XXXIII.

SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI IMPLICITE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVI_2 (1907_2),
pp. 2-12.

I metodi classici del calcolo offrono due distinti sviluppi per una funzione y di x, che sia definita, nell'intorno di un valore generico x, da una equazione implicita del tipo

(I) $$y - x + \varphi(y) = 0 :$$

1) Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di TAYLOR, procedente per potenze di $x - x_0$.

2) Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di LAGRANGE.

Lo stesso vale più generalmente per una funzione f della radice $y(x)$ definita dalla (I).

Nello sviluppo di TAYLOR, l'ordine dei vari termini (rispetto ad $x - x_0$, riguardata come quantità di prim'ordine) cresce di una unità da ciascun termine al successivo. Lo sviluppo presenta però l'inconveniente che l'espressione dei coefficiente in funzione di f, φ e loro derivate, è assai complicata.

Nello sviluppo di LAGRANGE si trovano, per così dire, scambiati pregi e difetti. I vari termini hanno una espressione semplice, ma viceversa nulla si può dire in generale circa l'ordine di grandezza rispetto alla differenza $x - x_0$.

Scopo della presente Nota è di assegnare uno sviluppo, che congiunge i due requisiti: aumento progressivo dell'ordine, e perspicuità della legge di formazione dei singoli termini.

1. – Sia $\varphi(y)$ una funzione della variabile (diciamo reale, per fissar le idee) y, la quale, in un certo intorno del valore y_0, si mantenga finita e continua, assieme alle sue derivate prima, seconda, ecc., fino ad un generico ordine n ($\geqslant 1$).

Supposto che

(1) $$1 + \varphi'(y_0) \neq 0 ,$$

consideriamo l'equazione

$$y - x + \varphi(y) = 0 \,, \tag{I}$$

e chiamiamo x_0 il valore di x, che essa fa corrispondere ad y_0.

Nell'intorno della coppia x_0, y_0 la (I) definisce univocamente tanto x in funzione di y, quanto anche, per la disuguaglianza (1), la funzione inversa y di x. Designeremo la prima con $x = v(y)$, la seconda con $y = u(x)$. Si noti che la $v(y)$ è esplicitamente fornita dalla (I), ed ha l'espressione

$$v(y) = y + \varphi(y) \,. \tag{2}$$

Le fatte ipotesi assicurano notoriamente che entrambe le funzioni $u(x)$, $v(y)$ risultano finite e continue assieme alle loro derivate, fino all'ordine n, in due certi intorni H e K di x_0 e di y_0 rispettivamente. Ed è anche lecito ritenere (limitando convenientemente questi intorni H e K) che per ogni x compreso entro H, $y = u(x)$ cade entro K, e che reciprocamente $x = v(y)$ resta compreso in H, al variare di y entro K.

Per essere u e v funzioni inverse, varranno poi le identità

$$\begin{cases} y = u\{v(y)\} \,, \\ x = v\{u(x)\} \,, \end{cases} \tag{3}$$

coll'ovvia limitazione che gli argomenti y ed x appartengono rispettivamente ai campi K ed H, in cui i secondi membri hanno effettivo significato.

2. – Ciò premesso, prendiamo a considerare una funzione f della radice $u(x)$ della (I), nell'ipotesi che $f(u)$ sia, rispetto all'argomento u, finita e continua, assieme alle prime n derivate, per $u = y_0$, e in tutto l'intorno K di questo valore.

Se si tien conto che al variare di x in H, $u(x)$ varia entro K, la $f(u)$ si potrà anche risguardare come funzione di x, finita e continua, assieme alle sue prime n derivate, nell'intorno H di x_0.

Fissiamo un generico valore x, e poniamo

$$x_1 = v(x) = x + \varphi(x) \,. \tag{4}$$

Ammesso che x ed x_1 appartengano entrambi ad H, potremo applicare alla funzione $f\{u(x)\}$, nell'intervallo, che va da x_1 ad x, lo sviluppo abbreviato di Taylor, dell'ordine $n - 1$.

Calcoliamone i vari termini.

