistema delle due forme

$$\Phi = \sum_1^n{}_{rs} A_{rs} dx_r dx_s\,, \qquad \varkappa = \sum_1^n{}_{rs} G_{rs} dx_r dx_s\,,$$

quadratica la prima, bilineare alterna la seconda, possiede n invarianti razionali (di fronte alle trasformazioni di variabili), definiti per es. come i coefficienti $J_1, J_2, \ldots, J_n$ della nota equazione

$$(30)\qquad \frac{1}{A}\begin{vmatrix} \omega A_{11} & \omega A_{12} - G_{12} & \ldots & \omega A_{1n} - G_{1n} \\ \omega A_{21} - G_{21} & \omega A_{22} & \ldots & \omega A_{2n} - G_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega A_{n1} - G_{n1} & \omega A_{n2} - G_{n2} & \ldots & \omega A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \omega^n + J_1\omega^{n-1} + J_2\omega^{n-2} + \ldots + J_{n-1}\omega + J_n = 0 .$$

Si vede subito che le J d'indice dispari si annullano identicamente, in causa dell'emisimmetria delle G_{rs}. Non così, almeno in generale, quelle d'indice pari ([8]).

Comunque, quando $E(u)$ si moltiplica per ϱ, tutti gli invarianti J, come tosto risulta dalla (30), attese le identità

$$a_{rs} = \frac{1}{\varrho} A_{rs}, \qquad a = \frac{1}{\varrho^n} A, \qquad g_{rs} = G_{rs}, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

subiscono alterazioni puramente moltiplicative. In modo preciso si ha, per $\nu = 1, 2, \ldots, n/2$ ovvero $(n-1)/2$ secondochè n è pari o dispari,

$$j_{2\nu} = \varrho^{2\nu} J_{2\nu},$$

le $j_{2\nu}$ riferendosi naturalmente ad $e(u)$.

Supposto $J_{2\nu} \neq 0$, si può assumere $\varrho = 1/\sqrt[2\nu]{J_{2\nu}}$, ossia

$$e(u) = \frac{1}{\sqrt[2\nu]{J_{2\nu}}} E(u),$$

come forma canonica del primo membro dell'equazione. Essa rimane caratterizzata dalla circostanza che il corrispondente invariante $j_{2\nu}$ ha il valore 1.

Qualora si annullassero tutte le J (nel qual caso l'equazione (30) ha tutte le radici nulle) bisognerebbe esperire altri invarianti, per es. quelli intrinseci della forma Φ (prendendo in considerazione il sistema di RIEMANN a quattro indici, formato colle A_{rs} e loro derivate prime e seconde), ovvero quelli provenienti dall'associazione a Φ e $\varkappa$ del sistema G_{rst}, derivato covariante delle G_{rs}, rapporto a Φ, ecc. Ma una classificazione completa, come quella istituita per $n = 2$, sembra richiedere discussioni laboriose.

([8]) Nel campo reale [quando cioè sono reali i coefficienti di $E(u)$], si può anzi affermare che J_2 è certo diversa da zero, ogniqualvolta sia definita la forma Φ.