22.

SUR LES COVARIANTS IRRÉDUCTIBLES DU QUANTIC DU SEPTIÈME ORDRE*.

[*Comptes Rendus*, LXXXVII. (1878), pp. 505—509.]

M. CAYLEY a eu la bonté de calculer pour moi, par une méthode propre à lui, la fraction génératrice pour le quantic $(x, y)^7$ dans sa forme réduite. Il trouve que son numérateur est

$$\begin{aligned}
& a^0 \,.\, 1 \\
& + a^1 \, (-x - x^3 - x^5) \\
& + a^2 \, (+x^2 + x^4 + 2x^6 + x^8 + x^{10}) \\
& + a^3 \, (-x^7 - x^9 - x^{11} - x^{13}) \\
& + a^4 \, (2x^4 + x^8 + x^{14}) \\
& + a^5 \, (x + 2x^3 - x^9 - x^{11}) \\
& + a^6 \, (-1 + 2x^2 - x^4 - x^8 - x^{10} + x^{12}) \\
& + a^7 \, (4x + 4x^5 - x^7 - x^9 + x^{11} - x^{13}) \\
& + a^8 \, (2 - x^2 - 3x^6 - 3x^8 - x^{10} - x^{12}) \\
& + a^9 \, (x + 3x^3 + x^5 - x^7 + 2x^9 + 2x^{13}) \\
& + a^{10} \, (-1 + 4x^2 - x^6 - 2x^8 - 2x^{10} - x^{14}) \\
& + a^{11} \, (5x + 3x^3 + 2x^5 - x^7 - 2x^9 - x^{11} + x^{13}) \\
& + a^{12} \, (5 + x^2 - 4x^6 - 6x^8 - 4x^{10} - x^{12} - 2x^{14}) \\
& + a^{13} \, (x - 4x^5 - 4x^7 - x^9 + x^{11} + 4x^{13}) \\
& + a^{14} \, (2 + 5x^2 + x^4 + x^6 - 2x^8 + 3x^{12} - x^{14}) \\
& + a^{15} \, (3x - x^3 - x^5 - 7x^7 - 5x^9 - x^{11} - x^{13}) \\
& + a^{16} \, (6 + 3x^2 + 3x^4 - 4x^6 - 3x^8 - x^{12} + 5x^{14}) \\
& + a^{17} \, (-x - 2x^3 - 9x^5 - 8x^7 - 4x^9 - 3x^{11} + 4x^{13}) \\
& + a^{18} \, (2 + 6x^2 + x^4 + 2x^6 + 2x^8 + x^{10} + 6x^{12} + 2x^{14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a^{36} x^{14} \\
& + a^{35} \, (-x^9 - x^{11} - x^{13}) \\
& + a^{34} \, (x^4 + x^6 + 2x^8 + x^{10} + x^{12}) \\
& + a^{33} \, (-x - x^3 - x^5 - x^7) \\
& + a^{32} \, (1 + x^6 + 2x^{10}) \\
& + a^{31} \, (-x^3 - x^5 + 2x^{11} + x^{13}) \\
& + a^{30} \, (x^2 - x^4 - x^6 - x^{10} - 2x^{12} - x^{14}) \\
& + a^{29} \, (-x + x^3 - x^5 - x^7 + 4x^9 + 4x^{13}) \\
& + a^{28} \, (-x^2 - x^4 - 3x^6 - 3x^8 - x^{12} + 2x^{14}) \\
& + a^{27} \, (2x + 2x^5 - x^7 + x^9 + 3x^{11} + x^{13}) \\
& + a^{26} \, (-1 - 2x^4 - 2x^6 - x^8 + 4x^{10} - x^{14}) \\
& + a^{25} \, (x - x^3 - 2x^5 - x^7 + 2x^9 + 3x^{11} + 5x^{13}) \\
& + a^{24} \, (2 - x^2 - 4x^4 - 6x^6 - 4x^8 + x^{10} + 5x^{14}) \\
& + a^{23} \, (+4x + x^3 - x^5 - 4x^7 - 4x^9 + x^{13}) \\
& + a^{22} \, (-1 + 3x^2 - 2x^4 + x^8 + x^{10} + 5x^{12} + 2x^{14}) \\
& + a^{21} \, (-x - x^3 - 5x^5 - 7x^7 - x^9 - x^{11} + 3x^{13}) \\
& + a^{20} \, (5 - x^2 - 3x^6 - 4x^8 + 3x^{10} + 3x^{12} + 6x^{14}) \\
& + a^{19} \, (4x - 3x^3 - 4x^5 - 8x^7 - 9x^9 - 2x^{11} - x^{13})
\end{aligned}$$

