31.

SUR LA VALEUR MOYENNE DES COEFFICIENTS DANS LE DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT GAUCHE OU SYMÉTRIQUE D'UN ORDRE INFINIMENT GRAND ET SUR LES DÉTERMINANTS DOUBLEMENT GAUCHES *.

[*Comptes Rendus*, LXXXIX. (1879), pp. 24—26.]

DANS un déterminant ou gauche ou symétrique, j'ai fait voir ailleurs que tous les coefficients qui ne sont pas des unités seront des puissances de 2. J'ajoute que, dans le dernier cas, si n est l'ordre du déterminant, la plus haute puissance de 2 qui entre comme coefficient sera la partie entière de $\frac{n}{3}$ et dans le premier cas $\frac{n}{4}$ (n dans ce cas étant un nombre pair).

M. Cayley a le premier démontré que, si le nombre des termes distincts dans le développement d'un déterminant symétrique de l'ordre x est $(1.2.3 \ldots x)\,\Omega_x$, Ω_x aura pour sa fonction génératrice $\frac{e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{(1-t)}}$; et, de ma part, j'ai démontré que, si le nombre des termes distincts dans un déterminant gauche de l'ordre $2x$ est $1.3.5 \ldots (2x-1)\,\omega_x$, ω_x aura pour sa fonction génératrice $\sqrt[4]{\left(\frac{e^t}{1-t}\right)}$.

Ces deux formules suffisent pour la solution du problème proposé. Commençons par le déterminant gauche. En vertu de la formule donnée, on aura

$$\omega_x = \left[1 + x + 1.5x + 1.5.9\frac{x(x-1)}{2} + 1.5.9.13\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + \ldots + 1.5.9 \ldots (4x-3)\right]\frac{1}{2^x},$$

nombre qui est toujours entier, car ω_x est assujetti à satisfaire à l'équation $\omega_x = (2x-1)\,\omega_{x-1} - (x-1)\,\omega_{x-2}$; de sorte que ω_0, ω_1 étant 1, 1, tous les ω

[* See below, p. 257.]

seront des nombres entiers. En posant $1.3.5\ldots(2x-1)\,\omega_x = u_{2x}$, on trouve facilement, à l'aide de cette expression, que, pour $x=\infty$,

$$\frac{u_{2x}}{1.2.3\ldots 2x} = e^{\frac{1}{4}}\frac{1.5.9\ldots(4x-3)}{4.8.12\ldots 4x}.$$

De plus, par une méthode bien connue, on trouve

$$\log\{1.5.9\ldots(4x-3)\} = C - x + \frac{3}{4} + \frac{4x-1}{4}\log(4x-3)$$
$$+\frac{1}{12}\frac{d}{dx}\log(4x-3) - \frac{1}{720}\frac{d^3}{dx^3}\log(4x-3)+\ldots$$
$$=\left(C-\frac{\log 4}{4}\right) - x + \log 4x + x\log x + \frac{A}{x}\ldots.$$

On a aussi

$$\log(4.8\ldots 4x) = x\log 4 + \log\sqrt{(2\pi)} + x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \frac{A'}{x}\ldots.$$

On aura donc

$$\frac{1.5\ldots(4x-3)}{4.8\ldots 4x} = \frac{e^C}{2\sqrt{(\pi)}\,x^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{},$$

et, puisque la somme des coefficients pris tous positivement en u_{2x} est égale à $\{1.3.5\ldots(2x-1)\}^2$ et $\dfrac{\{1.3.5\ldots(2x-1)\}^2}{1.2\ldots 2x} = \dfrac{1}{\sqrt{(\pi x)}}$, on a finalement la valeur moyenne des coefficients, c'est-à-dire

$$\frac{\{1.3.5\ldots(2x-1)\}^2}{u_{2x}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{4}+C}}\,x^{\frac{1}{4}}.$$

Pour trouver C je me sers de la formule

$$C = \log\{1.5.9\ldots(4x-3)\} - \frac{3}{4}$$
$$+x-\frac{4x-1}{4}\log(4x-3) - \frac{1}{3}\frac{1}{4x-3} + \frac{8}{45}\frac{1}{(4x-3)^3}\ldots$$

et, en mettant $4x-3=125$, on trouve, à l'aide des Tables ordinaires de logarithmes,

$$C = -0{,}022508\ldots,$$

ce qui donne pour la valeur moyenne cherchée $(1{,}593\ldots)\,x^{\frac{1}{4}}$.

Comme vérification, j'ai fait calculer u_4, u_8, u_{12}, u_{16}, par le moyen des formules

$$u_{2x} = 1.3.5\ldots(2x-1)\,\omega_x,$$
$$\omega_x = (2x-1)\,\omega_{x-1} - (x-1)\,\omega_{x-2},$$

et, en posant

$$\frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{\omega_x} = \rho_x x^{\frac{1}{4}},$$

j'ai trouvé

$$\rho_4 = 1{,}262\ldots,\quad \rho_8 = 1{,}485\ldots,\quad \rho_{12} = 1{,}528\ldots,\quad \rho_{16} = 1{,}551\ldots,$$

ce qui s'accorde très bien avec la valeur $\rho_\infty = 1{,}593\ldots$.

Pour le déterminant symétrique, en vertu de la formule de M. Cayley, on sait que la valeur moyenne cherchée est le coefficient de t^x dans $\dfrac{e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{(1-t)}}$, qui sera le même, quand $x=\infty$, que dans $\dfrac{e^{\frac{3t}{4}}}{\sqrt{(1-t)}}$, et l'on trouve facilement que cette valeur est égale à $e^{-\frac{3}{4}}\sqrt{(\pi x)}$.

J'ajoute quelques mots sur les déterminants *doublement* gauches, c'est-à-dire gauches par rapport à l'une et à l'autre des deux diagonales.

1°. Je trouve que, pour que ces déterminants ne s'évanouissent pas, l'ordre doit être divisible par 4.

2°. Considérons la *racine carrée* d'un déterminant doublement gauche de l'ordre $4x$. Je trouve que la somme de ses coefficients pris tous positivement est égale à

$$1.2.5.6.9.10\ldots(4x-3)(4x-2).$$

3°. Soit ϕ_x le nombre des termes *distincts* dans cette racine carrée. Je trouve qu'en posant $\phi_x = 2.4.6\ldots(4x-2)\,\psi_x$, ψ_x sera toujours un nombre entier défini par l'équation

$$\psi_x = (4x-3)\,\psi_{x-1} - 2x\psi_{x-2}, \quad \psi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1,$$

et que la fonction génératrice de ψ_x sera $\sqrt[8]{\left(\dfrac{e^t}{1-t}\right)}$, de sorte que

$$\psi_x = \left[1 + x + 1.9\,\frac{x(x-1)}{2} + 1.9.17\,\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\ldots \right.$$
$$\left. + 1.9.17\ldots(8x-7)\right] \div 2^x.$$

4°. On démontre facilement que deux des ψ consécutifs quelconques seront toujours premiers entre eux et que tous les coefficients dans la racine carrée du déterminant doublement gauche de l'ordre $4x$ sont des puissances de 2, dont la plus haute sera désignée par la partie entière de $\dfrac{4x}{8}$, c'est-à-dire de $\dfrac{x}{2}$.