XXXVI.

SULLE ONDE PROGRESSIVE DI TIPO PERMANENTE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVI (2° sem. 1907),
pp. 777-790.

1. - Preliminari.

Il moto di un liquido pesante avvenga in piani verticali fra loro paralleli, senza divario (sensibile) dall'uno all'altro di essi.

Pensiamo, per fissar le idee, ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basta allora occuparsi dell'andamento del fenomeno in una generica sezione parallela alle sponde.

Supponiamo che il fondo del canale sia orizzontale e che i caratteri qualitativi del moto siano quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. Si ha così a fare con perturbazioni *locali*, che danno al fenomeno l'*apparenza* di un movimento traslatorio orizzontale di tutta la massa fluida; in realtà, si deve ritenere nulla la portata complessiva attraverso una generica sezione trasversale del canale. Si potrà poi parlare di un livello medio del liquido (quello che si avrebbe in assenza della perturbazione ondosa).

2. - Specificazione delle ipotesi.

Mettiamo le ipotesi sotto forma analiticamente precisa.

Anzi tutto la qualifica « permanente » sta a significare che, per un osservatore dotato della traslazione apparente della massa fluida, il movimento ha carattere stazionario, ossia indipendente dal tempo.

Ciò posto, assumiamo un sistema di assi x, y animati da tale traslazione, essendo l'asse y verticale verso l'alto, l'asse x scorrente sul fondo e rivolto in senso *opposto* alla traslazione.

Per *velocità di propagazione* del moto ondoso si intende la velocità degli assi mobili x, y. Designandone con c il valore assoluto, si hanno le componenti $-c$, 0.

Diremo h la profondità (media) del canale, cioè la distanza fra l'orizzontale che segna il fondo e quella che segna il livello medio.

La regione del moto sarà rappresentata nel piano x, y (fig. 1) da una striscia indefinita L, limitata inferiormente dall'asse delle x e superiormente da una linea libera l, più o meno sinuosa, la quale differisce poco dalla orizzontale $y = h$, quando si tratta di onde, che si riducono a semplici increspamenti.

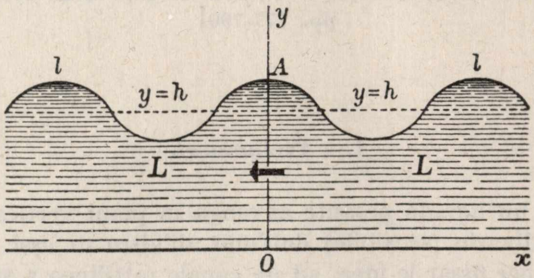

Fig. 1

Con questo andamento generale della l è poi possibile che essa consti di tratti riproducentisi periodicamente (come nella fig. 1), oppure sia aperiodica (abbia per es. un solo massimo al disopra del livello medio, avvicinandosi asintoticamente alla $y = h$ da una parte e dall'altra del massimo). Il primo tipo comprende in particolare le così dette *onde oscillatorie semplici* (onde sinusoidali, dinamicamente possibili soltanto in prima approssimazione); l'esempio indicato pel secondo tipo è quello, pure ben noto, dell'*onda solitaria*, studiata sperimentalmente da SCOTT RUSSEL e teoricamente (in via approssimata) da BOUSSINESQ e da Lord RAYLEIGH (1).

Quanto al movimento del liquido nella striscia L, supporremo che esso sia ovunque *regolare* e *irrotazionale*.

Esisterà perciò una funzione uniforme $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità), regolare entro L, tale che

(1) $$d\varphi = u\,dx + v\,dy\,,$$

essendo u e v le componenti della velocità *relativa* nel punto generico (x, y).

La (1) determina φ a meno di una costante additiva: converremo di prenderla in modo che sia $\varphi = 0$ nell'origine O delle coordinate.

(1) Cfr. per es. LAMB, *Hydrodynamics* (terza edizione), Cambridge, University Press, 1906, art. 248.

Per l'incompressibilità del liquido, sarà φ funzione armonica, e si potrà quindi definire la funzione associata ψ (funzione di corrente) mediante l'equazione ai differenziali totali

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy\,, \tag{2}$$

fissando anche qui la costante di integrazione in modo che ψ si annulli nell'origine.

Si noti che il campo L è semplicemente connesso, talchè la ψ risulta di necessità uniforme.

