20.

SUR LE VRAI NOMBRE DES FORMES IRRÉDUCTIBLES DU SYSTÈME CUBO-BIQUADRATIQUE.

[*Comptes Rendus*, LXXXVII. (1878), pp. 445—448.]

En addition aux 61 formes irréductibles que j'ai trouvées dans une Communication précédente faite à l'Académie, M. Gundelfinger affirme l'existence de trois autres: deux du type 3.4.2 et une du type 4.5.1, où le premier, le deuxième et le troisième chiffre expriment respectivement le degré ou l'ordre de la forme dans les coefficients de la biquadratique, de la cubique et dans les variables.

Je me bornerai dans cette Note à démontrer qu'il n'existe nul covariant du type 3.4.2.

Ce que M. Gordan nomme une *Ueberschiebung*, je le nommerai une *alliance*: si f et ϕ représentent

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y)^m; \quad (b_0, b_1, \ldots)(x, y)^n,$$

l'alliance $(f, \phi)^i$, i n'étant pas plus grand ni que m ni que n, sera un covariant de l'ordre $m+n-2i$, dont le coefficient de x^{m+n-2i}, que je nommerai *son représentant*, est

$$(1, -1)^i (a_0 b_i, a_1 b_{i-1}, a_2 b_{i-2}, \ldots, a_i b_0).$$

Je considérai le système spécial composé de $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$ et de $(1, \beta, 0, 1)(x, y)^3$, où β sera traité comme un infinitésimal.

On aura donc

$$\begin{aligned}
0.1.3 &= x^3 + 3\beta x^2 y + y^3,\\
0.2.2 &= 0x^2 + xy + \beta y^3,\\
0.3.3 &= x^3 + 3\beta x^2 y - y^3,\\
0.4.6 &= x^6 - y^6 + 6\beta x^5 y,\\
1.0.4 &= ax^4 + 4bx^3 y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,\\
2.0.4 &= Ax^4 + 4Bx^3 y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4,
\end{aligned}$$

où $$A = ac - b^2, \quad C = \frac{2ae - bd - c^2}{3}, \quad D = \frac{be - cd}{2};$$

$$0.4.4 = x^2y^2 + \ldots,$$
$$2.0.8 = \ldots + e^2y^8,$$
$$0.3.9 = x^9 + \ldots.$$

Faisons $l = (1.0.4,\ 0.1.3)^3$, dont le type est $1.1.1$,
$m = (2.0.4,\ 0.1.3)^3$, „ $2.1.1$,
$n = \ldots$, „ $2.0.0$,
$p = \ldots$, „ $3.2.0$,
$r_1 = (1.0.4,\ 0.3.3)^3$, „ $1.3.1$,
$r_2 = (1.0.4,\ 0.3.5)^4$, „ $1.3.1$,
$s_1 = (2.0.4,\ 0.3.3)^3$, „ $2.3.1$,
$s_2 = (2.0.4,\ 0.3.5)^4$, „ $2.3.1$,
$s_3 = (2.0.8,\ 0.3.9)^8$, „ $2.3.1$,
$t_1 = (1.0.4,\ 0.4.6)^4$, „ $1.4.2$,
$t_2 = (1.0.4,\ 0.4.4)^3$, „ $1.4.2$,
$u = \ldots$ „ $0.2.2$.

Alors les huit produits mr_1, mr_2, ls_1, ls_2, ls_3, nt_1, nt_2, pu seront tous du type $3.4.2$.

En se servant de la notation $R\phi$ pour exprimer le coefficient de la plus haute puissance de x dans la forme la plus générale de ϕ, on obtient, pour le système spécial dont il s'agit,

$$Rl = a + 3c\beta - d, \quad Rm = A + 3C\beta - D,$$
$$Rr_1 = a + 3c\beta + d, \quad Rs_1 = A + 3C\beta + D,$$
$$Rr_2 = a + 12c\beta - 4d, \quad Rs_2 = A + 12C\beta - 4D;$$

donc
$$Rmr_1 = (a + d + 3c\beta)(A - D + 3C\beta),$$
$$Rmr_2 = (a - 4d + 12c\beta)(A - D + 3C\beta),$$
$$Rls_1 = (a - d + 3c\beta)(A + D + 3C\beta),$$
$$Rls_2 = (a - d + 3c\beta)(A - 4D + 12C\beta).$$

Rs_3 possédera évidemment le terme e^2.