Anzitutto, attesa la definizione (4) di x_1, si ha

$$[f(u)]_{x=x_1} = f\{u(x_1)\} = f\{u(v(x))\} ,$$

ossia, per la prima delle identità (2),

$$(5) \qquad [f(u)]_{x=x_1} = f(x) .$$

Venendo alle derivate (si intende di un ordine m non superiore a quello, fin cui è stata supposta l'esistenza), partiamoci dalla identità

$$\left[\frac{d^m f(u)}{dx^m}\right]_{x=x_1} = \frac{d^m}{dx_1^m} f\{u(x_1)\} .$$

e badiamo che x_1 è stato definito in termini di x mediante la (1). Come sopra, $f\{u(x_1)\}$, espressa per x, non è altro che $f(x)$.

D'altra parte

$$dx_1 = (1 + \varphi')\, dx ,$$

sicchè derivare $f(x)$, rapporto ad x_1, equivale ad applicarle l'operazione differenziale

$$(6) \qquad D_x = \frac{1}{1+\varphi'} \frac{d}{dx} .$$

Risulta dunque

$$(7) \qquad \left[\frac{d^m f(u)}{dx^m}\right]_{x=x_1} = D_x^m f(x) .$$

Dopo ciò lo sviluppo di $f(u)$, per potenze di $x - x_1 = -\varphi(x)$, può essere scritto

$$(\mathrm{II}) \qquad f(u) = f(x) + \sum_{1}^{n-1}{}_m (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x) + R_n ,$$

il termine complementare R_n avendo l'espressione [1]

$$(8) \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_1}^{x} (x-\xi)^{n-1} \frac{d^n f\{u(\xi)\}}{d\xi^n}\, d\xi,$$

ovvero quella di Lagrange

$$(8') \qquad R_n = (-1)^n \frac{\varphi^n(x)}{n!} \left[\frac{d^n f\{u(x)\}}{dx^n}\right]_{x=x_2} ,$$

in cui x_2 rappresenta un qualche valore compreso fra x ed x_1.

---

[1] Cfr. per es. Arzelà, *Lezioni di calcolo infinitesimale*, Firenze, Le Monnier, 1901, pag. 352.

3. – La (II) è la formula, cui ho alluso in principio.

Il termine generale di posto m-esimo ha l'espressione comodissima

$$(-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x) .$$

Come si vede, esso dipende dalle derivate di f e di φ fino all'ordine m, e contiene φ^m a fattore.

È facile mettersi in condizioni, nelle quali quest'ultima circostanza equivale al requisito tipico dello sviluppo di TAYLOR: termine m-esimo d'ordine m (almeno) rispetto ad $x - x_0$.

All'uopo basta operare preventivamente nella equazione (I) una sostituzione lineare sulla variabile y, scambiando y in $y - y_0 + x_0$. L'equazione trasformata è ancora del tipo (I) e presenta la particolarità che il valore y_0 di y, corrispondente ad x_0, coincide con x_0 medesimo. La (I) stessa implica allora $\varphi(x_0) = 0$, e siccome φ è dotata, per ipotesi, di derivata finita, ne consegue che $\varphi(x)$ è di prim'ordine almeno, rispetto alla differenza $x - x_0$.

Risulta così φ^m d'ordine $\geqslant m$, e con esso il termine m-esimo dello sviluppo (II). L'analogo termine della serie di LAGRANGE ha invece l'espressione

$$\frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{f'(x)\varphi^m(x)\} .$$

Quindi, se si eseguisce la derivazione indicata, rimane in generale a fattor comune soltanto la prima potenza di φ.

Si noti che, quando si assume la (I) sotto forma tale che y_0 coincida con x_0, l'ipotesi complementare, richiesta per la validità dello sviluppo (II) (che cioè $x_1 = x + \varphi(x)$ ed x appartengano contemporaneamente all'intorno H), si trova senz'altro soddisfatta. Infatti, annullandosi $\varphi(x)$ per $x = x_0$, x_1 tende ad x_0 assieme ad x. Basta quindi prendere x abbastanza prossimo ad x_0 per far sì che x_1 ed x cadano entrambi in H.