Quant au dénominateur, on sait d'avance qu'il est

$$(1 - ax)(1 - ax^3)(1 - ax^5)(1 - ax^7)(1 - a^4)(1 - a^6)(1 - a^8)(1 - a^{10})(1 - a^{12}).$$

Pour obtenir la fraction génératrice sous sa forme canonique, je multiplie le numérateur et le dénominateur de cette forme réduite chacun par

$$(1 + a^6)(1 + a^{10})(1 + ax)(1 + ax^3)(1 + ax^5).$$

[* See below, p. 144.]

Alors le dénominateur devient évidemment

$$(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})^2(1-a^{20})(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)(1-a^2x^{10})(1-ax^7)$$

et le numérateur devient $P+Q$ où, pour trouver Q, on n'a qu'à substituer, pour un terme quelconque Ka^jx^ϵ, le terme $Ka^{j'}x^{\epsilon'}$, avec la condition que

$$j+j'=55 \quad \text{et} \quad \epsilon+\epsilon'=23.$$

On voit que la fraction sera alors sous sa forme canonique, par la raison qu'on ne trouvera ni a^4, ni a^8, ni a^{12}, ni a^{20} dans le numérateur affecté du signe $-$. On comprend qu'en effectuant le développement de l'une ou l'autre expression, selon les puissances ascendantes de a et de x, le coefficient de a^jx^ϵ exprimera le nombre total des covariants du degré j dans les coefficients du quantic du septième ordre et de l'ordre ϵ dans les variables.

Je trouve alors, pour la valeur de P, l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
&a^0.1\\
&+a^3(x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11}+x^{15})\\
&+a^4(2x^4+x^6+2x^8+x^{10}+x^{14})\\
&+a^5(x+2x^3+2x^5+2x^7+2x^9-x^{17}-x^{21})\\
&+a^6(x^2+2x^4+3x^6+2x^8+2x^{12}-x^{14}-x^{16})\\
&+a^7(3x+x^3+5x^5+x^7+x^{11}-x^{13}-2x^{15}-x^{19}+x^{23})\\
&+a^8(2+3x^2+3x^4+6x^6+3x^{10}-2x^{12}-2x^{14}-x^{16}-2x^{18})\\
&+a^9(3x+5x^3+7x^5+2x^7+4x^9-x^{11}-2x^{13}-2x^{15}-3x^{17}-x^{19})\\
&+a^{10}(5x^2+4x^4+6x^6+6x^8-3x^{10}-3x^{12}+x^{14}-4x^{16}-x^{18}-x^{22})\\
&+a^{11}(5x+8x^3+11x^5-4x^7-2x^{11}+x^{13}-3x^{15}-x^{17})\\
&+a^{12}(4+9x^2+9x^4+12x^6+2x^{10}-7x^{12}-5x^{14}-4x^{16}-x^{20}+x^{22})\\
&+a^{13}(9x+8x^3+13x^5+5x^7-x^9\\
&\qquad -3x^{11}-13x^{13}-9x^{15}-3x^{17}-x^{19}+x^{21})\\
&+a^{14}(4+9x^2+12x^4+15x^6-2x^8-3x^{10}\\
&\qquad -10x^{12}-11x^{14}-8x^{16}-3x^{18}+3x^{22})\\
&+a^{15}(9x+12x^3+16x^5+6x^7+6x^9\\
&\qquad -7x^{11}-11x^{13}-9x^{15}-4x^{17}-x^{19}+2x^{21}+2x^{23})\\
&+a^{16}(5+14x^2+15x^4+12x^6+x^8-x^{10}\\
&\qquad -13x^{12}-4x^{14}-10x^{16}-x^{18}+3x^{20}+2x^{22})\\
&+a^{17}(12x+14x^3+17x^5-5x^7-3x^9-17x^{11}\\
&\qquad -16x^{13}-11x^{15}-5x^{17}+2x^{19}+3x^{21})\\
&+a^{18}(9+14x^2+14x^4+14x^6-4x^8-13x^{10}\\
&\qquad -21x^{12}-18x^{14}-18x^{16}-x^{18}+2x^{20}+5x^{22})\\
&+a^{19}(15x+16x^3+18x^5+27x^7-8x^9\\
&\qquad -19x^{11}-20x^{13}-20x^{15}-6x^{17}+2x^{21}+4x^{23})
\end{aligned}$$

