41.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES.

[*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXVII. (1879), pp. 217—219.]

(1) SOIT f une forme binaire $(a, b, c, \ldots l \between x, y)^i$, ϕ un covariant de f de l'ordre ϵ et $F(a, b, c, \ldots l)$ le coefficient de x^ϵ dans ϕ. Supposons que si dans la forme f on remplace y par $y - \dfrac{Y}{X}x$, les coefficients $a, b, c, \ldots l$ se changent en $a', b', c', \ldots l'$. Cela posé, si dans le covariant ϕ on remplace y, x par Y, X, on sait que ϕ se change en $X^\epsilon F(a', b', c', \ldots l')$.

(2) Soit $(a_0, a_1, \ldots a_{2\epsilon} \between x, y)^{2\epsilon}$ une forme binaire qui a toutes ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\epsilon}$ (c. à d. les valeurs de $\dfrac{y}{x}$, qui font évanouir la forme) réelles, et soit

$$(-1)^\epsilon \left\{a_0 a_{2\epsilon} - 2\epsilon \,.\, a_1 a_{2\epsilon-1} + \frac{2\epsilon(2\epsilon-1)}{2} a_2 a_{2\epsilon-2} - \ldots\right\} \qquad (1)$$

son invariant quadratique dont le signe est fixé de sorte que son dernier terme proportionnel à $a_\epsilon{}^2$ ait le signe positif. Cet invariant divisé par le carré de $a_{2\epsilon}$ peut d'ailleurs, comme on sait, être présenté (à un facteur numérique près) sous la forme d'une somme de produits tels que

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \ldots (\alpha_{2\epsilon-1} - \alpha_{2\epsilon})^2,$$

par conséquent cet invariant est positif pour les formes à racines réelles.

Considérons à present la forme binaire $(a_0, a_1, \ldots a_{2\epsilon} \ldots a_{2\epsilon+\eta} \between x, y)^{2\epsilon+\eta}$ de l'ordre $2\epsilon + \eta$, qui ait également toutes ses racines réelles, alors l'expression (1) formée par rapport aux coefficients de la nouvelle forme gardera son signe positif, car en différentiant η fois de suite la nouvelle forme on retombe sur la forme binaire de l'ordre 2ϵ d'où l'on est parti.

(3) Remplaçons dans f la variable y par $y - \frac{Y}{X}x$ et supposons que Y, X soient des quantités réelles. Cette substitution ne changera en rien le caractère de la forme f relatif à la réalité de ses racines. Donc en combinant les deux observations précédentes on en conclut le résultat suivant:

Soit f une forme binaire qui a toutes ses racines réelles et ϕ un de ses covariants du second degré dans les coefficients, ϕ sera d'un signe invariable, c. à d. *si toutes les racines de f sont réelles, toutes les racines de tous les quadricovariants* (c. à d. des covariants du second degré) *de f sont imaginaires.*

POSTSCRIPTUM.

M. Schramm, dans un mémoire inséré dans les *Annali di Matematica,* année 1867, avait déjà remarqué la propriété démontrée plus haut pour le cas du Hessien en se servant des fonctions covariantives en x, y, qu'il a démontré pouvoir remplacer les fonctions de Sturm en ce qui regarde la détermination du *nombre total* des racines réelles d'une équation.

M. Schramm a obtenu ces formules par une certaine transformation opérée sur celles qui portent mon nom ; mais on peut les obtenir immédiatement en se servant de la loi d'inertie pour les formes quadratiques.

En supposant que $f(x) = 0$ est une équation algébrique dont les racines sont $e_1, e_2, \ldots e_n$, en écrivant

$$\Phi = \sum_{i=n}^{i=1} (\phi_1 e_i u_0 + \phi_2 e_i u_1 + \ldots + \phi_n e_i u_n)^2$$

où $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ sont des fonctions rationnelles quelconques, on voit très facilement que l'inertie de Φ est égale à $n - 2\nu$, ν étant le nombre de *paires* de racines imaginaires. Si l'on pose

$$\phi_1 e = 1,\ \phi_2 e = e,\ \ldots\ \phi_n e = e^{n-1},$$

la fonction quadratique Φ aura pour déterminant l'expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

De plus en considérant les mineurs successifs

$$s_0 \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \Delta$$

on sait que le nombre de permanences de signes dans cette série exprimera l'inertie de ϕ, c. à d. sera égal à $n - 2\nu$.

Comme on a d'ailleurs

$$s_0 = n, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma (e_1 - e_2)^2, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2, \quad \ldots$$

on déduit immédiatement de là la règle de Sturm pour le nombre total des racines réelles et imaginaires.

Si au lieu de poser $\phi_i e = e^{i-1}$ on posait $\phi_i e = \dfrac{1}{(\lambda - e)^{i-1}}$, λ étant une constante réelle quelconque, on obtiendrait de même une série de termes où le nombre de permanences serait encore égal à $n - 2\nu$.

En multipliant ces termes respectivement par des puissances paires d'un degré convenable de $(\lambda - e_1)(\lambda - e_2) \ldots (\lambda - e_n)$, c. à d. par des quantités réelles et positives, on obtient les fonctions de Schramm avec cette seule différence que x et y s'y trouvent remplacées par λ et 1. Mais on fera disparaître cette différence en posant $\dfrac{x}{y}$ à la place de λ et en multipliant par la puissance paire de y qui rend l'expression entière.