XX.

SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI MULTIPLI

«Atti Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. V_1, 1896_1, pp. 289–300.

1. Il metodo da me dato (1) per risolvere i problemi di inversione degli integrali definiti semplici è suscettibile di estendersi agli integrali multipli. Una tale generalizzazione forma il soggetto della presente Nota, nella quale il problema dell'inversione viene sciolto qualunque siano il numero delle funzioni incognite e quello delle variabili indipendenti da cui esse dipendono. La risoluzione si ottiene in virtù di un procedimento con cui partendo da una funzione qualsiasi finita e continua di più variabili e mediante operazioni di quadratura, si giunge a costruire una nuova funzione pure finita e continua, la quale alla sua volta riproduce la funzione primitiva, allorché si ripetono su essa quelle stesse operazioni che si sono eseguite sulla prima.

Mi permetto di comunicare all'Accademia il detto procedimento ed il teorema fondamentale da cui esso discende, giacché non è a mia cognizione che siano state risolute fin qui le questioni funzionali che in tal modo vengono trattate.

2. Sia

$$S_0(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

una funzione finita e continua di $2n$ variabili e si ammetta che ciascuna coppia di variabili x_i, y_i si mantenga compresa entro i limiti α_i, β_i, essendo $\beta_i > \alpha_i$.

Si calcolino, partendo da S_0, le funzioni

$$(1) \qquad S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \cdot S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n)\, S_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

in cui $i \geq j \geq 1$. Cominciamo dal dimostrare che S_i è indipendente da j. A tal fine osserviamo che questa proposizione risulta ovviamente per $i = 1$ Supponiamola verificata per tutti i valori dell'indice inferiori ad i, e mostriamo che è vera per i.

(1) Seduta del 1° marzo della R. Accademia dei Lincei [in questo vol.: pp. 255–262]. Vedi anche gli «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», sedute del 12 gennaio, 26 gennaio e 8 marzo 1896 [in questo vol.: pp. 216–241]; una Nota successiva sarà presentata nella seduta del 26 aprile [in questo vol.: pp. 242–254].

Infatti avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \int_{\xi_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{j-h-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n) \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

ed applicando il principio di DIRICHLET il secondo membro diverrà

$$\int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n) \int_{x_1}^{\eta_1} d\xi_1 \cdots$$

$$\cdots \int_{x_n}^{\eta_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, S_{j-h-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n) \, S_{i-h}(x_1, \cdots, x_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

il che dimostra il teorema.

Denotiamo ora con M il limite superiore dei valori assoluti di S_0; ne risulta come conseguenza che

$$(2) \qquad |S_i| \leq M^{i+1} \frac{(|y_1 - x_1|)^i}{i!} \frac{(|y_2 - x_2|)^i}{i!} \cdots \frac{(|y_n - x_n|)^i}{i!}.$$

Infatti se ammettiamo soddisfatta la precedente relazione per il valore i, avremo, ponendo nella (1) $i + 1$ in luogo di i, e prendendo $j = 1$,

$$|S_{i+1}| \leq M^{i+2} \left| \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y_1 - \xi_1)^i}{i!} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} \frac{(y_2 - \xi_2)^i}{i!} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} \frac{(y_n - \xi_n)^i}{i!} d\xi_n \right|$$

$$= M^{i+2} \frac{(|y_1 - x_1|)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{(|y_2 - x_2|)^{i+1}}{(i+1)!} \cdots \frac{(|y_n - x_n|)^{i+1}}{(i+1)!}$$

il che prova la proposizione.

Dalla (2) segue

$$|S_i| \leq M^{i+1} \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^i}{i!} \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^i}{i!} \cdots \frac{(\beta_n - \alpha_n)^i}{i!}$$

e perciò la serie

$$(3) \qquad F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) = -\sum_0^{\infty} S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione finita e continua delle variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$.

3. Operiamo ora sulla F_0 nello stesso modo tenuto colla S_0; costruiamo cioè le funzioni

$$F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, F_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

e formiamo la serie uniformemente convergente

$$-\sum_0^\infty F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n).$$

Dico che la sua somma sarà S_0.