$$+ a^{20}(6 + 14x^2 + 18x^4 + 12x^6 - 8x^8 - 14x^{10}$$
$$+ 2x^{12} - 18x^{14} - 13x^{16} + 2x^{18} + 5x^{20} + 6x^{22})$$
$$+ a^{21}(14x + 17x^3 + 19x^5 - x^7 - 8x^9 - 25x^{11}$$
$$- 23x^{13} - 14x^{15} - 2x^{17} + 4x^{19} + 8x^{21} + 4x^{23})$$
$$+ a^{22}(9 + 17x^2 + 15x^4 + 11x^6 - 8x^8 - 18x^{10}$$
$$- 31x^{12} - 17x^{14} - 13x^{16} + 6x^{18} + 9x^{20} + 9x^{22})$$
$$+ a^{23}(17x + 17x^3 - 20x^5 - 43x^7 - 18x^9 - 32x^{11}$$
$$- 26x^{13} - 22x^{15} - 4x^{17} + 9x^{19} + 9x^{21} + 5x^{23})$$
$$+ a^{24}(8 + 17x^2 + 14x^4 + 9x^6 - 19x^8 - 66x^{10}$$
$$- 37x^{12} - 24x^{14} - 17x^{16} + 8x^{18} + 9x^{20} + 12x^{22})$$
$$+ a^{25}(15x + 15x^3 + 17x^5 - 7x^7 - 27x^9 - 30x^{11}$$
$$- 32x^{13} - 23x^{15} + 3x^{17} + 9x^{19} + 12x^{21} + 9x^{23})$$
$$+ a^{26}(9 + 13x^2 + 14x^4 + 6x^6 - 20x^8 - 23x^{10}$$
$$- 35x^{12} - 19x^{14} - 10x^{16} + 10x^{18} + 14x^{20} + 14x^{22})$$
$$+ a^{27}(14x + 15x^3 + 13x^5 - 15x^7 - 18x^9 - 37x^{11}$$
$$- 31x^{13} - 17x^{15} + 3x^{17} + 14x^{19} + 14x^{21} + 6x^{23}).$$

Pour effectuer le tamisage, en observant qu'en vertu des formules de M. C. Jordan on peut négliger toute puissance de x dont l'exposant excède 15, on obtient, pour les termes positifs de P et de Q qu'on doit obtenir, la table suivante:

$$+ x^0(1 + 2a^8 + 4a^{12} + 4a^{14} + 5a^{16} + 9a^{18} + 6a^{20} + 9a^{22}$$
$$+ 8a^{24} + 9a^{26} + 6a^{28} + 9a^{30} + 5a^{32} + 4a^{34} + 4a^{36} + 2a^{40} + a^{48})$$
$$+ x\,(a^5 + 3a^9 + 5a^{11} + 9a^{15} + 12a^{17} + 15a^{19} + 14a^{21} + 17a^{23} + 15a^{25}$$
$$+ 14a^{27} + 14a^{29} + 12a^{31} + 9a^{33} + 6a^{35} + 5a^{37} + 2a^{39} + 3a^{41} + a^{43})$$
$$+ x^2(a^6 + 5a^8 + 5a^{10} + 4a^{12} + 9a^{14} + 14a^{16}$$
$$+ 14a^{18} + 14a^{20} + 17a^{22} + 17a^{24} + 13a^{26} + 14a^{28}$$
$$+ 12a^{30} + 9a^{32} + 8a^{34} + 2a^{36} + 3a^{38} + 2a^{40} + a^{42})$$
$$+ x^3(a^3 + 2a^5 + a^7 + 5a^9 + 8a^{11} + 8a^{13} + 12a^{15}$$
$$+ 14a^{17} + 16a^{19} + 17a^{21} + 17a^{23} + 15a^{25}$$
$$+ 15a^{27} + 14a^{29} + 9a^{34} + 9a^{33} + 5a^{35} + 2a^{37} + 3a^{39})$$
$$+ x^4(2a^4 + 2a^6 + 3a^8 + 4a^{10} + 9a^{12} + 12a^{14} + 15a^{16} + 14a^{18} + 14a^{20}$$
$$+ 15a^{22} + 14a^{24} + 14a^{26} + 14a^{28} + 9a^{30} + 9a^{32} + 4a^{34} + 2a^{36})$$
$$+ x^5(a^3 + 2a^5 + 5a^7 + 7a^9 + 11a^{11} + 13a^{13} + 16a^{15} + 17a^{17}$$
$$+ 18a^{19} + 19a^{21} + 17a^{25} + 13a^{27} + 10a^{29} + 8a^{31} + 6a^{33} + 2a^{35})$$
$$+ x^6(a^4 + 3a^6 + 6a^8 + 6a^{10} + 12a^{12} + 15a^{14} + 12a^{16}$$
$$+ 14a^{18} + 12a^{20} + 11a^{22} + 9a^{24} + 6a^{26} + 3a^{28} + 3a^{30})$$
$$+ x^7(a^3 + 2a^5 + a^7 + 2a^9 + 5a^{13} + 6a^{15} + 27a^{19})$$

