XXIX.

SULLA PENETRAZIONE DEI PROIETTILI NEI MEZZI SOLIDI

« Atti Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti », t. LXV (1905-1906), pp. 1149-1158.

Il sig. co. Calvi, Tenente Colonnello di Artiglieria, richiamò un giorno la mia attenzione sopra una circostanza, apparentemente paradossale, che egli aveva avuto occasione di rilevare nelle esperienze di tiro.

Si tratta del fatto seguente:

Suppongasi di sparare contro un mezzo solido (terrapieno, muro, strato di legname, ecc.) a diverse distanze.

Di mano in mano che il tiro si avvicina al bersaglio, la velocità V, con cui il proiettile vi arriva, va evidentemente crescendo. Sembrerebbe a prima vista che, *caeteris paribus*, anche l'entità della penetrazione X dovesse seguitare a crescere. Ma non è sempre così. In molti casi pratici (¹) si incontra una determinata distanza, e quindi un certo valore di V, per cui la penetrazione è massima.

Secondo la ordinaria teoria (²), la penetrazione totale X si esprime in termini di V, mediante una formula del tipo

$$X = h \log (1 + \beta V^2) \tag{I}$$

(h e β costanti positive).

La funzione $\log (1 + \beta V^2)$ cresce costantemente con V, e la (I) non rende quindi ragione dell'accennato fenomeno.

La spiegazione dovrebbe risiedere — così mi diceva il Calvi — nella deformazione, che il proiettile subisce, colpendo il bersaglio. Quanto maggiore è V, tanto più rilevante è lo schiacciamento del proiettile e di conseguenza l'ampiezza del foro, che esso deve praticare per farsi strada nel mezzo. Si ha così un aumento di resistenza, e non c'è più

(¹) Assai istruttiva è la tabella, data dal sig. Cranz, a pag. 238 del suo articolo *Ballistik*, « Enc. der math. Wiss. », Bd. IV, 2, Heft 2.

(²) Cfr. F. Siacci, *Balistica*, (seconda edizione), Torino, Casanova, 1888, capo XIII.

ripugnanza ad ammettere che la penetrazione possa eventualmente diminuire, malgrado una maggior forza viva iniziale.

Il calcolo conferma questa presunzione e conduce ad una forma assai semplice della legge, che lega X a V.

Tale forma è

$$X = \frac{h \log (1 + \beta V^2)}{1 + kV}, \tag{1}$$

dove h, k, β sono coefficienti positivi, che dipendono dalla natura del proiettile e del mezzo.

Il secondo membro si annulla tanto per $V = 0$, quanto per $V = \infty$.

La X ammette dunque un massimo (e uno soltanto, come è specificato al n. 2) al crescere di V.

Se k è abbastanza piccolo perchè kV riesca trascurabile di fronte all'unità, si ritrova la ordinaria formula (I).

L'influenza di kV diviene in ogni modo sensibile (e magari anche preponderante) per valori assai grandi di V, quali possono essere raggiunti dai proiettili moderni per distanze di tiro inferiori alle normali.

Complessivamente mi pare che la nuova formula (1), per il suo comportamento qualitativo e per l'agilità conferitale dai suoi tre coefficienti, possa dare agli artiglieri serio affidamento di rappresentare in modo soddisfacente i risultati di tutte le esperienze di tiro.

1. – Sia m la massa del proiettile, V la velocità, con cui esso colpisce (normalmente) il mezzo solido.

Nei rispetti dei proiettile quest'urto implica un impulso, per effetto del quale la velocità V discende quasi istantaneamente ad un valore $V' < V$.

È naturale l'ammettere che, malgrado la susseguente penetrazione, in questo stadio preliminare valga la ordinaria legge dell'urto sotto la forma

$$V' = eV,$$

dove si designa con e una frazione propria (coefficiente di restituzione), che dipende dalla natura ed eventualmente dalla forma dei corpi, che vengono a contatto, ma non da V.

L'impulso, di intensità $m(V - V') = m(1 - e)V$, subito dal proiettile, determina in esso una deformazione impulsiva, che (almeno fino ad un certo limite) sarà legittimamente valutabile trattando il proiettile stesso come un solido elastico.

A caratterizzare questa deformazione concorrono naturalmente la forma del proiettile e la natura del materiale, da cui esso è costituito. In ogni caso però (di ciò al n. 3) le sei componenti di deformazione riescono tutte proporzionali all'intensità dell'impulso $m(1-e)V$, e quindi a V, i coefficienti dipendendo esclusivamente dal proiettile (forma e moduli di elasticità). Proporzionali a V riescono così anche le dilatazioni superficiali: quella in particolare, che si riferisce alla massima sezione trasversale del proiettile.

