65.

SUR LES PUISSANCES ET LES RACINES DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

[*Comptes Rendus*, XCIV. (1882), pp. 55—59.]

ON sait ce que veut dire un déterminant de substitution. Ces déterminants ne diffèrent nullement, dans leur forme extérieure, des déterminants ordinaires, que l'on peut nommer *déterminants absolus*, mais les lois de combinaison ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Ainsi, par exemple, l'inverse du déterminant absolu $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}$ est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b}{\Delta} & -\dfrac{\beta}{\Delta} \\ -\dfrac{\alpha}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{vmatrix}$$

où

$$\Delta = ab - \alpha\beta,$$

tandis que pour ce même déterminant, envisagé comme déterminant de substitution, l'inverse est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b}{\Delta} & -\dfrac{\alpha}{\Delta} \\ -\dfrac{\beta}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{vmatrix},$$

et ainsi, en général, l'inverse d'un déterminant de substitution est ce que l'on peut nommer le *transversal* de l'inverse d'un déterminant absolu, c'est-à-dire ce que ce déterminant devient quand, en prenant la diagonale qui joint le premier au dernier terme comme axe, on fait décrire à l'inverse ordinaire une demi-révolution autour de cet axe. De même pour la multiplication de deux déterminants de substitutions A et B, chacun de l'ordre n; pour obtenir le produit de A par B, il faut multiplier ensemble le transversal de A par B, selon la règle ordinaire, ce qui donnera un déterminant C'; C, le transversal de C', sera le produit de la substitution A par la substitution B.

Ainsi, tandis que le carré d'un déterminant absolu quelconque est un déterminant symétrique, le carré d'un déterminant non symétrique de substitution reste asymétrique.

Soit un déterminant quelconque donné, et ajoutons le terme $-\lambda$ à chaque terme diagonal; on obtient ainsi une fonction de λ; je nomme les racines de cette fonction racines *lambdaïques* du déterminant donné, et j'obtiens facilement les deux théorèmes suivants:

(1) *Les racines* lambdaïques *de l'inverse d'un déterminant sont les réciproques des racines* lambdaïques *du déterminant lui-même.*

(2) *i étant un nombre entier et positif quelconque, les* $i^{\text{èmes}}$ *puissances des racines* lambdaïques *d'un déterminant* de substitution *sont identiques avec les racines* lambdaïques *de la puissance* $i^{\text{ème}}$ *du déterminant.*

En réunissant ces deux énoncés, on parvient à ce théorème plus général: *i étant une quantité commensurable quelconque, les* $i^{\text{èmes}}$ *puissances des racines* lambdaïques *d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines* lambdaïques *de* $i^{\text{ème}}$ *puissance du déterminant.*

Si le déterminant est symétrique, on n'a pas besoin de le définir comme représentant une substitution, car, pour les déterminants symétriques (qu'ils soient envisagés comme absolus ou comme substitutifs), les lois d'opération deviennent identiques.

Avec l'aide du théorème sur les racines lambdaïques, je parviens facilement à la résolution de ce beau problème:

Extraire la racine $\mu^{\text{ième}}$, *ou plus généralement trouver la puissance* $i^{\text{ème}}$ *d'une substitution donnée, i étant un nombre commensurable quelconque.*

Voici la solution. Soit n l'ordre du déterminant de substitution donné.

Soient K un terme quelconque dans ce déterminant, K_θ le terme qui occupe, dans la puissance $\theta^{\text{ième}}$ du déterminant, la même position que K dans le déterminant lui-même. De plus, soient $K_0 = 1$ quand K est un terme dans la diagonale, et $K_0 = 0$ dans tout autre cas. Alors je dis que, pour une valeur commensurable quelconque de i, positive ou négative, en nommant la somme des quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, S_1, leur produit, S_{n-1}, et en général la somme de leurs combinaisons binaires, ternaires, etc., S_2, S_3, ... on aura

$$K_i = \Sigma \frac{K_{n-1} - S_1 . K_{n-2} + S_2 . K_{n-3} - \ldots \pm S_{n-2} . K_1 \mp S_{n-1} . K_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \ldots (\lambda_1 - \lambda_n)} \lambda_1^i,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont les racines lambdaïques du déterminant donné.

Si l'on fait $i = \frac{1}{\mu}$, où μ est un nombre entier, on voit que le nombre des $\mu^{\text{ièmes}}$ racines est μ^n et consistera en μ^{n-1} groupes de μ matrices pour chaque groupe, ou pour le même groupe on passe d'une matrice à une autre, en multipliant chacun des n^2 éléments qu'il contient par la même racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité.

Il peut arriver que les racines *lambdaïques* du déterminant ne soient pas toutes inégales; alors la formule générale pour K_i subira une modification qu'on déduit facilement du théorème général, au moyen de l'introduction de différences infinitésimales entre les racines.

Il y a cependant un cas très particulier qu'on ne doit pas manquer de signaler: c'est le cas où le nombre de solutions devient infini pour une valeur finie de i, où, en effet, le problème à résoudre devient un véritable porisme; dans ce cas, des n^2 quantités qu'on cherche, $n^2 - n$, c'est-à-dire tous les termes qui ne sont pas en diagonale, restent absolument arbitraires. C'est le cas où le déterminant donné est de la forme la plus simple possible, c'est-à-dire où tous les termes qui ne se trouvent pas dans la diagonale du déterminant donné sont des zéros, et tous les termes qui sont dans la diagonale égaux entre eux. Pour plus de clarté, supposons que tous les termes qui ne disparaissent pas sont des *unités*.

(1) Pour que le problème soit résoluble, il faut que μ ne soit pas moindre que n.

(2) μ n'étant pas inférieur à n, la seule condition nécessaire et suffisante pour que la $\mu^{\text{ième}}$ puissance du déterminant Δ soit de la forme proposée est que les *racines lambdaïques* de Δ soient égales respectivement à μ *racines distinctes* (choisies à volonté) de l'unité.

Par exemple, si $n = 2$, pour que la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la substitution $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}$ soit de la forme $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, on n'a qu'à faire les racines de

$$\lambda^2 - (a + b)\,\lambda + ab - \alpha\beta = 0,$$

égale à $\quad \cos\dfrac{2r\pi}{\mu} + i\sin\dfrac{2r\pi}{\mu},\quad \cos\dfrac{2s\pi}{\mu} + i\sin\dfrac{2s\pi}{\mu},$

respectivement.

Si l'on veut seulement que la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}$ soit de la forme $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}$, A étant arbitraire, il suffira que les deux racines de λ soient dans le rapport de 1 à une $\mu^{\text{ième}}$ racine imaginaire quelconque de l'unité, de sorte qu'on peut mettre

$$\lambda_1 = k\left(\cos\frac{r\pi}{\mu} + i\sin\frac{r\pi}{\mu}\right),$$

$$\lambda_2 = k\left(\cos\frac{r\pi}{\mu} - i\sin\frac{r\pi}{\mu}\right),$$

ce qui donne pour la seule condition nécessaire et suffisante

$$(a + b)^2 = 4\left(\cos\frac{r\pi}{\mu}\right)^2 (ab - \alpha\beta).$$

C'est la solution bien connue du problème soulevé et résolu par le célèbre M. Babbage, dans son traité *Sur le Calcul des Fonctions: Trouver*

$$\phi(x) = \frac{ax + \alpha}{bx + \beta},$$

tel que $\phi^{\mu}(x) = x$. La même question a été bien plus récemment considérée de nouveau par M. Serret (voir son *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II. pp. 356—362).