$$+ x^8 (2a^4 + 2a^6 + 6a^{10} + a^{16} + a^{52})$$
$$+ x^9 (a^3 + 2a^5 + 4a^9 + 6a^{15} + a^{45} + a^{51})$$
$$+ x^{10} (a^4 + 3a^8 + 2a^{12} + a^{44})$$
$$+ x^{11} (a^3 + a^7 + 2a^{35} + 2a^{49})$$
$$+ x^{12} (2a^6 + 2a^{20} + a^{48} + a^{52})$$
$$+ x^{13} (a^{11} + 2a^{43} + 3a^{47} + a^{51})$$
$$+ x^{14} (a^4 + a^{10} + 6a^{40} + 4a^{46} + 2a^{50} + a^{52})$$
$$+ x^{15} (a^3 + a^{39} + 6a^{45} + 2a^{49} + 2a^{51}).$$

Le tamisage étant effectué (ce qu'on peut aisément opérer par simple inspection), les termes et les coefficients numériques, qui seuls restent sains et saufs, toute soustraction faite, seront les suivants·

$$1,\ 2a^8,\ 4a^{12},\ 4a^{14},\ 5a^{16},\ 9a^{18},\ a^{22},$$
$$a^5x,\ 3a^9x,\ 5a^{11}x,\ 9a^{15}x,\ 2a^{17}x,\ a^{19}x,$$
$$a^6x^2,\ 5a^8x^2,\ 5a^{10}x^2,\ 4a^{12}x^2,\ 4a^{14}x^2,$$
$$a^3x^3,\ 2a^5x^3,\ a^7x^3,\ 5a^9x^3,\ 5a^{11}x^3,$$
$$2a^4x^4,\ 2a^6x^4,\ 3a^8x^4,\ 4a^{10}x^4,$$
$$a^3x^5,\ 2a^5x^5,\ 5a^7x^5,\ 2a^9x^5,$$
$$a^4x^6,\ 2a^6x^6,\ 3a^8x^6,$$
$$a^3x^7,\ 2a^5x^7,$$
$$2a^4x^8,\ a^6x^8,$$
$$a^3x^9,\ 2a^5x^9,$$
$$a^4x^{10},$$
$$a^3x^{11},\ a^7x^{11},$$
$$a^4x^{14},$$
$$a^3x^{15}.$$

En ajoutant à ces termes ceux qui sont fournis par le dénominateur, c'est-à-dire

$$a^4,\ a^8,\ 2a^{12},\ a^{20},\ a^2x^2,\ a^2x^6,\ a^2x^{10},\ ax^7,$$

on a le tableau complet des invariants et covariants irréductibles du quantic du septième ordre, sous la convention qu'on comprend, par Ka^jx^ϵ, K covariants du degré j et de l'ordre ϵ. De même $2a^8$, a^8 signifiera trois invariants du degré 8; $4a^{12}$, $2a^{12}$ six invariants du degré 12. Le covariant dénoté en haut par a^3x^{15} démontre que la limite inférieure pour l'ordre des covariants d'un système illimité de quantics, chacun d'ordre inférieur à n, est actuellement atteinte quand $n=7$, et même quand le système illimité se réduit à un seul quantic, ce qui aussi a lieu pour $n=8$ et pour tous les ordres inférieurs, sauf pour $n=3$, dans lequel cas la limite 4, il est vrai, est atteinte; mais le système doit contenir au moins deux quantics. L'apparence des invariants, dont les degrés sont 14, 18 et 22 (nombres nécessairement pairs), est aussi digne d'observation. On en conclut (et même un seul de ces covariants servirait à établir la même conclusion) que $1-a^7$ paraîtra comme facteur dans la partie invariantive du dénominateur de la fraction génératrice pour tout quantic dont l'ordre est pair et plus grand que 10.