Se S è l'area di tale sezione allo stato naturale, S' quella modificata dall'urto, si avrà

$$S' = S(1 + kV)\,,$$

con k coefficiente numerico (positivo) indipendente da V.

Ciò posto, applichiamo la ordinaria teoria della penetrazione al moto del proiettile nel mezzo. Si può far astrazione dalla gravità e ritenere il moto rettilineo sotto l'azione di una forza resistente, che consta di due termini, ambedue proporzionali alla sezione del proiettile (S' nel caso nostro): il primo costante ([3]), il secondo proporzionale al quadrato della velocità v, posseduta dal proiettile, nell'istante generico, che si considera.

Colle notazioni di SIACCI, la espressione di questa resistenza è

$$S'i\alpha(1 + \beta v^2)$$

(i, α, β coefficienti positivi, dipendenti: il primo dalla forma del proiettile, gli altri due dalla natura del mezzo).

Sostituiamovi per S' il suo valore $S(1 + kV)$ e poniamo

$$\frac{Si\alpha}{m} = \frac{e^2}{2h\beta}\,,$$

dove e designa, come già nella $V' = eV$, il coefficiente di restituzione.

Scrivendo anche β/e^2, anzichè β, la resistenza ϱ, riferita all'unità di massa, si può presentare sotto la forma

$$\varrho = -\frac{e^2}{2h\beta}(1 + kV)\left(1 + \frac{\beta}{e^2}v^2\right).$$

([3]) Secondo A. H. RESAL (*Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, « Comptes Rendus », t. CXXX, 25 gennaio 1895), questo primo termine dovrebbe invece ritenersi proporzionale alla velocità. Ciò non recherebbe alcuna modificazione *qualitativa* alle considerazioni della presente Nota.

Detta x la penetrazione corrispondente ad un istante generico t, avremo

$$v = \frac{dx}{dt},$$

che, associata alla equazione del movimento

$$\frac{dv}{dt} = \varrho,$$

porge

$$v \frac{dv}{dx} = \varrho.$$

Separando le variabili ed integrando da $x = 0$ (cioè dall'inizio della penetrazione, cui corrisponde la velocità $V' = eV$) fino ad un x generico, risulta

$$x = \frac{h}{1 + kV} \log \frac{1 + \beta V^2}{1 + \dfrac{\beta}{e^2} v^2}.$$

Per $v = 0$ si ha la penetrazione totale X sotto la forma annunciata:

$$X = h \frac{\log(1 + \beta V^2)}{1 + kV}. \tag{1}$$

2. – Dalla (1), ove si ponga per brevità

$$f(V) = 2\beta \frac{V(1 + kV)}{1 + \beta V^2} - k \log(1 + \beta V^2), \tag{2}$$

segue

$$\frac{dX}{dV} = \frac{h}{(1 + kV)^2} f(V). \tag{3}$$

Formiamo anche la derivata $f'(V)$. Essa è

$$f'(V) = 2\beta \frac{1 + kV}{1 + \beta V^2} - 4\beta^2 \frac{V^2(1 + kV)}{(1 + \beta V^2)^2} = 2\beta \frac{1 + kV}{(1 + \beta V^2)^2}(1 - \beta V^2),$$

che ammette evidentemente la sola radice positiva $V = 1/\sqrt{\beta}$. Per valori di $V < 1/\sqrt{\beta}$, $f'(V)$ è positiva, e quindi $f(V)$ crescente; oltrepassata la radice $1/\sqrt{\beta}$, $f'(V)$ diviene e resta negativa, ossia $f(V)$ va decrescendo.

Dalla (2) si ha $f(0) = 0$. Perciò $f(V)$, che va crescendo con V fino a $V = 1/\sqrt{\beta}$, rimane certo positiva in questo intervallo. Da $V = 1/\sqrt{\beta}$ in avanti, $f(V)$ decresce costantemente, e siccome, al convergere di V verso ∞, tende verso $-\infty$, così passerà una volta (ed una volta soltanto) per il valore zero.

Ciò posto, riprendiamo la (3) e osserviamo che il segno di dX/dV è quello di $f(V)$. Si è senz'altro condotti alla conclusione che la funzione X cresce con V, da $V = 0$ fino ad un certo valore V_1 ($> 1/\sqrt{\beta}$), definito da $f(V_1) = 0$; raggiunge ivi un massimo, e poi decresce costantemente al crescere ulteriore di V.

Per la costante β (malgrado la modificazione introdotta nel definirla) potremo adottare i valori tabulati dal SIACCI [4]. In tale ipotesi $1/\sqrt{\beta}$ varia da un minimo di $1000/\sqrt{200}$ (per le ghiaie) ad un massimo di $1000/\sqrt{15}$ (per le murature), cioè all'ingrosso da 70 a 250 metri/secondo.