Rt_1, en négligeant les termes contenant β, sera formé au moyen des deux séries de coefficients

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

et sera égal à e, et de même, sous la même supposition, Rt_2 sera formé au moyen des deux séries

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d, \\ 0 & 0 & 1 & 0, \end{array}$$

et sera égal à b.

De plus, $R(u)$ est absolument zéro, et

$$n = ae - 4bd + 3c^2.$$

On voit donc que $R(ls_3)$, seul des huit produits, contiendra le terme de^2, et conséquemment ne peut pas entrer dans une équation numérique quelconque entre ces produits. En le mettant de côté, on voit que, des sept produits qui restent, $R(nt_1)$ et $R(nt_2)$ contiendront, le premier, à lui seul, le terme c^2e, le second, à lui seul, le terme c^2b; conséquemment, en se souvenant que $R(pu) = 0$, ce n'est qu'entre Rmr_1, Rmr_2, Rls_1, Rls_2 qu'une liaison numérique (s'il y en a aucune) peut exister. Quant à ces quatre quantités, si même on ne tenait nul compte de β, une seule combinaison linéaire existe entre elles, pour laquelle la valeur est zéro, c'est-à-dire

$$3R(ls_1) - 2R(ls_2) - 3R(mr_1) + 2R(mr_2),$$

laquelle, en ayant égard à β, devient

$$(a - d + 3c\beta)(5A - 5D - 15C\beta) - (A - D + 3C\beta)(5a - 5d - 15c\beta),$$

c'est-à-dire $$30[(A - D)c - (a - d)C]\beta,$$

qui, évidemment, n'est pas zéro. Donc les huit covariants réductibles du type $3.4.2$, mr_1, mr_2, ls_1, ls_2, ls_3, nt_1, nt_2, pu pour le système spécial qu'on a considéré, et *à plus forte raison* pour le système cubico-biquadratique général, sont linéairement indépendants.

Trouvons le nombre total des covariants linéairement indépendants de ce type. En général, pour deux formes dont les ordres sont i, i', les covariants du type j, j', ϵ linéairement indépendants sont en nombre égal à $S - S'$, ou

$$S = \sum_{m=w}^{m=0} (m:i, j)(w - m:i', j') \quad \text{et} \quad S' = \sum_{m=w'}^{m=0} (m:i, j)(w' - m:i', j'),$$

$$w = \frac{ij + i'j' - \epsilon}{2}, \quad w' = w - 1,$$

$(m:i, j)$ représentant le nombre des compositions qu'on peut effectuer de m avec j chiffres (zéro y compris) dont nul ne surpasse i, ou bien avec i chiffres dont nul ne surpasse j.

Dans le cas actuel,

$$w = \frac{4.3 + 3.4 - 2}{2} = 11, \quad w' = 10,$$

$$i = j' = 4, \quad j = i' = 3.$$

En donnant à m les valeurs successives de 0 jusqu'à 11, on trouve pour $(m:3, 4)$ ou bien $(m:4, 3)$ les valeurs

$$1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 1,$$

et, en faisant la progression dans le sens inverse,

$$1, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1.$$

On a conséquemment

$$\begin{array}{rl} S & = 1 + 2 + 6 + 12 + 16 + 20 + 20 + 16 + 12 + 6 + 2 + 1, \\ S' & = \phantom{1 +{}} 2 + 3 + 8 + 12 + 20 + 16 + 20 + 12 + 8 + 3 + 2 \\ \text{et} \quad S - S' & = 1 \phantom{{}+2} + 3 + 4 + 4 \phantom{{}+20} + 4 - 4 \phantom{{}+12+8} - 2 - 1 - 1 \\ & = 8. \end{array}$$

Conséquemment le nombre *total* des covariants linéairement indépendants du type 3.4.2 n'est pas plus grand que le nombre des covariants de ce même type linéairement indépendants et *réductibles*: il n'y a donc pas de place *in rerum natura* pour les deux covariants quadratiques *irréductibles* du type 3.4.2 imaginés par M. Gundelfinger.

Dans une prochaine Communication j'entreprendrai l'examen de la seule forme qui reste à discuter, c'est-à-dire le covariant linéaire des degrés 4, 5 dans les coefficients, qui se trouve dans la Table de M. Gundelfinger, mais en dehors de la mienne. On sait déjà que le nombre des formes irréductibles pour le système en question est ou 61 ou 62. Il me semble peu douteux que c'est le premier de ces nombres qui sortira victorieux de la discussion du type 4.5.1.