Quanto al resto R_n, la (8') mette senz'altro in evidenza che esso è d'ordine $\geqslant n$.

La prima forma (8) merita invece interesse sotto altro punto di vista. In essa è precisata la dipendenza funzionale, mentre nella (8') compare la funzione x_2, di cui a priori si sa soltanto che ha valore numerico compreso fra x ed x_1.

Giova perciò ricorrere alla (8) quando per es. (ammessa, se occorre, l'esistenza di ulteriori derivate di φ e di f) si abbia da derivare lo sviluppo (II) rispetto ad un qualche parametro.

4. – Estensione dello sviluppo.

Indicherò anche una estensione della (II).

Si tratta dello sviluppo di una funzione $F(u, x)$, che dipenda da x, non solo pel tramite di u, ma anche esplicitamente, e possegga del resto le proprietà qualitative, già ammesse per $f(u)$.

Ripetendo le considerazioni del n. 2, si accerta ovviamente che, al posto delle (5) e (7), valgono le relazioni:

$$[F(u, x)]_{x=x_1} = F(x, x_1) = F\{x, x + \varphi(x)\} ,$$

$$\left[\frac{d^m F(u, x)}{dx^m}\right]_{x=x_1} = D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\} .$$

Se ne ricava lo sviluppo cercato

$$\text{(III)} \qquad F(u, x) = F\{x, x + \varphi(x)\}$$
$$+ \sum_1^{n-1}{}_m (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\} + R_n ,$$

dove la forma di R_n, analoga alla (8), è

$$\text{(9)} \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_1}^{x} (x-\xi)^{n-1} \frac{d^n}{d\xi^n} F\{u(\xi), \xi\}\, d\xi .$$

Anche qui basterebbe attribuirgli la forma di LAGRANGE per accertare che esso contiene φ^n a fattore.

5. – Sviluppi forniti dal metodo delle approssimazioni successive.

Volendo risolvere la (I), rispetto ad y, per approssimazioni successive, la via più naturale sarebbe di porre

$$y_1 = x ,$$
$$y_2 = x - \varphi(y_1) ,$$

ecc.; in generale

$$y_{m+1} = x - \varphi(y_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ma un tale procedimento non riesce sempre convergente: converrebbe introdurre l'ipotesi addizionale $|\varphi'(x_0)| < 1$.

6. – Si evita ogni difficoltà col seguente artifizio.

Operata, se occorre, quella tale sostituzione lineare, per cui riesce $\varphi(x_0) = 0$, scriviamo la (I) sotto la forma

$$y - x + \varphi(y) - \varphi(x) + \varphi(x) = 0 \, ,$$

e raccogliamo, nei primi quattro addendi, $y - x$ a fattore.

Notando che la funzione

$$\psi(x, y) = 1 + \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \tag{10}$$

resta finita e continua anche per $y = x$, e che, per x, y convergenti ad x_0, essa si avvicina al valore $1 + \varphi'(x_0)$ [non nullo, per la disuguaglianza fondamentale (1)], possiamo anche dividere per ψ, ed avremo

$$y - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y)} = 0 \, . \tag{I$'$}$$

Definendo ora delle approssimazioni successive mediante le formule

$$y_1 = x \, , \tag{11}$$

$$y_{m+1} - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

queste risultano incondizionatamente convergenti in un conveniente intorno di x_0.

Per dimostrarlo, cominciamo collo scegliere, entro H, un intorno H_1 tale che, per x, y compresi in H_1, $\psi(x, y)$ (che non si annulla per $x = y = x_0$) si mantenga diversa da zero; anzi sia $1/|\psi(x, y)|$ inferiore ad un numero positivo L.

Si dica poi M un limite superiore dei valori di $|\varphi'(x)|$ entro H_1. Avremo

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant M|x - x_0| \, ,$$

ossia, per essere $\varphi(x_0) = 0$,

$$|\varphi(x)| \leqslant M|x - x_0| \, .$$

Scegliamo ancora un numero h abbastanza piccolo perchè il segmento

$$(1 + ML)h \, ,$$

portato nei due versi, a partire da x_0, sia tutto interno ad H_1.