Per provarlo si può seguire lo stesso metodo tenuto nella Nota citata [2] per dimostrare il teorema medesimo nel caso in cui S_0 è una funzione di due sole variabili; ma si può anche far uso di un altro procedimento come ora mostreremo.

Si ponga il coefficiente binomiale

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!} = m_i \quad , \quad (i > 0) \quad ; \quad m_0 = 1$$

e cominciamo dal dimostrare che

$$(4) \qquad F_i = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m \, m_i \, S_m = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \, m_i \, S_m .$$

Infatti questa formula è vera per $i = 0$.

Supponiamola verificata per valori dell'indice inferiori ad i e mostriamo che è vera per l'indice i. A tal fine poniamo un apice ad una qualsiasi funzione F o S, quando alle y_h si sostituiscono le ξ_h, e poniamo due apici quando le ξ_h si sostituiscono invece alle x_h. Avremo allora, applicando le note regole pel prodotto delle serie,

$$F'_{i-j} \, F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_0^m {}_h \, (m-h)_{i-j} \, h_{j-1} \, S'_{m-h} \, S''_h ,$$

e per la convergenza uniforme della serie

$$F_i = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F'_{i-j} \, F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_0^m {}_h \, (m-h)_{i-j} \, h_{j-1} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S'_{m-h} \, S''_h$$

$$= (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \, S_{m+1} \sum_0^m {}_h \, (m-h)_{i-j} \, h_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \, (m+1)_i \, S_{m+1} = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m \, m_i S_m .$$

(2) *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Rendiconti R. Accad. dei Lincei» fascicolo del 15 marzo 1896, § 2 [in questo vol.: XIX, pp. 255-262].

La (4) resta dunque provata. Ne segue

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_i \mathrm{F}_i = \mathrm{S}_0 + \sum_{1}^{\infty} \mathrm{S}_m (m_0 - m_1 + m_2 - \cdots \pm m_m).$$

Ma per una nota proprietà dei coefficienti binominali

$$m_0 - m_1 + m_2 - \cdots = m_m = 0,$$

onde

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_i \mathrm{F}_i = \mathrm{S}_0$$

come volevasi dimostrare.

4. Riprendiamo la (3); da essa segue

$$\mathrm{F}'_0 \mathrm{S}''_0 = -\sum_{0}^{\infty}{}_i \mathrm{S}'_i \mathrm{S}''_0,$$

$$\mathrm{F}''_0 \mathrm{S}'_0 = -\sum_{0}^{\infty}{}_i \mathrm{S}''_i \mathrm{S}'_0,$$

quindi per la convergenza uniforme delle serie

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{F}'_0 \mathrm{S}''_0 = -\sum_{0}^{\infty} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{S}'_i \mathrm{S}''_0 = -\sum_{1}^{\infty} \mathrm{S}_i = \mathrm{F}_0 + \mathrm{S}_0,$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{F}''_0 \mathrm{S}'_0 = -\sum_{0}^{\infty} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{S}''_i \mathrm{S}'_0 = -\sum_{1}^{\infty} \mathrm{S}_i = \mathrm{F}_0 + \mathrm{S}_0,$$

e per conseguenza

$$\mathrm{F}_0 + \mathrm{S}_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{F}'_0 \mathrm{S}''_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{F}''_0 \mathrm{S}'_0 .$$

5. Riassumendo i diversi risultati ottenuti potremo enunciare il teorema seguente:

Posto

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{F}_0 (x_1, \cdots, x_n \,|\, y_1, \cdots, y_n) = -\sum_{0}^{\infty} \mathrm{S}_i (x_1, \cdots, x_n \,|\, y_1, \cdots, y_n)$$

in cui

$$\mathrm{S}_i (x_1, \cdots, x_n \,|\, y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{y_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, \mathrm{S}_{i-j} (x_1, \cdots, x_n \,|\, \xi_1, \cdots, \xi_n) \, \mathrm{S}_{j-1} (\xi_1, \cdots, \xi_n \,|\, y_1, \cdots, y_n);$$

se la funzione $S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$ *da cui si parte è finita e continua per valori di* x_i, y_i *compresi fra* α_i e β_i, *anche* $F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$ *sarà una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi entro gli stessi limiti: e avremo la formula reciproca della* (A), *cioè*

$$(\mathrm{A}') \qquad S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) = -\sum_0^\infty F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

in cui

$$F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, F_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n).$$