La velocità critica V_1, per un generico mezzo, sta certo (molto) al disopra del limite corrispondente. Il valore numerico dipende naturalmente anche da k, a norma della equazione

$$f(V_1) = 0\,.$$

Scrivendola sotto la forma

$$\frac{2}{V_1}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\beta V_1^2}\right)\left\{\log \beta V_1^2 + \log\left(1+\dfrac{1}{\beta V_1^2}\right)\right\}-2} = k\,,$$

si vede che, per $k = 0$ (teoria ordinaria), si ha la radice $V_1 = \infty$. Per i piccoli valori di k (i quali appunto ci interessano) V_1 sarà ancora grande, e potremo trascurare $1/(\beta V_1^2)$ di fronte all'unità. Con ciò la equazione che definisce V_1, rimane asintoticamente semplificata in

$$\frac{2}{V_1}\,\frac{1}{\log \beta V_1^2 - 2} = k\,.$$

Questa formula si può risguardare come definizione pratica della costante k, desunta dalla misura diretta della velocità critica V_1.

3. – Occupiamoci ora di giustificare quanto abbiamo da principio asserito circa la deformazione impulsiva, che il proiettile subisce colpendo il mezzo.

---

[4] Loco citato, tabella IX.

Cominciamo col richiamare le equazioni indefinite delle deformazioni elastiche impulsive.

Designino:

ϱ la densità in un punto generico P di un solido elastico τ;

Δ_x, Δ_y, Δ_z le componenti della brusca variazione di velocità, subìta da P;

X_x, X_y, ..., Z_z le componenti degli sforzi (impulsivi), che si destano nell'intorno di P.

In assenza di impulsi di massa, direttamente applicati, in ogni punto di τ debbono sussistere le equazioni:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x}+\dfrac{\partial X_y}{\partial y}+\dfrac{\partial X_z}{\partial z}=\varrho\Delta_x\,, \\[2ex] \dfrac{\partial Y_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Y_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Y_z}{\partial z}=\varrho\Delta_y\,, \\[2ex] \dfrac{\partial Z_x}{\partial x}+\dfrac{\partial Z_y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}=\varrho\Delta_z\,. \end{cases}$$

Nel caso del proiettile, immaginandolo, come a n. 1, dotato nell'istante dell'urto di velocità traslatoria V (normale alla superficie terminale del mezzo) e supponendo l'asse x parallelo a questa velocità, avremo

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta_x=-(1-e)V\,, \\ \Delta_y=0\,, \\ \Delta_z=0\,. \end{cases}$$

Chiamiamo σ la superficie terminale del proiettile; α, β, γ i coseni direttori della normale vôlta verso l'interno; L, M, N le componenti degli sforzi (impulsivi) superficiali.

Varranno, come d'ordinario, le relazioni

$$(7)\qquad \begin{cases} L=X_x\alpha+X_y\beta+X_z\gamma\,, \\ M=Y_x\alpha+Y_y\beta+Y_z\gamma\,, \\ N=Z_x\alpha+Z_y\beta+Z_z\gamma\,. \end{cases}$$

Ciò premesso, sia Q il punto di σ, che per il primo viene a contatto col mezzo.

La reazione del mezzo al primo urto può essere assimilata ad un unico impulso applicato in Q, eguale alla risultante dei vettori ($\Delta_x d\tau$,

$\Delta_y d\tau$, $\Delta_z d\tau$), e quindi di intensità $m(1-e)V$ e diretto verso l'interno di τ (nel senso delle x decrescenti).

In realtà tale reazione non sarà localizzata in Q, ma distribuita in un piccolo intorno di questo punto: la sostituzione con un vettore unico non avrà però sensibile influenza sulla deformazione delle parti di τ, abbastanza discoste da Q. Siccome il nostro scopo è di caratterizzare la massima dilatazione trasversale, la quale (date le solite forme di proiettili sferici od oblunghi) è certo fuori dell'influenza locale, potremo tranquillamente permetterci la accennata sostituzione.

Siamo così in definitiva condotti a formulare il problema analitico seguente:

Assegnare la deformazione elastica soddisfacente

a) entro τ, alle equazioni (5) coi valori (6) dei secondi membri;

b) in tutti i punti di σ, eccettuato soltanto Q, alle equazioni

$$L=0\,,\qquad M=0\,,\qquad N=0\,, \tag{8}$$

le quali esprimono che la reazione (impulsiva) del mezzo si scarica tutta in Q.

