

ÜBER EINE TECHNISCHE AUFGABE,  
DIE IN BEZIEHUNG  
ZUR KONFORMEN ABBILDUNG STEHT

« Verh. der Ges. Deutscher Naturforscher », 77 Versamm. zu Meran,  
Leipzig 1906; pp. 20-21.

Ich möchte ein paar Minuten Ihre Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen, um ein spezielles Problem zu erwähnen, welches in enger Beziehung mit dem Vortrage des Herrn KOEBE steht.

Das Problem ist aus einer technischen Frage entstanden, die ich zuerst kurz anführen will.

Die Hauptleitung irgendeiner elektrischen Einrichtung sei durch einen (unendlich langen) Kreiszyylinder (im Schnitte einen Kreis)  $K_1$  schematisch dargestellt.

Es sei dann  $K_n$  ein zweiter Kreiszyylinder mit paralleler Axe und gleichen Querschnitte, in Verbindung mit der Erde (Blitzableiter).

Wenn die Potenzialdifferenz zwischen  $K_1$  und  $K_n$  eine gewisse Grenze überschreitet, so kommen Kurzschlüsse zustande, die gefährlich sein können und so viel wie möglich zu vermeiden sind.

Zu diesem Zwecke pflegt man nach Herrn WURTZ (es ist dies, der Hauptsache nach, der sog. Wurtzsche Ableiter) zwischen  $K_1$  und  $K_n$  mehrere isolierte Leiter (schematisch wieder unendlich lange Kreiszyylinder) wie Orgelpfeifen einzuschalten. Im Schnitte wird man gleiche und equidistanten Kreise erhalten, deren Zentra  $O_1, O_2, \dots, O_n$  auf derselben Geraden liegen, so dass  $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = \dots = \overline{O_{n-1}O_n}$ .

Erfahrungsgemäss hat sich ein solches Verfahren als nützlich erwiesen. Man hat indessen bemerkt (ohne imstande zu sein, sich die Sache begreiflich zu machen), dass manchmal noch Funken zwischen  $K_1$  und  $K_2$  überspringen, während dies für die folgenden Leiter nicht mehr geschieht.

Es wäre nun wünschenswert, auch diese partiellen Kurzschlüsse zu verhindern.

Es liegt nahe zu vermuten dass sich dies erreichen lässt, indem man die Hilfsleiter in passender Weise verschiebt, so dass z.B. die Intervalle

nicht mehr alle gleich sind, sondern zwischen den ersten etwas grösser als zwischen den letzten ausfallen.

Ist eine solche Vermutung berechtigt? Und noch präziser, welches sind überhaupt die günstigsten Lagen der Hilfsleiter, damit die obere Grenze des Potentialgefälles und folglich die Gefahr ein Minimum wird?

Um dies theoretisch zu entscheiden, darf man vorläufig den rein elektrostatische Vorgang als massgebend betrachten. Es tritt somit folgende Aufgabe der logarithmischen Potentialtheorie auf:

Es seien in einer Ebene  $n$  gleiche, sich nicht schneidende Kreise  $K_1, K_2, \dots, K_n$  gegeben, deren Mittelpunkte  $O_1, O_2, \dots, O_n$  auf einer Geraden liegen, wobei wir sie uns jedoch nicht äquidistant zu denken haben.

Nennen wir  $E$  das (mehrfach zusammenhängende) Gebiet ausserhalb  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .

Es handelt sich um die Bestimmung einer logarithmischen Potentialfunktion  $V$ , welche sich in  $E$  (den unendlich fernen Punkt eingeschlossen) regulär verhält und auf den begrenzenden Kreisen  $K_i$  Konstante Werte  $k_i$  annimmt.

Dabei sollen nur  $k_1$  und  $k_n$ , die sich auf den ersten und letzten Kreis beziehen, vorgeschrieben sein.

Auf den übrigen Kreisen (den isolierten Hilfsleitern) sind die Konstanten Potentialwerte  $k_i$  a priori unbestimmt; man weiss dagegen, dass die Gesamtmasse Null ist, d.h. die  $n - 2$  Bedingungen gelten

$$(1) \quad \int_{K_i} \frac{\partial V}{\partial n_i} dK_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

wo  $n$  die Normalrichtung bedeutet.

Dieses Problem lässt sich leicht nach RIEMANN auf eine Abbildungsaufgabe zurückführen, und zwar auf eine solche mehrfach zusammenhängender, von Kreisbogen begrenzter Gebiete.

Man hat nur neben  $V$  die sogenannte assoziierte Funktion  $U$  in Betracht zu ziehen (d.h. die — mehrdeutige — Funktion  $U$ , welche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

bis auf eine Konstante definiert wird) und die Korrespondenz zwischen den beiden Ebenen:

$$z = x + iy$$

(die Ebene der Kreise  $K_1, K_2, \dots, K_n$ ) und,

$$z' = e^{i(\sigma + i\nu)}$$

ins Auge zu fassen.

Das Resultat ist folgendes:

Dem Begiete  $F$  entspricht *eindeutig* in der  $z'$ -Ebene ein Kreisring  $E'$ , so dass

1) Die zwei äusseren Kreise der Reihenfolge und die begrenzenden Kreise des Ringes  $K'_1$  und  $K'_n$  als Bild haben.

2) Die übrigen Kreise  $K_i$  ( $i = 2, \dots, n-1$ ) dagegen in kreisförmige, mit  $K'_1$  und  $K'_n$  konzentrische Querschnitte  $A_i B_i$  ausarten, und zwar in folgendem Sinne: Wenn  $z$  einmal  $K_i$  durchläuft, so durchläuft  $z'$  die beiden Ufer des betreffenden Querschnittes und kehrt mit  $z$  in die ursprüngliche Lage zurück.

3) Alle die genannten Querschnitte haben eines ihrer beiden Enden auf demselben Radiusvektor. Die Lagen der  $A_i$  auf diesem Radius (welche den Potentialabfall veranschaulichen) und die Bogenlänge  $A_i B_i$  hängen dagegen von den Entfernungen der  $K_i$  in der  $z$ -Ebene ab.

Die Lösung dieser Abbildungsaufgabe in einer für die gedachte Anwendung geeigneten Form zu finden, wird vielleicht noch einige Schwierigkeiten darbieten.

Jedenfalls schien es mir nicht ohne Interesse, ihre Bedeutung für praktische Zwecke hier gleich hervorzuheben.

Es sei mir noch gestattet hinzuzufügen, dass ich auf die elektrotechnische Frage durch meinen Kollegen Professor LORI aufmerksam gemacht wurde. Er hat sich seinerseits vorgenommen, die Sache experimentell zu studieren.

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.