Introdurremo inoltre una condizione supplementare ovviamente suggerita dal tipo di movimenti che vogliamo studiare. Si tratta di perturbazioni ondose, cioè di movimenti vibratori locali, che debbono ritenersi dotati di una velocità *assoluta* poco rilevante, in confronto della velocità di propagazione $(-c, 0)$. Ne viene che la velocità *relativa* non può differire gran che dalla traslazione $(c, 0)$: certo non può differirne quanto al senso generale del moto.

Ci troviamo così condotti ad ammettere che sia dappertutto $u > 0$, anzi che *sia positivo il limite inferiore dei valori di* u. *Con ciò anche il valore assoluto della velocità*

$$V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$$

(finito per le ipotesi precedenti) *avrà* (in tutto L, contorno compreso) *un limite inferiore diverso da zero.*

3. - Pressione. Condizioni ai limiti.

Per i moti irrotazionali, soggetti a forze conservative, e stazionari (rispetto ad assi fissi, ovvero dotati di una traslazione uniforme), le equazioni idrodinamiche si riassumono in un'unica relazione fra il valore assoluto della velocità, la pressione (divisa per la densità) e il potenziale (unitario) delle forze attive.

Nel caso presente si ha:

$$\tfrac{1}{2}V^2 + gy + p = \text{cost.}\,,$$

designando al solito p la pressione, g l'accelerazione di gravità, e immaginando assunta l'unità di massa in modo che la densità del liquido risulti eguale ad 1. (Si lasciano indeterminate le unità di lunghezza e di tempo).

Sulla linea libera l, la pressione p è a ritenersi costante; sarà perciò

$$V^2 + 2gy = \text{cost.}, \quad \textit{in ogni punto di } l. \tag{3}$$

Le altre condizioni ai limiti provengono dall'esprimere che tanto il fondo $y = 0$, quanto la linea libera l sono *linee di flusso*, cioè dirette come la velocità.

Indichiamo con s l'arco di una generica linea di flusso, contato a parirte da una origine arbitraria nel senso del moto (ovunque ben determinato, per essere $V > 0$). Saranno dx/ds, dy/ds i coseni direttori della tangente nel senso del moto, e avremo, sopra una tale linea,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

donde, in virtù delle (1) e (2),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = V, \\ \frac{d\psi}{ds} &= \frac{\partial\psi}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0. \end{aligned}\right.$$

La seconda equazione mostra che ψ si mantiene costante sopra ogni linea di flusso; reciprocamente questa circostanza caratterizza una linea di flusso, perchè, se $d\psi/ds$ si annulla, lungo una qualche linea, ne segue

$$-v\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds} = 0,$$

cioè la tangente ha la direzione della velocità.

In O si è attribuito a ψ il valore zero; sarà perciò, qualunque sia x,

$$\psi = 0, \quad \textit{per} \quad y = 0. \tag{4}$$

Volendo fissare il valore (costante) di ψ sopra l, basterà integrare la (2) da un punto generico del fondo ad altro, pure generico, della linea libera (seguendo un cammino qualsiasi interno a L). Integriamo per es. lungo l'asse delle ordinate da O sino all'intersezione A dell'asse con l. Avremo, essendo zero il valore di ψ in partenza, e designando con q il cercato valore d'arrivo,

$$q = \int_{OA} u\, dy ,$$

quantità essenzialmente positiva, per l'ipotesi supplementare relativa alla u (²).

Ne consegue

$$\psi = q , \quad \textit{in ogni punto di } l . \tag{5}$$

Va notato che, in tutti i punti del campo L, la ψ rimane compresa fra zero e q. Infatti, per ogni funzione armonica, regolare in un dato campo, i valori, relativi a punti interni, sono sempre compresi fra il limite superiore e il limite inferiore di quelli assunti al contorno. La ψ è appunto armonica e regolare in L e assume sul complessivo contorno di tale campo i valori zero e q.

L'equazione $d\varphi/ds = V$, ove si tenga conto che (sempre per l'ipotesi supplementare) V non scende mai al disotto di una certa costante positiva, mostra che φ cresce costantemente e indefinitamente con s, convergendo verso $+\infty$ quando si procede nel senso del moto, verso $-\infty$, quando si procede in senso opposto (lungo la linea di flusso, di cui si tratta; in particolare sul fondo o sulla linea libera l).

