(9)

THÉORIE POUR TROUVER LE NOMBRE DES COVARIANTS ET DES CONTREVARIANTS D'ORDRE ET DE DEGRÉ DONNÉS LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORMES SIMULTANÉES CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES.

[*Comptes Rendus*, LXXXIV. (1877), pp. 1359—1361, 1427—1430.]

POUR plus de clarté, je commencerai par le cas d'une seule forme du degré n à k variables. On se propose de trouver le nombre: (1) des covariants, (2) des contrevariants linéairement indépendants de degré i par rapport aux coefficients et d'ordre j par rapport aux variables.

(1) *Cas des covariants.*—Écrivons

$$\sigma = \frac{in + (k-1)i}{k}, \quad \sigma' = \sigma + 1,$$

et trouvons toutes les solutions en nombres positifs et entiers des équations

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = i, \qquad (1)$$

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = \sigma. \qquad (2)$$

Pour une solution quelconque de ces équations, soit S le nombre des *invariants* indépendants appartenant à un système de formes des degrés n, $n-1$, $n-2$, ..., contenant chacun $k-1$ variables, les ordres de ces invariants quant aux coefficients de ces formes étant respectivement

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},$$

nous obtiendrons ainsi une somme de nombres que je nommerai ΣS.

Formons le même système d'équations en a', comme plus haut avec des a, avec la différence d'écrire σ' au lieu de σ, et soit S' le nombre des *contrevariants linéaires* appartenant au même système de formes qu'auparavant, les ordres de ces contrevariants par rapport aux coefficients étant respectivement

$$a'_0,\ a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_{n-1};$$

nous obtiendrons ainsi une seconde somme $\Sigma S'$; la différence $\Sigma S - \Sigma S'$ sera le nombre de covariants du degré i et de l'ordre j pour la forme du $n^{\text{ième}}$ degré à k variables.

(2) *Cas des contrevariants.* Écrivons

$$\sigma = \frac{in - (k-1)\,j}{k}, \quad \sigma' = \sigma - 1,$$

et, avec la nouvelle valeur de σ, trouvons, comme dans le cas précédent, la valeur de ΣS. De même trouvons $\Sigma S'$, comme auparavant, en nous servant de la nouvelle valeur de σ', mais avec cette différence que, pour trouver un S' quelconque, il faut calculer le nombre non pas des contrevariants, mais des covariants linéaires des formes correspondantes. $\Sigma S - \Sigma S'$ sera le nombre des contrevariants du degré i et de l'ordre j, linéairement indépendants, appartenant à une forme du degré n à k variables.

Pour les invariants, on met $j = 0$, et l'on se sert indifféremment de l'une ou de l'autre méthode, c'est-à-dire on écrit

$$\sigma' = \sigma + 1 \quad \text{ou} \quad \sigma' = \sigma - 1$$

à volonté.

Quand $k = 3$, c'est-à-dire pour les formes ternaires, on comprend, en formant S', que la distinction entre les covariants et les contrevariants binaires devient superflue, puisque à chaque covariant d'une forme binaire correspond un contrevariant, et *vice versâ*.

Quand $k = 2$, en se rappelant que pour un système de formes *unitaires* simultanées

$$a_0x^n,\ a_1x^{n-1},\ a_2x^{n-2}, \ldots,\ a_{n-1}x$$

chaque combinaison des coefficients est un invariant, et multipliée par x un covariant ou contrevariant unitaire, la règle pour trouver le nombre des covariants et des contrevariants binaires revient à la règle connue.

Je passe à présent au cas plus général d'un système de formes $n_1, n_2, \ldots, n_q$ à k variables. On cherche le nombre des covariants et des contrevariants du degré j et des ordres $i_1, i_2, \ldots, i_q$ quant aux coefficients des formes données.

