UN NUOVO TEOREMA SOPRA LE QUARTICHE PIANE GENERALI

Data una quartica piana generale, vi sono infiniti punti che hanno per cubica polare rispetto ad essa una cubica equianarmonica, ed è ben noto che il loro luogo costituisce una nuova quartica detta *covariante* S della primitiva (1). Ora qui si vuol dimostrare che:

Ogni quartica piana generale può pensarsi come covariante S di altre 36 (soltanto), corrispondentemente ai suoi 36 sistemi di cubiche seitangenti (di 2ª specie) i cui punti di contatto non giacciono mai sopra una medesima conica.

1. Si riferiscano proiettivamente i punti di un piano alle quadriche di una rete alla maniera di Hesse (2): i punti del piano cui corrispondono coni della rete costituiranno una quartica generale C^4, mentre i vertici dei coni medesimi saranno situati sopra una curva gobba del sesto ordine, Γ^6; quindi fra le due curve C^4 e Γ^6 verrà per tal modo stabilita spontaneamente una corrispondenza biunivoca. A proposito della quale, ricordiamo che ai sei punti ove Γ^6 è tagliata da un piano qualunque dello spazio corrispondono i sei punti di contatto di C^4 con una sua cubica seitangente di 2ª specie appartenente a un determinato sistema Σ (che è poi uno qualunque dei 36 sistemi di cubiche seitangenti di 2ª specie).

2. Allora sia A' un punto qualunque di Γ^6 ed A il punto corrispondente di C^4. I piani polari di A' rispetto alle quadriche della rete costituiscono un fascio, e l'asse di questo fascio è una trisecante di Γ^6 (3); quindi se A'_1, A'_2, A'_3 sono i punti ove questa trisecante taglia Γ^6 ed A_1, A_2, A_3 sono i punti corrispon-

(1) Cfr. Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung*. Crelle's Journal, Bd. 59.

(2) Hesse, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung*. Crelle's Journal, Bd. 49.

(3) Cfr. Reye, *Die Geometrie der Lage*. III. Abtheilung, pag. 138.

denti di C^4, ad ogni punto A di C^4 si viene a far corrispondere un triangolo $A_1 A_2 A_3$ inscritto nella curva medesima. Diciamo $A_1 A_2 A_3$ il *triangolo relativo* al punto A: poichè ogni piano per la detta trisecante è polare di A' rispetto a un fascio di quadriche della rete e quindi insieme a certi altri tre piani passanti per A' dà un tetraedro autopolare per quel fascio, è chiaro che i punti $A_1 A_2 A_3$ insieme ad altri tre punti qualunque della quartica C^4 allineati con A dànno i sei punti di contatto di una cubica seitangente del sistema Σ. Ond'è che la relazione fra un punto A e il triangolo relativo $A_1 A_2 A_3$ può anche esprimersi dicendo che $A_1 A_2 A_3$ sono i tre ulteriori punti ove una cubica del sistema Σ che tocca C^4 in tre punti qualunque allineati con A tocca ulteriormente la quartica medesima (1).

Orbene, dico che esiste una quartica ed una sola, tale che C^4 è il suo covariante S e che ogni punto A di C^4 ha per trilatero polohessiano rispetto ad essa il trilatero relativo $A_1 A_2 A_3$.

3. Consideriamo dapprima un caso particolare e supponiamo che la quartica C^4 sia una quartica di LÜROTH (2): allora può supporsi, avendo riguardo a un sistema di cubiche seitangenti di 2ª specie ben determinato, che la sestica gobba Γ^6, cui C^4 vien riferita biunivocamente, sia circoscritta a ∞^1 pentaedri completi, polari per le quadriche della rete di cui Γ^6 è la Jacobiana (3).

Sia $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ uno di questi pentaedri completi e consideriamo il tetraedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Rispetto al cono della rete, che ha il vertice in $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, il punto $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4$ ha per piano polare un piano che deve passare per il punto $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ e per la retta $\alpha_3 \alpha_5$ (poichè il pentaedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ è polare per un tal cono), e che quindi

(1) Cfr. ad es. PASCAL, *Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti*, Mem. IV, § 5 (Annali di Matematica, serie II, Tomo XVIII) [secondo Lezioni di F. KLEIN].