Inoltre sussisterà la relazione

$$(\mathrm{B}) \qquad F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) + S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_0(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, S_0(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_0(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n) \, S_0(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n).$$

6. Consideriamo una funzione finita e continua qualunque delle $2n$ variabili $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n$ il cui simbolo sia una lettera maiuscola, per esempio H. Posto $S_0 = -H$, si calcoli la corrispondente F_0. Denoteremo nel seguito, per uniformità di notazione, la $-F_0$ colla lettera minuscola cioè porremo

$$h = -F_0.$$

Se H oltre essere funzione delle $2n$ variabili $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n$ è funzione continua di altri m parametri $z_1, z_2, \cdots, z_m$, dalla precedente costruzione risulterà che anche h sarà funzione continua degli stessi parametri. Noi scriveremo

$$H = H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m),$$

$$h = h(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m);$$

o anche più semplicemente

$$H = H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n),$$

$$h = h(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

se vorremo porre in evidenza le sole variabili di cui si tien conto nel calcolo pel passaggio dall'una all'altra funzione.

La relazione (B), mediante le H, h, si scriverà

$$(5)\qquad -\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)-h(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n)\,h(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,\mathrm{H}(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)\,h(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

7. Abbiasi ora la relazione funzionale

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\varphi(y_1,\cdots,y_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{y_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{y_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

in cui φ denota una funzione finita e continua.

Moltiplicando per $h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)\,dy_1,\cdots,dy_n$ e integrando rispettivamente fra i limiti $\alpha_1, z_1; \alpha_2, z_2;\ldots,\alpha_n, z_n$, in cui $\beta_i > z_i > \alpha_i$, si otterrà

$$\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n\,f(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$=\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n\,\varphi(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{z_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\int_{x_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{x_n}^{z_n}dy_n\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n|y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n|z_1,\cdots,z_n)$$

e a cagione della (5) il secondo membro diverrà

$$=-\int_{\alpha_1}^{z_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$=\varphi(z_1,\cdots,z_n)-f(z_1,\cdots,z_n).$$

Avremo quindi

$$\varphi(z_1,\cdots,z_n)=f(z_1,\cdots,z_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n\,f(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n).$$

Potremo dunque enunciare il teorema:

La relazione funzionale

$$f(y_1, \cdots, y_n) = \varphi(y_1, \cdots, y_n) \tag{C}$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1, \cdots, x_n) \, \mathrm{H}(x_1, \cdots, x_n \,|\, y_1, \cdots, y_n)$$

si inverte mediante la formola

$$\varphi(z_1, \cdots, z_n) = f(z_1, \cdots, z_n) \tag{C'}$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, f(y_1, \cdots, y_n) \, h(y_1, \cdots, y_n \,|\, z_1, \cdots, z_n)$$

in cui h si calcola dalla H *mediante le formole precedenti.*

8. Non sempre i problemi d'inversione si riducono immediatamente alla forma precedente in modo da risolverli applicando subito il procedimento indicato. Per gl'integrali semplici (3) la detta riduzione è immediata, invece la questione si presenta in modo molto complicato nel caso di integrali multipli. Per chiarire questo fatto si consideri, per esempio, il problema di determinare $\varphi(x_1, x_2)$ dalla relazione funzionale

$$\theta(y_1, y_2) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{H}(x_1, x_2 \,|\, y_1, y_2). \tag{6}$$

Derivando la precedente espressione rapporto ad y_1 e ad y_2 otterremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1 \partial y_2} = \varphi(y_1, y_2) \, \mathrm{H}(y_1, y_2 \,|\, y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial \mathrm{H}(x_1, y_2 \,|\, y_1, y_2)}{\partial y_1} dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \frac{\partial \mathrm{H}(y_1, x_2 \,|\, y_1, y_2)}{\partial y_2} dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \mathrm{H}(x_1, x_2 \,|\, y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}.$$

Supposto $\mathrm{H}(y_1, y_2 \,|\, y_1, y_2) \lesseqgtr 0$, dividendo per questa funzione la relazione precedente, essa potrà scriversi sotto la forma

$$f(y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \, \mathrm{T}(x_1 \,|\, y_1 ; y_2) \, dx_1 \tag{7}$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \, \mathrm{V}(x_2 \,|\, y_2 ; y_1) \, dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{S}(x_1, x_2) \,|\, y_1, y_2)$$

che è evidentemente ben diversa dalla (C).