On écrit dans les deux cas respectivement

$$\sigma = \frac{\pm(k-1)\,j + \Sigma in}{k};$$

le rapport de σ' à σ reste le même, comme auparavant. Au lieu de l'équation (1), on écrit q équations de la forme

$$a_{0,q} + a_{1,q} + a_{2,q} + \ldots + a_{nq,q} = i_q\,[q = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ q],$$

et, au lieu de l'équation (2), on écrit la seule équation

$$\Sigma_{q=q}^{q=1}(a_{1,q} + 2a_{2,q} + \ldots,\ + n_q a_{nq,q}) = \sigma.$$

Alors, pour trouver S, on prend un système de formes à $k-1$ variables, une de chaque degré de 1 jusqu'à n_1, encore une de chaque degré de 1 jusqu'à $n_2, \ldots$, et finalement une de chaque degré de 1 jusqu'à n_q, et l'on trouve pour S le nombre des invariants à $k-1$ variables, dont les ordres respectifs, par rapport à ces formes, sont les valeurs des a données pour une solution quelconque des équations écrites plus haut: ainsi l'on obtient ΣS; de même, en substituant σ' pour σ et des contrevariants linéaires (si l'on s'occupe des covariants) ou des covariants linéaires (si l'on s'occupe des contrevariants), on trouve la valeur de $\Sigma S'$, et la différence $\Sigma S - \Sigma S'$ sera le nombre cherché.

Ainsi l'on voit que le problème pour des systèmes à k variables se réduit au même problème pour $k-1$ variables, de sorte que, par déductions successives, le problème est complétement résolu par une méthode arithmétique pour un nombre quelconque de variables.

Avec l'aide de ce principe, on peut construire, simplifier et réduire à la forme canonique une fonction génératrice ayant par rapport aux formes ternaires, quaternaires, etc., le même genre de rapport que la fonction génératrice dont, sous la forme canonique, j'ai déjà donné des exemples pour les formes binaires: c'est de cela que je m'occupe en ce moment; mais ce travail algébrique, quoique d'une nature très-élémentaire, devient, même pour les formes ternaires, extrêmement laborieux.

Je terminerai cette Note par un seul exemple numérique du calcul indiqué par mon théorème: qu'il soit demandé de trouver le nombre de contrevariants asyzygétiques du douzième ordre et du neuvième degré appartenant à la forme cubique ternaire.

Nous avons ici

$$i=12, \quad \sigma=\frac{3.12-2.9}{3}=6, \quad \sigma'=5.$$

Je forme les deux Tables

0	1	2	3	S
10	0	0	2	0
9	1	1	1	1
9	0	3	0	1
8	2	2	0	3
7	4	1	0	5
6	6	0	0	2
3e	2e	1re		12

0	1	2	3	S'
10	0	1	1	0
9	2	0	1	1
9	1	2	0	3
8	3	1	0	7
7	5	0	0	0
3e	2e	1re		11

Dans la Table à gauche, en prenant une ligne horizontale quelconque, la somme du produit de chaque chiffre par le chiffre correspondant à la tête de la colonne où il se trouve est égale à 6; dans la Table à droite, cette somme de produits est 5; pour l'une et l'autre, la somme des chiffres de chaque ligne est 12. Les chiffres de ces dernières colonnes ne figurent pas dans les calculs; ces chiffres sont les valeurs des S et des S'; le nombre d'invariants ou de covariants linéaires appartenant à chaque partition, par exemple à un système composé d'une cubique quadratique et d'une forme linéaire à deux variables, le nombre des invariants des ordres 8, 2, 2 respectivement pour ces formes est 3, et, appartenant au même système de formes, le nombre des covariants linéaires des ordres 8, 3, 1 quant aux coefficients est 7. La somme des S étant 12 et des S' 11, la différence 1 sera le nombre des contrevariants à la forme cubique ternaire du type donné, et ainsi en général.

Comme second exemple, cherchons s'il y a des invariants cubiques pour les courbes du quatrième degré.