4. - Conseguenze analitiche. Inversione.

Posto

$$\left\{ \begin{aligned} x + iy &= z , \\ u - iv &= w , \\ \varphi + i\psi &= f , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

w ed f riescono notoriamente funzioni della variabile complessa z, in virtù delle (1), (2); e le (1), (2) stesse si compendiano in

$$\frac{df}{dz} = w . \tag{7}$$

(²) Si osservi che, essendo 1 la densità del liquido, $q = \int_{OA} u\, dy$ non è altro che la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale.

Al variare di z nel campo L, w si mantiene sempre regolare, resta finita all'∞, e il suo modulo $|w| = V$ non si annulla mai. La f è pure regolare (al finito), e $|df/dz|$ non si annulla mai a norma della (7).

Considerando un piano complesso, rappresentativo dei valori di f (fig. 2), le proprietà delle funzioni φ e ψ, rilevate nel n. precedente, permettono di asserire quanto segue:

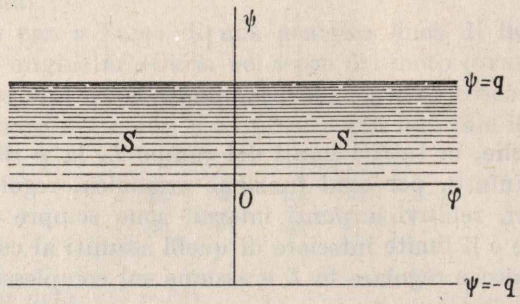

Fig. 2. – Piano $f = \varphi + i\psi$.

1) Mentre (nel piano del moto) z percorre l'asse reale da $x = -\infty$ a $x = +\infty$, anche f percorre (nel suo piano) l'asse reale, sempre nel senso delle ascisse crescenti, da $\varphi = -\infty$ a $\varphi = +\infty$.

2) Mentre z percorre la linea libera l, diciamo nel senso delle ascisse decrescenti (con che si viene a descrivere l'intero contorno del campo L, sempre in uno stesso verso), f percorre la parallela $\psi = q$ all'asse reale, l'ascissa φ decrescendo costantemente da $+\infty$ a $-\infty$.

3) Ad un generico punto z del campo L corrisponde nel piano f un punto della striscia S, compresa fra l'asse delle ascisse $\psi = 0$ e la parallela $\psi = q$.

Con ciò siamo autorizzati a concludere che la funzione $f(z)$ porge la rappresentazione conforme di L su S.

Infatti, sapendosi che $f(z)$ varia in S, mentre z varia in L, e che $|df/dz|$ non si annulla mai, basta che vi sia biunivocità di corrispondenza fra i contorni, perchè reciprocamente ad ogni punto f di S corrisponda uno ed un solo punto z di L ([3]). Si può così riguardare z come funzione *uniforme* di f entro la striscia S.

Tale funzione è manifestamente reale sopra l'asse reale, regolare al finito, assume sulla $\psi = q$ la successione di valori, che compete alla linea libera l, ecc..

([3]) Cfr. per es. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, Teubner, 1907, cap. VIII, § 5.

Naturalmente, anche la $w = u - iv$, funzione regolare di z in L, si può pensare funzione dell'argomento f, pel tramite di z: come tale, essa si comporta regolarmente al variare di f entro S, resta finita all'∞, e sempre diversa da zero, assume valori reali sull'asse reale (perchè $v = 0$ sul fondo, cioè per $\psi = 0$), ecc..

In virtù della (7), le due funzioni $z(f)$, $w(f)$ sono legate dalla relazione

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{w(f)} . \tag{7'}$$

5. - Riflessione. Equazione funzionale caratteristica.

Le funzioni $z(f)$, $w(f)$, definite in tal modo entro la striscia S, sono entrambe reali sull'asse reale $\psi = 0$. Ne consegue, per il noto principio della riflessione analitica di SCHWARZ [4], che esse sono prolungabili analiticamente nella sottostante striscia $\psi = 0$, $\psi = -q$, assumendo quivi valori coniugati a quelli, che loro spettano in S. Più precisamente, se in un punto generico $\varphi + i\psi$ di S è

$$\begin{cases} z(\varphi + i\psi) = x + iy , \\ w(\varphi + i\psi) = u - iv , \end{cases}$$

nel punto coniugato $\varphi - i\psi$ della striscia riflessa si avrà

$$\begin{cases} z(\varphi - i\psi) = x - iy , \\ w(\varphi - i\psi) = u + iv . \end{cases}$$

Riferiamo in particolare queste equazioni al valore $\psi = q$ (cui corrisponde nel piano z la linea libera l).