Con questa definizione di h, la disuguaglianza

$$(13) \qquad |y - x_0| \leqslant (1 + ML)h$$

assicura che y è contenuto entro H_1.

Per brevità, introdurremo anche un terzo intorno H_2 di x_0, di ampiezza non superiore ad h.

Siamo adesso in grado di accertare che, se x appartiene ad H_2, y_2 e così tutte le successive y_m cadono entro H_1.

Si osservi all'uopo che la prima delle (12), badando che $y_1 = x$, dà

$$y_2 - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)},$$

donde, per le ipotesi fatte,

$$|y_2 - x_0| \leqslant (1 + ML)\,|x - x_0| \leqslant (1 + ML)h,$$

che è appunto la disuguaglianza (13), relativa ad y_2.

Per un'altra y qualunque, sia ad es. la y_{m+1}, basta supporre di aver fatta la verifica fino ad y_m, con che $1/|\psi(x, y_m)|$ si può ritenere inferiore ad L. La corrispondente (12), scritta sotto la forma

$$y_{m+1} - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)},$$

dà poi luogo alla disuguaglianza caratteristica

$$|y_{m+1} - x_0| \leqslant (1 + ML)h.$$

Soffermiamoci un momento a stabilire una proprietà della ψ. Consideriamo perciò la differenza $\varphi(x) - \varphi(z)$, nell'ipotesi che x, z sia una coppia qualunque di valori, appartenenti ad H_1. Usufruendo dello sviluppo abbreviato di TAYLOR del second'ordine, potremo scrivere

$$\varphi(x) - \varphi(z) = (x - z)\varphi'(z) + \tfrac{1}{2}(x - z)^2\varphi''(\omega),$$

con ω compreso fra z ed x, e quindi interno anch'esso ad H_1.

Si ha d'altra parte dalla (10)

$$\frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} = -\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{(z - x)^2} + \frac{\varphi'(z)}{z - x},$$

donde, per confronto colla precedente,

$$(14) \qquad \frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\varphi''(\omega).$$

Ciò posto, si sottragga da una generica (12) quella, che la precede. Si ha

$$y_{m+1} - y_m = -\frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)\,\psi(x, y_{m-1})}\{\psi(x, y_m) - \psi(x, y_{m-1})\}\,.$$

Per il teorema del valor medio, la differenza in parentesi può essere posta sotto la forma

$$(y_m - y_{m-1})\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=z_m},$$

dove z_m rappresenta un qualche valore appartenente ad H_1 (perchè compreso fra y_m ed y_{m-1}).

A norma della (14), applicata al valore z_m di z, si deduce

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m)\,\psi(x, y_{m-1})}\cdot\varphi(x)\cdot(y_m - y_{m-1}) \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$

con ω_m contenuto in H_1.

Ove si ponga

$$y_1 = x = \delta_0\,, \tag{15}$$

$$y_{m+1} - y_m = \delta_m \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

$$\frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m)\,\psi(x, y_{m-1})} = \tau_m \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

la formula, ora trovata, può essere scritta più semplicemente

$$\delta_m = \tau_m\cdot\varphi(x)\cdot\delta_{m-1} \qquad (m = 2, 3, \ldots), \tag{18}$$

mentre, avendo riguardo alla (11) e alla prima delle (12), la prima delle (16) porge

$$\delta_1 = \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)}\,. \tag{19}$$

Sostituiamo, in una (18) generica, per δ_{m-1} l'analogo valore, e così successivamente, finchè si sia ricondotti a δ_1, da sostituirsi a sua volta mediante l'espressione (19). Si ottiene

$$\delta_m = \frac{\tau_2\cdot\tau_3\ldots\tau_m}{\psi(x, x)}\,\varphi^m(x) \qquad (m = 2, 3, \ldots)\,. \tag{18'}$$

Le (17) mostrano che, quanto a valore assoluto, nessuna τ_m può superare il prodotto di $L^2/2$ per il massimo valore di φ'' entro H_1. Chiamando T questo prodotto, e tenendo presente che anche

$$\frac{1}{|\psi(x, x)|} \leqslant L ,$$

le (17) e (18) somministrano in particolare la disuguaglianza

$$|\delta_m| \leqslant LT^{m-1} |\varphi(x)|^m \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Siccome $\varphi(x)$ è zero per $x = x_0$, così esiste un intorno di x_0, entro cui il prodotto $T|\varphi(x)|$ si mantiene minore dell'unità. Entro questo intorno, la serie di termine generale δ_m converge colla rapidità di una progressione geometrica.