È appena necessario avvertire che, nelle (5) e (7) e, per conseguenza, nelle (8), le $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ debbono intendersi esplicitate in funzione delle tre incognite principali u, v, w (componenti dello spostamento elastico),

Se si aggiunge la condizione che u, v, w si mantengano regolari entro τ e sopra σ, salvo, si intende, il punto Q, si ha quanto basta per la loro univoca determinazione. Si può infatti agevolmente ricondursi al solito tipo dei problemi di equilibrio elastico con date forze di massa e dati sforzi superficiali.

Per riconoscerlo in modo preciso, giova ricorrere all'artificio seguente:

Sia Σ il piano tangente a σ in Q, T quello dei due semispazi, limitati da Σ, che contiene τ. Si immagini per un momento T quale un ipotetico suolo elastico dello stesso materiale di τ.

Si sa assegnare ([5]) la deformazione, che sarebbe destata nei vari punti di T da una pressione di intensità $m(1-e)V$, applicata in Q, normalmente a Σ.

Per una tale deformazione, sieno u_1, v_1, w_1 le componenti degli spostamenti; L_1, M_1, N_1 le componenti degli sforzi sopportati dagli elementi superficiali di σ, i quali sono tutti interni (o almeno non esterni) al suolo T. Queste L_1, M_1, N_1 — notiamolo bene — sono finite e continue in ogni

([5]) Cfr. per es. E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, Bocca, 1894, pag. 126.

punto di σ, escluso il punto Q, in cui però *rimangono finite* (ritenendosi finita la curvatura di σ in Q).

Usufruiamo delle funzioni ausiliarie u_1, v_1, w_1, ponendo per ogni punto di τ,

$$u = u_1 + u_2\,, \quad v = v_1 + v_2\,, \quad w = w_1 + w_2\,;$$

e diciamo L_2, M_2, N_2 gli sforzi in σ, corrispondenti alle nuove incognite u_2, v_2, w_2. Si constata immediatamente che esse debbono ancora soddisfare alle equazioni indefinite (5) coi valori (6) dei secondi membri, e, in superficie, alle

$$L_2 = -L_1\,, \quad M_2 = -M_1\,, \quad N_2 = -N_1\,.$$

Queste condizioni analitiche in u_2, v_2, w_2 sono precisamente quelle che corrispondono all'equilibrio elastico del corpo τ sotto l'azione delle forze di massa (8) e degli sforzi superficiali $-L_1$, $-M_1$, $-N_1$. Le une e gli altri soddisfano complessivamente alle condizioni di equilibrio proprie di un sistema rigido. La univoca esistenza di u_2, v_2, w_2 e quindi anche di u, v, w, rimane con ciò giustificata ([6]).

Della effettiva loro determinazione non è il caso di occuparsi. Importa soltanto accertare che u, v, w si presentano sotto la forma

$$V\bar{u}\,, \quad V\bar{v}\,, \quad V\bar{w} \tag{9}$$

con $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ *indipendenti da* V.

La dimostrazione è ovvia.

Basta infatti riprendere le equazioni (5), (8) e notare, che, essendo esse lineari in u, v, w e loro derivate, quando si sostituiscono ad u, v, w i prodotti (9), i primi membri rimangono moltiplicati per V, conservando del resto, nelle $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ la stessa forma che avevano nelle u, v, w. Non c'è che da togliere il fattore V, perchè, data la forma delle (6), di V stesso non rimanga più traccia nè nei primi, nè nei secondi membri. *C.d.d.*

Assieme ad u, v, w, anche le loro derivate e per conseguenza le sei componenti di deformazione $x_x, x_y, \ldots, z_z$, risultano del prodotto di V per funzioni $\bar{x}_x, \bar{x}_y, \ldots, \bar{z}_z$ indipendenti da V (componenti di deformazione relative agli spostamenti $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$).

([6]) Veramente la teoria matematica dell'elasticità non è ancora in grado di fornire una dimostrazione, assolutamente completa e rigorosa, del teorema di esistenza, nelle condizioni accennate.

Le recenti ricerche dei sigg. G. Lauricella, E. Cosserat e Korn mostrano però che vi si è così vicini che un tale risultato si può quasi ritenere acquisito.

Gli elementi superficiali normali all'asse x, subiscono una dilatazione (unitaria) misurata da $y_y + z_z$. In particolare, se S è la massima sezione trasversale del proiettile allo stato naturale, la dilatazione totale, che essa subisce, viene espressa da

$$\int_S (y_y + z_z)\, dS = V \int_S (\bar{y}_y + \bar{z}_z)\, dS\,.$$

Con ciò il nostro coefficiente k risulta teoricamente definito dalla formula

$$k = \frac{1}{S}\int_S (\bar{y}_y + \bar{z}_z)\, dS\,.$$