Avremo dalle due prime di ciascun gruppo, per sottrazione,

$$2y = -i\{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\} ;$$

e dalle altre, per moltiplicazione,

$$V^2 = w(\varphi + iq)\, w(\varphi - iq) ,$$

[4] Cfr. per es. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars 1887, vol. I, pp. 174-175.

y e V riferendosi, per un medesimo valore di φ, ad un medesimo punto di l.

Con ciò la condizione (3), caratteristica delle linee libere, si può presentare sotto la forma

$$(3') \qquad w(\varphi + iq)\, w(\varphi - iq) - ig\{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\} = \text{cost.}$$

Qui interviene l'osservazione essenziale che si tratta di funzioni analitiche. La (3′), ricavata per φ reale, rimane necessariamente valida per qualunque valore dell'argomento, appartenente al campo di esistenza. Si può dunque scrivere il generico argomento f al posto di φ. Se poi si deriva rispetto ad f, si elimina la costante del secondo membro, e si ricava, tenendo conto della (7′),

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d}{df}\{w(f + iq)\, w(f - iq)\} - ig\left\{\frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)}\right\} = 0\,,$$

equazione mista (cioè insieme differenziale e alle differenze finite) nella sola $w(f)$.

È facile rendersi conto che *la* (E) *caratterizza sostanzialmente il problema meccanico, tutto essendo ricondotto alla determinazione di integrali* $w(f)$ *di* (E), *reali sull'asse reale, regolari nella striscia* $\psi = \pm q$, *finiti all'*∞, *e tali che la parte reale* u *non scenda mai al disotto di una costante positiva* (del resto comunque piccola).

Sia data infatti una tale $w(f)$, e si determini $z(f)$ a norma della (7′), prendendo la costante di integrazione in modo che sia $z = 0$ per $f = 0$. Questa funzione $z(f)$ risulta così reale sull'asse reale.

Essendo, per la (7′) stessa,

$$dx + i\, dy = \frac{d\varphi + i\, d\psi}{u - iv}\,,$$

si ha

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{u\, d\varphi - v\, d\psi}{V^2}\,, \\ dy &= \frac{v\, d\varphi + u\, d\psi}{V^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Consideriamo la funzione $y(\varphi, \psi)$. Essa si annulla sull'asse reale $\psi = 0$, e, per un altro punto generico della striscia S, si può immaginare ottenuta integrando lungo una perpendicolare all'asse reale ($d\varphi = 0$), a partire dalla sua intersezione coll'asse reale stesso.

Si ha così

$$y(\varphi, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{u(\varphi, \psi)}{V^2} \, d\psi ,$$

la quale mostra (in virtù dell'ipotesi concernente la u) che l'ordinata y è ovunque positiva, e rimane finita anche se φ cresce indefinitamente.

D'altra parte, mentre f percorre una generica parallela all'asse delle ascisse, $dx = (u/V^2)\, d\varphi$; quindi (sempre per l'ipotesi concernente u) la x varia, lungo la corrispondente linea del piano z, nello stesso senso di φ, da $-\infty$ a $+\infty$. Così in particolare a $\psi = q$ corrisponderà nel piano z una certa linea l, la quale possiede l'andamento qualitativo, già intuitivamente rilevato nelle linee libere.

Alla striscia S corrisponde in definitiva nel piano z un campo L, compreso fra l'asse reale $y = 0$ e la detta linea l. C'è corrispondenza *biunivoca* fra S ed L, e si può considerare la funzione inversa $f(z)$, e trarre per sostituzione una $w(z)$ dall'originaria soluzione $w(f)$ di (E).

Tale funzione $w(z)$ definisce effettivamente un moto ondoso permanente, che si svolge in L.

Infatti la (7′) si ricambia nella (7), e così si è sicuri che sono soddisfatte nel campo L le equazioni indefinite, e che φ e ψ (parte reale e coefficiente di i in $f(z)$) costituiscono rispettivamente il potenziale di velocità e la funzione di corrente.

Rimangono pure soddisfatte, per costruzione, tutte le condizioni ai limiti.