(2) Per brevità di discorso chiamo *quartica di* LÜROTH una quartica nella quale sia inscritto un pentalatero completo, dopo di che ve ne sono inscritti infiniti altri, e *quartica di* CLEBSCH una quartica dotata di pentalateri polari. — Ogni quartica di CLEBSCH ha per covariante S una quartica di LÜROTH, ed inversamente (LÜROTH, *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Cnrven vierter Ordnung*. Math. Ann., Bd. 1; e, *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann*. Ibid. Bd. 13).

(3) Cfr. FRAHM, *Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung*. Math. Ann., Bd. 7. Donde risulta l'inesattezza di una asserzione del REYE contenuta nel n. 23 della sua Memoria intitolata: *Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme* e inserita nel vol. 77 del giornale di Crelle.

coincide col piano α_3. Così, rispetto al cono medesimo, i punti $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$, $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ hanno per piani polari i piani α_2 ed α_1. Segue che il triedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ è autoconiugato rispetto a quel cono: e ripetendo il ragionamento per i coni della rete che hanno i vertici in $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4$, $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$, $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ si conclude che il tetraedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ è autopolare per i quattro coni della rete che hanno i vertici nei vertici del tetraedro medesimo.

D'altra parte il tetraedro $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ non può essere autopolare per tutte le quadriche della rete (altrimenti questa conterebbe quattro fasci di coni coi vertici nei quattro vertici del tetraedro e quindi C^4 si spezzerebbe in quattro rette), dunque quei quattro coni formano un fascio, e i dieci punti di C^4, che corrispondono ai dieci punti di Γ^6 vertici di un pentaedro completo, costituiscono i vertici di un pentalatero completo inscritto in C^4. Allora, poichè C^4 è covariante S di una quartica di Clebsch C_1^4, e rispetto a C_1^4 ogni punto di C^4 ha per trilatero polohessiano il trilatero costituito dai tre lati rimanenti del pentalatero completo inscritto in C^4 di cui due lati passano pel punto considerato, segue immediatamente in questo caso particolare la verità della nostra asserzione, quando si osservi che in tal caso la trisecante, asse del fascio di piani polari di un punto di Γ^6, è precisamente lo spigolo opposto a quel punto nel (solo) pentaedro completo inscritto in Γ^6 che abbia un vertice in esso.

Ciò posto, se A e B sono due punti qualunque di C^4, dicansi rispettivamente $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ i loro *triangoli relativi* o i loro trilateri polohessiani rispetto a C_1^4: per una osservazione precedente, se C e D sono i due punti ove la retta AB taglia ulteriormente C^4, vi sono due cubiche seitangenti di C^4 appartenenti allo stesso sistema che la toccano rispettivamente nei punti $A_1 A_2 A_3 \; B \; C \; D$ e $B_1 B_2 B_3 \; A \; C \; D$; e quindi per il noto teorema che i 12 punti di contatto di due cubiche seitangenti di uno stesso sistema di 2ª specie sono la completa intersezione della quartica con una terza cubica, segue senz'altro che i sei punti $A_1 A_2 A_3 \; B_1 B_2 B_3$ sono sopra una conica passante per C e D. Abbiamo adunque il teorema:

I due trilateri polohessiani di due punti qualunque A e B del covariante S di una quartica di Clebsch *sono inscritti in una conica che passa anche pei due punti ove la retta $A\,B$ taglia ulteriormente quel covariante* (1).

(1) Questo teorema, coi suoi casi particolari, è stato dimostrato direttamente dal Lüroth (*loc. cit.*). La dimostrazione che qui ne abbiamo data ci pare che ponga il teorema medesimo nella sua vera luce.

Esso può estendersi, come ora vedremo, al covariante S di una quartica qualunque.

Infatti se A, B, C, D sono i quattro punti ove una retta r taglia il covariante S di una quartica qualsivoglia, rispetto alle quartiche (costituenti un fascio), che hanno quattro contatti quadripunti colla quartica data sulla retta r, i quattro punti A, B, C, D hanno gli stessi trilateri polohessiani che rispetto a C^4, onde i covarianti S di quelle quartiche costituiscono ancora un fascio avente per punti base i punti A, B, C, D e i dodici vertici dei loro quattro trilateri polohessiani. Di più il fascio di quartiche e il fascio dei loro covarianti S sono proiettivi, e a quello appartiene una (sola) quartica di Clebsch, mentre a questo una (sola) quartica di Lüroth [1], dunque applicando il teorema or ora dimostrato si ha che:

I trilateri polohessiani di due punti qualunque A e B del covariante S di una quartica qualunque sono inscritti in una conica che passa anche pei due punti ove la retta AB taglia ulteriormente quel covariante.