(3) Cfr. Nota citata § 4.

9. In generale, allorché $H(y_1, \cdots, y_n \mid y_1, \cdots, y_n) \gtrless 0$ la equazione funzionale

$$(8) \qquad \theta(y_1, \cdots, y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n\, \varphi(x_1, \cdots, x_n)\, H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

condurrà, derivandola rapporto ad $y_1, y_2, \cdots, y_n$, e quindi dividendo per $H(y_1, \cdots, y_n \mid y_1, \cdots, y_n)$, ad una relazione in cui il primo membro è noto ed il secondo contiene la somma della funzione incognita e di integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e sotto ai quali comparisce la funzione incognita stessa. Essa avrà quindi la forma

$$(9) \qquad f(y_1, \cdots, y_n) = \varphi(y_1, \cdots, y_n) + \sum_1^n {}_h \Sigma_{i_1 \cdots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})\, T_{i_1 \cdots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{i_1}, \cdots, y_{i_h}; y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})$$

nella quale $i_1, \cdots, i_n$ denota una permutazione dei numeri $1, 2, \cdots, n$; con $\varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})$ si intende la funzione $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ in cui si sono sostituite $y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n}$ al posto di $x_{i_{h+1}}, \cdots, x_{i_n}$; e $\Sigma_{i_1 \cdots i_h}$ indica una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni h ad h degl'indici $1, 2, \cdots, n$. La f e le $T_{i_1 \cdots i_h}$ che compariscono nella formola precedente sono funzioni note.

Per ricondurre la equazione funzionale (9) alla forma (C) bisognerà trasformarla in modo da far comparire nel secondo membro due soli termini, cioè il primo termine $\varphi(y_1, \cdots y_n)$ ed un solo integrale multiplo.

Supponiamo per un momento che si sia riesciti a trasformare la relazione funzionale (9) in modo da eliminare nel secondo membro tutti gli integrali semplici, doppii ecc., fino a quelli d'ordine $r - 1$, e quindi che la Σ_h anziché da 1 ad n sia estesa da r ad n. Essa allora sarà ridotta al tipo

$$(10) \qquad f(y_1, \cdots, y_n) - \varphi(y_1, \cdots, y_n) = \sum_r^n {}_h \Sigma_{i_1 \cdots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})\, T_{i_1 \cdots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{i_1}, \cdots, y_{i_h}; y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n}).$$

Mostriamo come, giunti a questo punto, sia possibile trasformare l'equazione funzionale in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r.

Sia $s_1, \cdots, s_r$ una delle combinazioni d'ordine r degl'indici $1, 2, \cdots, n$, a cui nel secondo membro della equazione precedente corrisponda un integrale d'ordine r.

Si sostituisca in ambo i membri della equazione (10) $z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}$ in luogo di $y_{s_{r+1}}, \cdots, y_{s_n}$; quindi si moltiplichino ambo i membri per

$$(11) \qquad t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})\, dy_{s_1} \cdots dy_{s_r}$$

e si integri rispettivamente rapporto ad ogni y_{s_q} da a_{s_q} a z_{s_q}. Denotiamo con (D) la equazione che così si ottiene; il suo primo membro sarà