Le (4) e (5), perchè l'asse reale $y = 0$ e la linea l corrispondono ordinatamente a $\psi = 0$ e a $\psi = q$. La (3), per l'ipotesi fondamentale che $w(f)$ sia integrale della (E): basta riflettere che da (E) si ripassa a (3′) integrando rispetto ad f e considerando in particolare valori reali dell'argomento. La (3′) è poi equivalente alla (3). *C. d. d.*

Val la pena di rilevare che la equazione (E) si trasforma in se stessa, cambiando f in $-f$. Ne viene che, se $w(f)$ è un integrale, lo è pure $w(-f)$.

6. - Onde oscillatorie.

Le onde di tipo permanente si chiamano *oscillatorie* quando, procedendo di un tratto costante λ (*lunghezza d'onda*) nel senso della propagazione, lo stato di moto della massa fluida si riproduce identicamente.

Ciò val quanto dire che $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono funzioni periodiche di x, di periodo λ.

Indichiamo alcune conseguenze di questa ipotesi.

Anzi tutto le differenze

$$\varphi(x+\lambda, y) - \varphi(x, y)\,,$$
$$\psi(x+\lambda, y) - \psi(x, y)\,,$$

sono due costanti (perchè si annullano le loro derivate, tanto rapporto ad x, quanto rapporto ad y). Per valutarle, possiamo porre per es. $y=0$. Siccome $\psi=0$ per $y=0$, così si riconosce che ψ, *al pari di* u, v, *è funzione periodica di* x.

Designando poi con ω la differenza costante $\varphi(x+\lambda, y) - \varphi(x, y)$, si può scrivere, ponendo anche x eguale a zero,

$$\omega = \int_0^\lambda u(x, 0)\, dx\,,$$

donde apparisce che ω *è essenzialmente positiva.*

Ne viene, pensando alla corrispondenza fra il piano z e il piano f, che ad una traslazione di ampiezza λ nel primo fa riscontro una traslazione di ampiezza ω nel secondo, l'una e l'altra nel senso positivo dei rispettivi assi delle ascisse.

Una funzione di z, che rimanga invariata per una tale traslazione, che ammetta cioè il periodo reale λ, diventa così, quando la si esprime per f, funzione periodica di tale variabile col periodo reale ω; e reciprocamente.

L'ipotesi che si tratti di onde oscillatorie si traduce compendiosamente nella periodicità della funzione di variabile complessa $w(z)$. Si può sostituirvi, in base all'osservazione ora fatta, la periodicità di $w(f)$, e ritenere che: Condizione necessaria e sufficiente, affinchè le onde, definite da un integrale $w(f)$ della (E), siano oscillatorie, è che la $w(f)$ ammetta un periodo reale ω (seguitando beninteso a possedere gli altri caratteri qualitativi, di cui al n. precedente).

La lunghezza d'onda λ (incremento costante, che subisce $z(f)$, quando f si incrementa di ω) si può rappresentare, a norma della (7′), con l'integrale di df/w da un f generico ad $f+\omega$, lungo un cammino pure generico. Scriveremo in particolare

$$\lambda = \int_0 \frac{df}{w}\,. \tag{8}$$

Accanto alla espressione della lunghezza d'onda, giova fissare quella della profondità media h. Come definizione numerica di h si deve evidentemente assumere la media (per la lunghezza di un'onda) dei livelli (contati a partire dal fondo) delle superficie libere del liquido; cioè la media dei valori, assunti da y lungo la linea l, mentre x varia di λ, per es. da 0 a λ. Sarà dunque

$$h = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y\, dx\,,$$

y ed x riferendosi alla linea l.

Sostituendo ad entrambe le loro espressioni per $z(\varphi + iq)$, $z(\varphi - iq)$, tenendo presente la (7') e la natura della corrispondenza fra il piano z e il piano f, si passa subito alla formula

$$h = \frac{1}{4i\lambda}\int_0^\omega \{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\}\left\{\frac{1}{w(\varphi + iq)} + \frac{1}{w(\varphi - iq)}\right\} d\varphi\,. \tag{9}$$

Fra i caratteri del moto *relativo* non può naturalmente figurare la velocità di propagazione c. È però facile definirla in termini delle due costanti q ed h. Basta ricordare (n. 1) che è inerente alla nozione di moto ondoso l'annullarsi della portata complessiva. D'altra parte (n. 3, nota) la portata relativa è q; attribuendola esclusivamente alla traslazione, e badando al significato di h, si ha senz'altro

$$q = ch\,. \tag{9'}$$

Può essere ancora opportuno assumere come variabile indipendente

$$\xi = e^{2\pi i f/\omega}\,, \tag{10}$$

al posto di f.