Facendo avvicinare infinitamente il punto B al punto A, si ha il teorema:

Se $A_1 A_2 A_3$ è il trilatero polohessiano di un punto A del covariante S di una quartica qualunque, vi è una conica che tocca quel covariante nei punti A_1, A_2, A_3 e che passa pei due punti ove esso è tagliato ulteriormente dalla sua tangente in A;

ed osservando che la conica di cui qui si parla insieme alla tangente al covariante S in A dà una cubica ad esso seitangente di 2ª specie, si ottiene facilmente il risultato di cui ci serviremo nel seguito:

I tre vertici del trilatero polohessiano di un punto A del covariante S di una quartica qualunque e tre punti del covariante medesimo allineati con A, dànno i 6 punti di contatto di una sua cubica seitangente.

Infine se in un teorema precedente si prendono per A e B due vertici di un trilatero polohessiano qualunque si ha il notevole enunciato:

I sei punti ove il covariante S di una quartica qualunque è tagliato dai tre lati di un trilatero polohessiano fuori dei suoi vertici sono sopra una conica che tocca il covariante suddetto nel polo del trilatero considerato.

(1) Ho stabilito questo teorema in un mio lavoro dal titolo: *Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4⁰ ordine*, pubblicato nel vol. 2⁰ della 3ª serie degli Annali di Matematica.

4. Adesso riprendiamo il caso generale e le notazioni del n. 2, e detti A, B, C, D i quattro punti ove una retta qualunque taglia la quartica considerata C^4, siano $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, $D_1 D_2 D_3$ i *triangoli ad essi relativi* nel senso più sopra stabilito. Poichè i punti $A_1 A_2 A_3 B C D$ e $B_1 B_2 B_3 A C D$ sono punti di contatto di C^4 con due cubiche di 2ª specie appartenenti ad uno stesso sistema, i sei punti $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$ apparterranno ad una conica passante per C e D e quindi i due triangoli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ saranno circoscritti a un'altra conica K^2.

Allora se si considerano i due pentalateri completi costituiti dai trilateri $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ e dalle tangenti condotte a K^2 dai due punti A e B rispettivamente, essi sono polari per una quartica di Clebsch [1] C_1^4, quindi sono inscritti in una quartica di Lüroth C_2^4, covariante S di C_1^4; di più i due punti A e B hanno per trilateri polohessiani rispetto a C_1^4 appunto i trilateri $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$.

Ciò significa per un teorema precedente che la quartica C_2^4 passa anche pei due punti C e D; poi siccome il trilatero polohessiano di C (o D) rispetto a C_1^4 deve trovarsi con $A_1 A_2 A_3$ sopra una conica passante per B e D (o B e C) e con $B_1 B_2 B_3$ sopra una conica passante per A e D (o A e C), segue che tale trilatero è appunto $C_1 C_2 C_3$ (o $D_1 D_2 D_3$), perchè esso per una ragione già detta soddisfa appunto a questa condizione.

Dopo ciò è chiaro che la quartica considerata C^4 è covariante S di una determinata quartica C_3^4 avente quattro contatti quadripunti con C_1^4 sulla retta $A B C D$, e che rispetto a C_3^4 ogni punto di C^4 ha per trilatero polohessiano il *triangolo relativo*.

Quest'ultima proprietà è evidente pei quattro punti A, B, C, D e risulta subito per un quinto punto qualunque E di C^4 osservando che se F e G sono i due punti ove la retta $A E$ taglia ulteriormente C^4, tanto il triangolo relativo ad E quanto il suo trilatero polohessiano debbono trovarsi sulla conica determinata dai cinque punti $A_1 A_2 A_3 F G$.

5. Tenendo conto del penultimo teorema dimostrato al n⁰ 3, e ricordando che il metodo di Hesse può applicarsi ad una quartica in 36 modi distinti corrispondentemente ai suoi 36 sistemi di cubiche seitangenti si ha senz'altro il teorema oggetto di questa Nota.

Pisa, li 17 gennaio 1899.

[1] Infatti fra le quarte potenze di 10 forme lineari che uguagliate a zero rappresentino dieci tangenti di una conica passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Cfr. Rosanes, *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen*, Crelle's Journal, Bd. 76.