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} [f(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$- \varphi(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})]\, t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Per trovare l'espressione del secondo membro, consideriamo il termine generico del secondo membro della (10) corrispondente alla combinazione $i_1, \cdots, i_h$ di indici e supponiamo che g di essi, $i_1, \cdots, i_g$, siano rispettivamente eguali a $s_1, \cdots, s_g$, mentre i rimanenti $i_{g+1}, \cdots, i_h$ siano diversi dalle $s_{g+1}, \cdots, s_r$. Allora, dopo la moltiplicazione pel fattore (11) e le successive integrazioni, il termine stesso assumerà la forma

$$(12) \qquad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{s_1}}^{y_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_g}}^{y_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}})$$

$$\cdot T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{s_1}, \cdots, y_{s_g}, z_{i_{g+1}}, \cdots, z_{i_h}; y_{s_{g+1}},$$

$$\cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) \cdot t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Se noi applichiamo il principio di DIRICHLET ad ogni integrale eseguito rapporto a $y_{s_1}, \cdots, y_{s_g}$ ed al corrispondente integrale rapporto ad $x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}$, la espressione precedente potrà scriversi:

$$(12') \qquad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) L,$$

avendo posto

$$(13) \quad L = \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{x_{s_g}}^{z_s} dy_{s_g}\, T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{s_1}, \cdots, y_{s_g},$$

$$z_{i_{g+1}}, \cdots, z_{i_h}; y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) \cdot t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Scriviamo nella (12') $x_{s_{g+1}}, \cdots, x_{s_r}$, invece di $y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}$, e chiamiamo L' il risultato di questa sostituzione eseguita su L; la (12') acquisterà la espressione

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, x_{s_{g+1}}, \cdots, x_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) \mathrm{L}'$$

nella quale la funzione incognita φ è moltiplicata per una funzione nota L' e comparisce sotto ad un integrale multiplo d'ordine $r + h - g$ e quindi d'ordine inferiore o eguale ad n.

Dai precedenti risultati segue che il secondo membro dell'equazione (D) assumerà la forma

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \cdot$$

$$\cdot t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) + \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum\nolimits_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n}) \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} | z_{i_1}, \cdots, z_{i_h}; z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})$$

in cui si è scritto separatamente dapprima il solo termine nel quale φ figura sotto ad un integrale d'ordine r, mentre gli altri che vengono successivamente contengono la funzione incognita sotto ad integrali multipli i cui ordini vanno da $r + 1$ ad n. Le $\mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}$ saranno funzioni note che si dedurranno facilmente dalle precedenti L.

Tenendo ora conto della relazione (vedi form. (5))

$$\int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \cdot$$

$$\cdot t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$= - \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$- t_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

la equazione (D) si scriverà

$$(14)\qquad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{i_1}\cdots\int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r}\,\varphi(x_{s_1},\cdots,x_{s_r},z_{s_{r+1}},\cdots,z_{s_n})\cdot$$

$$\cdot T_{s_1\cdots s_r}(x_{s_1},\cdots,x_{s_r}\,|\,z_{s_1},\cdots,z_{s_r};z_{s_{r+1}},\cdots,z_{s_n}) = -F_{s_1\cdots s_r}(z_1,\cdots,z_n)$$

$$+\sum_{r+1}^{n}{}_h \sum\nolimits_{i_1\cdots i_h}\int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1}\cdots\int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\,\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_h},z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n})\cdot$$

$$\cdot T^{(1)}_{i_1\cdots i_h}(x_{i_1},\cdots,x_{i_h}\,|\,z_{i_1},\cdots,z_{i_h};z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n})$$

in cui $F_{s_1\ldots s}(z_1,\cdots,z_n)$ è una funzione nota e precisamente

$$F_{s_1\cdots s_r}(z_1,\cdots,z_n)=\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} f(y_{s_1},\cdots,y_{s_r},z_{s_{r+1}},\cdots,z_{s_n})\,t_{s_1\cdots s_r}(y_{s_1},\cdots,y_{s_r}\,|\,z_{s_1},\cdots,z_{s_r};z_{s_{r+1}},\cdots,z_{s_n}).$$