Come è ben noto, ogni funzione $w(f)$, regolare nella striscia S ($\psi = \pm q$) e avente per periodo ω, diventa, per la (10), funzione dell'argomento ξ, uniforme e regolare nella corona circolare C, che viene a corrispondere nel piano ξ alla striscia S del piano f.

Posto

$$\alpha = e^{-2\pi q/\omega} \tag{11}$$

(con che α risulta una frazione propria), la corona C si trova limitata dalle due circonferenze $|\xi| = \alpha$ internamente e $|\xi| = 1/\alpha$ esternamente.

La equazione (E), per le (10) e (11), diviene

$$(\mathrm{E}') \qquad \xi \frac{d}{d\xi}\left\{ w(\alpha\xi)\, w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\} - \frac{g\omega}{2\pi}\left\{\frac{1}{w(\alpha\xi)} - \frac{1}{w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\right\} = 0\,,$$

e le condizioni qualitative, imposte alla w saranno le seguenti: essere regolare in C, *reale sulla circonferenza* $|\xi| = 1$, e tale che la sua parte reale u resti in tutta la corona al disopra di una costante positiva.

La (E′) ammette una trasformazione in se stessa, che proviene, come è naturale, pel tramite della (10), da quella già avvertita per la (E). Si tratta — come del resto appare direttamente dalla (E′) — dello scambio di ξ in $1/\xi$. Perciò ogni soluzione $w(\xi)$ della (E′) dà luogo ad una seconda soluzione $w(1/\xi)$.

7. - Soluzioni approssimate. Onde oscillatorie semplici. Equazione di Airy.

Supponiamo che la perturbazione ondosa sia molto piccola di fronte alla velocità di propagazione c, che è il caso interessante per la pratica. Allora, ponendo

$$(12) \qquad w = c(1 + \varepsilon)$$

(talchè $|w - c| = c|\varepsilon|$ rappresenta, in valore assoluto, la velocità assoluta della perturbazione ondosa), potremo ritenere trascurabile $|\varepsilon|^2 = |w - c|^2/c^2$, e quindi ogni termine d'ordine superiore al primo, rispetto ad ε. Con ciò, portando nella (E) il valore (12) di w, si ha la equazione lineare in ε, caratteristica delle soluzioni approssimate:

$$(13) \qquad \frac{d}{df}\{\varepsilon(f + iq) + \varepsilon(f - iq)\} + \frac{ig}{c^3}\{\varepsilon(f + iq) - \varepsilon(f - iq)\} = 0\,.$$

Riferiamoci al caso delle onde oscillatorie e consideriamo in conformità ε come funzione di ξ.

La (13) assume l'aspetto

$$(13') \qquad \xi \frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\} + \frac{g\omega}{2\pi c^3}\left\{\varepsilon(\alpha\xi) - \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\} = 0\,.$$

Questa equazione conserva naturalmente la proprietà, spettante ad (E'), di trasformarsi in se stessa, quando si cambia ξ in $1/\xi$. Perciò, assieme con una generica soluzione $\varepsilon(\xi)$, essa ammette la $\varepsilon(1/\xi)$, e anche la $\varepsilon(\xi)+\varepsilon(1/\xi)$, data la linearità.

L'osservazione ha importanza perchè permette di soddisfare con tutta facilità alla condizione, imposta a w, e di conseguenza ad ε, di essere reale per $|\xi|=1$. Basta infatti considerare una soluzione $\varepsilon(\xi)$ a coefficienti reali, per essere sicuri che $\varepsilon(1/\xi)$ assume il valore coniugato, quando $|\xi|=1$; con ciò $\varepsilon(\xi)+\varepsilon(1/\xi)$ risulta appunto reale.

D'altra parte, attesa la piccolezza di ε, rimane in ogni caso poco diversa da c la parte reale di w; e così anche la condizione concernente u si trova senz'altro verificata.