Ici $$i = 3, \quad n = 4, \quad j = 0:$$

donc $$\sigma = \frac{4.3}{3} = 4, \quad \sigma' = \sigma \pm 1.$$

Prenons $\sigma' = 3$. On forme les deux Tables

0	1	2	3	4	S
2	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	2	0	0	1
0	2	1	0	0	0
4^e	3^e	2^e	1re	r	3

0	1	2	3	4	S'
2	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	2
0	3	0	0	0	0
4^e	3^e	2^e	1re	r	2

Tous les chiffres, dans les colonnes S et S', correspondent à des résultats ou évidents d'eux-mêmes ou donnés déjà par MM. Clebsch, Gordan et Gundelfinger, sauf la valeur 2 de S', qui représente le nombre des contrevariants linéaires, non pas seulement par rapport à leurs degrés, mais aussi par rapport à chaque système des coefficients appartenant à un système de trois formes des degrés 4, 3, 2 respectivement. Pour trouver ce nombre, on en forme un nouveau

$$\sigma = \frac{1.4 + 1.3 + 1.2 - 1}{2} = 4$$

et un autre $$\sigma' = (\sigma - 1) = 3,$$

et l'on prend la différence de deux *dénumérants:* l'un le nombre de solutions en nombres positifs et entiers du système d'équations

$$\lambda' + 2\lambda'' + 3\lambda''' + 4\lambda^{\text{IV}} + \mu' + 2\mu'' + 3\mu''' + \nu' + 2\nu'' = 4,$$

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{IV}} = 1, \quad \mu + \mu' + \mu'' = 1, \quad \nu + \nu' + \nu'' = 1;$$

l'autre le dénumérant du même système d'équations quand on remplace aim of the mathematician to reduce all his expressions to their lowest terms, to retrench every superfluous word and phrase, and to condense the Maximum of meaning into the Minimum of language. He has to turn his eye ever inwards, to see everything in its dryest light, to train and inure himself to a habit of internal and impersonal reflection and elaboration of abstract thought, which makes it most difficult for him to touch or enlarge upon any of those themes which appeal to the emotional nature of his fellow-men. When called upon to speak in public he feels as a man might do who has passed all his life in peering through a microscope, and is suddenly called upon to take charge of an astronomical observatory. He has to go out of himself, as it were, and change the habitual focus of his vision.

Yet it is not without a considerable admixture of feelings of a more agreeable nature that I have acquiesced in taking the part allotted to me in this day's proceedings.

It is always a satisfaction to meet those from whom we have received marks of regard, and whom we know to be favorably disposed towards us; and I should be heartless, indeed, and more callous than the oyster, who, twin-soul to the mathematician, working in silence and seclusion between the folding-doors of his mansion, elaborates the pearl that may, hereafter, deck an empress's brow, could I be insensible to the many proofs of kind and generous feeling which, both within and without the walls of this University, have been so widely and unequivocally accorded to me.

I scruple not to say (for it is strictly the truth) that I have experienced from the authorities of the University a degree of delicate consideration and forbearance from all claims that might be supposed to interfere, in any respect, with my comfort or ease of mind, that, as long as I live, will endear to me the name of the Johns Hopkins University.

But that pleasure of coming as a friend among friends is enhanced by the fact that I stand here a harbinger of glad tidings—that I can honestly congratulate all of you who are interested in the success of the University on the good seed that has been sown, and on the promise which it affords of a rich harvest in no distant future.

One of our great English judges observed on some occasion, when he was outvoted by his brethren on the bench (or, perchance, it may have been the twelfth outstanding juryman, who protested that never before in his life had he been shut up with eleven other such obstinate men) that "opinions ought to count by weight rather than by number," and so I would say that the good done by a university is to be estimated not so much by the mere number of its members as by the spirit which actuates and the work that is done by them. When I hear, as I have heard, of members of this University, only hoping to be enabled to keep body and soul together in order that