Formiamo le equazioni analoghe alla (14) che si ottengono prendendo tutte le combinazioni $s_1,\cdots,s_r$ degli n indici r ad r. Sommandole, il primo membro risulterà tale che il suo valore ricavato dalla (10) assumerà la forma

$$f(z_1,\cdots,z_n)-\varphi(z_1,\cdots,z_n)-\sum_{r+1}^{n}{}_h\int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\,\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_h},z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n})\,T_{i_1\cdots i_h}(x_{i_1},\cdots,x_{i_h}\,|\,z_{i_1},\cdots,z_{i_h};z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n})$$

e perciò, denotando con $T^{(2)}_{i_1\cdots i_h}$ delle quantità note, otterremo l'equazione

$$f(z_1,\cdots,z_n)+\Sigma_{i_1\cdots i_r}F_{i_1\cdots i_r}(z_1,\cdots,z_n)=\varphi(z_1,\cdots,z_n)-\sum_{r+1}^{n}{}_h\sum\nolimits_{i_1\cdots i_h}\int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\,\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_h},z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n})\,T^{(2)}_{i_1\cdots i_h}(x_{i_1},\cdots,x_{i_h}\,|\,z_{i_1},\cdots,z_{i_h};z_{i_{h+1}},\cdots,z_{i_n}).$$

L'equazione funzionale è stata dunque trasformata in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r. Così procedendo noi potremo perciò dalla (9) eliminare successivamente gl'integrali di 1°, 2°, 3°, ⋯ ordine finché essa non si riduca alla forma (C).

Ogni qual volta una equazione della forma (8) sarà tale che θ e H saranno finite continue e derivabili, e $H(y_1, y_2, \cdots y_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sarà diversa da zero, noi potremo, col metodo indicato, ricavare la φ, supponendo naturalmente che sia $\theta = 0$ per $y_i = \alpha_i$.

10. Come esempio consideriamo il caso della equazione (6) che abbiamo ricondotto al tipo (7).

Una prima trasformazione, ottenuta eliminando gl'integrali del primo ordine, ridurrà questa equazione alla forma

$$(15) \qquad f(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} t(x_1 \mid z_1 ; z_2) f(x_1, z_2)\, dx_1 + \int_{\alpha_2}^{z_2} v(x_2 \mid z_2 ; z_1) f(z_1, x_2)\, dx_2$$

$$= \varphi(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, M(x_1, x_2 \mid z_1, z_2)\, \varphi(x_1, x_2)$$

in cui

$$M(x_1, x_2 \mid z_1, z_2) = S(x_1, x_2 \mid z_1, z_2) + t(x_1 \mid z_1 ; z_2)\, V(x_2 \mid z_2, x_1)$$

$$+ v(x_2 \mid z_2 ; z_1)\, T(x_1 \mid z_1 ; x_2) + \int_{x_1}^{z_1} t(\xi_1 \mid z_1 ; z_2)\, S(x_1, x_2 \mid \xi_1, z_2)\, d\xi_1$$

$$+ \int_{x_2}^{z_2} v(\xi_2 \mid z_2 ; z_1)\, S(x_1, x_2 \mid z_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

Chiamando $g(z_1, z_2)$ il primo membro della (15), dalla (C′) si ricaverà finalmente

$$\varphi(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, m(x_1, x_2 \mid z_1, z_2)\, g(x_1, x_2) .$$

11. Accenniamo ora brevemente al caso in cui si abbiano ν equazioni del tipo

$$(16) \qquad \theta_s(y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \sum_1^{\nu} {}_i\, \varphi_i(x_1, \cdots, x_n)\, H_{is}(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n), \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu)$$

colle ν funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\nu$. Per risolverle cominciamo dal derivarle rispetto ad $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Se il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}, \cdots, H_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{\nu 1}, \cdots, H_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

in cui si sono fatte le $x_i = y_i$, è diverso da zero, potremo facilmente porre [4] la (16) sotto la forma

$$(17) \qquad f_s(y_1, \cdots, y_n) = \varphi_s(y_1, \cdots, y_n) + K_s, \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu)$$

in cui f_s è una funzione nota e K_s è una somma d'integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e che contengono linearmente le funzioni incognite. Supponendo note $\varphi_2 \ldots \varphi_\nu$, dalla prima delle (17) potremo ricavare φ_1 mediante il procedimento esposto superiormente. Sostituendone la espressione nelle successive $\nu - 1$ equazioni, avremo un sistema di $\nu - 1$ equazioni che conservano il tipo (17) dalle quali φ_1 è eliminata. Così procedendo per successive eliminazioni si ricondurrà la questione a risolvere una sola equazione funzionale del tipo esaminato con una sola funzione incognita.

(4) Cfr. Nota citata § 5.