Alla (13') si soddisfa nel modo più semplice, prendendo per ε una funzione lineare di ξ, diciamo $\gamma\xi/2$, con γ costante reale abbastanza piccola, e ritenendo c, α ed ω legate dalla equazione

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\frac{g\omega}{2\pi c^3}\left\{\alpha-\frac{1}{\alpha}\right\}=0\,. \tag{14}$$

Dopo ciò, possiamo star certi che introducendo nella (12) $(\gamma/2)(\xi+1/\xi)$ al posto di ε, si ha la rappresentazione di un effettivo moto ondoso oscillatorio.

L'espressione di w per f sarà, a norma della (10),

$$w=c\left\{1+\gamma\cos\frac{2\pi f}{\omega}\right\}. \tag{15}$$

L'ipotesi che sia trascurabile ε^2 implica, per le soluzioni trovate che lo sia γ^2. Con ciò si ha

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{c}\left\{1-\gamma\cos\frac{2\pi f}{\omega}\right\},$$

e, per la (7'), avvertendo che si deve prendere $z=0$ per $f=0$,

$$z=\frac{1}{c}\left\{f-\frac{\gamma\omega}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi f}{\omega}\right\}. \tag{16}$$

Segue di qua che f differisce da cz per un termine di primo ordine in γ. Perciò, trascurando sempre γ^2, la (15) può essere scritta

$$w = c\left\{1 + \gamma \cos \frac{2\pi c}{\omega} z\right\}. \tag{15'}$$

Dalla (8), o più direttamente dalla (15'), apparisce che, fra la costante ω e la lunghezza d'onda λ, passa la relazione semplicissima

$$\lambda = \frac{\omega}{c}. \tag{17}$$

L'equazione parametrica della linea l si ha manifestamente dalla (16), ponendo $f = \varphi + iq$ e separando il reale dall'immaginario. Coll'approssimazione convenuta, si può sostituire, nella espressione di y, cx al posto di φ e si ottiene

$$y = \frac{q}{c} - \frac{1}{2ic}\frac{\gamma\omega}{2\pi}\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{\omega}(cx + iq) - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\omega}(cx - iq)\right\}.$$

Il valore medio di y al variare di x, per un periodo, è manifestamente q/c, talchè

$$h = \frac{q}{c}, \tag{18}$$

conformemente alla osservazione generale del n. precedente [cfr. la formula (9')].

Mediante le (17) e (18), le due costanti ω e q rimangono espresse per elementi direttamente accessibili all'osservazione (la velocità c, la lunghezza d'onda λ e la profondità media h del canale). Sostituendo nella precedente espressione dell'ordinata della linea libera, si ha la nota forma (sinusoidale)

$$y = h - \frac{\gamma\lambda}{2\pi}\frac{e^{2\pi h/\lambda} - e^{-2\pi h/\lambda}}{2}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Sostituendo invece nella equazione fondamentale (14) (fra c, ω ed $\alpha =$

$= e^{-2\pi q/\omega}$) si ritrova la classica relazione di AIRY ([5])

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{e^{2\pi h/\lambda} - e^{-2\pi h/\lambda}}{e^{2\pi h/\lambda} + e^{-2\pi h/\lambda}},$$

che definisce la velocità di propagazione c, in funzione della lunghezza d'onda λ e della profondità del canale h.

8. – Queste ed altre soluzioni approssimate sono state oggetto di numerose ricerche sia in ragione dell'interesse pratico, sia perchè la soluzione rigorosa del problema sembrava poco accessibile: almeno, prendendo direttamente le mosse delle equazioni idrodinamiche e cercando di applicare i metodi generali di integrazione. Ridotta come è ora ([6]) la questione allo studio dell'equazione (E) [mista e non lineare, ma relativa ad un'unica funzione olomorfa $w(f)$], parmi fondata la speranza che le risorse dell'analisi moderna non si mostreranno inefficaci.

([5]) Cfr. per es. LAMB, loco cit., art. 228; oppure APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1903, t. III, pag. 468.

([6]) Va notato che il sig. P. RUDZKI (« Math. Ann. », B. L, 1898, pp. 269-281) era già riuscito con un ingegnoso artificio a liberarsi delle condizioni ai limiti, sfruttando la teoria delle funzioni. Tuttavia la effettiva determinazione della sua funzione ausiliaria Θ implica ancora una discussione di tipo incognito. La (E) sintetizza invece nitidamente tutta la difficoltà.