La somma di tale serie non è altro che la funzione $y = u(x)$, *definita dalla* (I'), *o, se si vuole, dalla* (I).

Sia infatti

$$u(x) = \sum_0^\infty {}_m\, \delta_m . \tag{20}$$

Per le (15) e (16), la somma dei primi n termini della serie vale y_n. Per la convergenza,

$$\lim_{n=\infty} y_n = u(x) ; \tag{21}$$

dopo di che, con ovvio passaggio al limite, si ricava dalla (12)

$$u(x) - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, u)} = 0 ,$$

c.d.d.

7. – Per una generica funzione continua $F(u, x)$, si ha manifestamente, in causa della (21),

$$F(u, x) = \lim_{n=\infty} F(y_n, x) . \tag{22}$$

Ora, ponendo

$$g_0 = F(y_1, x) = F(x, x) , \tag{23}$$

$$g_m = F(y_{m+1}, x) - F(y_m, x) \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

la somma $g_0 + g_1 + \ldots + g_{n-1}$ si riduce a $F(y_n, x)$, sicchè la (22) equivale a

$$F(u, x) = \sum_0^\infty {}_m\, g_m . \tag{IV}$$

Ammessa la derivabilità di F, si ha dalle (24) e (16)

$$(24') \qquad g_m = \delta_m \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{u=\eta_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

con η_m compreso fra y_{m+1} e y_m, e quindi appartenente al solito intorno H_1.

Se si indica con N il limite superiore dei valori assoluti di $\partial F/\partial u$ al variare degli argomenti entro H_1, si ha in particolare dalla (24′)

$$(24'') \qquad |g_m| \leqslant N |\delta_m| \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

talchè lo sviluppo (IV) ha lo stesso comportamento della (20), rispetto alla convergenza.

8. – Il metodo delle approssimazioni successive ci ha così fornito degli sviluppi, tanto per la radice $u(x)$ della (I), quanto più generalmente per una qualunque $F(u, x)$. Dal punto di vista della validità e della convenienza numerica, questi sviluppi sono altrettanto, anzi più vantaggiosi di quelli differenziali, precedentemente costruiti.

Infatti δ_m contiene a fattore $\varphi^m(x)$, e per conseguenza, quanto all'ordine dei termini, ci troviamo nelle stesse condizioni. Inoltre il calcolo effettivo riesce anche più spedito, e, per la validità del procedimento, basta largamente (come tosto apparisce dalle proprietà invocate nei nn. 6 e 7) che la funzione φ ammetta derivate continue dei primi due ordini, la $F(u, x)$ derivata prima finita, rapporto ad u.

Gli sviluppi differenziali (II) e (III) esigono invece la esistenza di derivate d'ordine tanto più elevato, quanto più si procede nello sviluppo.

Con tutto ciò non viene meno il loro interesse, perchè i singoli termini (escluso, si intende, l'eventuale resto) dipendono dai valori di φ, F (o, in particolare, f) e loro derivate, *nel solo punto generico* x, che si vuol considerare.

Colle approssimazioni successive si fanno invece intervenire valori delle funzioni in punti, che sono in generale distribuiti *entro tutto un intervallo*, prossimo ad x, ma pur sempre finito. Si tratta dunque di sviluppi che, malgrado una maggiore semplicità, hanno carattere eminentemente funzionale.

Rimangono perciò preferibili gli sviluppi differenziali, quando si desidera raggiungere una certa approssimazione, riportandosi ad un unico punto.