XXIII.

SUR LA RÉSOLUTION QUALITATIVE DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Acta math. », t. 30 (1906), pp. 305-327.

Dans le problème des trois corps (points matériels, qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière tant que les positions des trois points restent distinctes.

D'après cela il est presque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisément M. PAINLEVÉ (1) a démontré qu'à partir de conditions initiales données des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour t convergent vers une valeur finie t_1.

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur les représentations des branches monogènes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps les coordonnées sont exprimables *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement* par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet x une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout à l'heure, la fonction $x(t)$ reste régulière pour toutes les valeurs de t, qu'il y a lieu de considérer: savoir de l'instant initial t_0 jusqu'à l'infini dans le cas général où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de t_0 à t_1 (ce dernier instant exclu) lorsque le choc intervient.

Dans les deux cas les intervalles de l'axe réel (t_0, ∞), (t_0, t_1) sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point t_0. Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données

(1) Voir ses *Leçons etc., professées à Stockholm*, chez A. Hermann, Paris, 1897, p. 583.

initiales, les dérivées successives de la fonction $x(t)$ au centre t_0 de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de $x(t)$, embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à être remplies par les circonstances initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint ([2]), vient d'être brillamment discutée par M. BISCONCINI ([3]).

La seconde attend encore une réponse. Mais, lors même qu'on en possèderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques. En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et degré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite ε. A cette condition seulement les résultats mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné, le mouvement se poursuivra régulièrement, il faudra être certain que les distances restent supérieures à l'ε susdit.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est ainsi, voilà le but essentiel de l'analyse qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint. Voici d'une façon précise le contenu de ma recherche.

Rappelons d'abord qu'il s'agit dans le problème restreint du mouvement plan d'un corps P (de masse négligeable) attiré par deux autres S, J tournant uniformément autour de leur centre de gravité.

La distance $\overline{SJ}$ restant constante, on doit se préoccuper seulement de $\overline{PS}$, $\overline{PJ}$, et il suffit d'en envisager une, $\overline{PS}$ par exemple, puisque les mêmes considérations s'appliquent évidemment à l'autre.

Cela étant, je me suis proposé l'étude des trajectoires du système

([2]) *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », ser. III, t. 9, 1903 [in questo vol.: XVI, pp. 279-308].
([3]) *Sur le problème des trois corps etc.*, dans ce même volume des « Acta ».

(courbes décrites par le point P) dans une région suffisamment petite D entourant le centre S.

Les équations différentielles du mouvement présentent, comme il est évident d'après la nature newtonienne de la force, des singularités au point S. Mais on peut les régulariser (le sens de ce mot n'a pas besoin d'explications) par une transformation convenable. On peut notamment, en ayant recours à l'équation de HAMILTON-JACOBI, caractériser d'une façon très nette les trajectoires de la région D. On en tire sans peine une représentation sous forme holomorphe de tous les arcs de trajectoire A, possibles à l'intérieur de D. Aucun de ces arcs ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais, c'est-à-dire tout arc A, ne passant pas exactement au point S, en reste à une distance finie. La moindre distance δ du point S à l'arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur A.

Ou bien $\delta = 0$; c'est la condition du choc. Ou bien $\delta > 0$. On peut affirmer que sur l'arc A le mouvement se poursuit régulièrement. Si au surplus $\delta > \varepsilon$, il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ($\delta > \varepsilon$, ni même $\delta > 0$ quel que soit t).

C'est là une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. PHRAGMÉN.

On conçoit en effet qu'on puisse, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de D le long d'un arc A, et y rentrer le long d'un arc différent A', et ainsi de suite, avec des nouveaux δ, ayant même zéro pour limite inférieure.

Il arrive sans doute — l'exemple étant offert (§ 8) déjà par le cas élémentaire, où la masse de J serait nulle — qu'une trajectoire pénètre dans D une infinité de fois par une série d'arcs A, qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de D comme des éléments distincts.

Sur la limite inférieure des δ je ne puis rien dire: tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoué.

L'analyse de ce qui se passe au voisinage de S ne suffit donc pas à épuiser la question tout en fournissant des renseignements dignes d'intérêt.

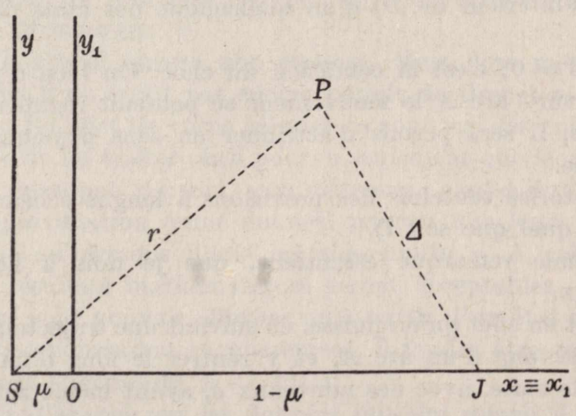
Pour résumer sous forme expressive on peut énoncer la conclusion suivante:

Si $\delta > \varepsilon$ il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

Qu'il me soit permis de saisir l'occasion pour adresser tous mes remerciements à MM. Mittag-Leffler et Phragmén, qui ont honoré ma recherche de leur intérêt bienveillant.

1. - Equations du mouvement. Forme canonique usuelle.

Soit P celui des trois corps, dont la masse est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres S, J. Ce mouvement est alors képlérien. On suppose qu'il soit le plus simple possible, c'est-à-dire que les deux corps S et J tournent uniformément autour de leur centre de gravité commun O. On suppose encore que le corps P se meut dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de S et de J.



On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: mouvement plan d'un point P, sollicité par l'attraction newtonienne de deux centres variables S et J.

Convenons de prendre comme unité de masse la somme des masses des deux corps S et J; si μ désigne la masse de J, $\nu = 1 - \mu$ sera alors celle de S.

Convenons encore de prendre la distance constante $\overline{SJ}$ pour unité de distance et de fixer l'unité de temps de façon que la vitesse angulaire de la droite SJ soit égale à l'unité. Dès lors la constante de la gravitation universelle résulte, elle aussi, égale à l'unité, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de P est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta},$$

en désignant par r et Δ les distances $\overline{PS}$ et $\overline{PJ}$.

Rapportons-nous pour un moment à deux axes mobiles Ox_1, Oy_1 ayant OJ comme direction positive de l'axe x_1, et, comme direction positive de l'axe y_1, celle qu'on obtient de OJ en tournant de $\pi/2$ dans le sens de la rotation de la droite SJ.

Comme O est le centre de gravité de S et de J et $\overline{SJ} = 1$, les coordonnées de S sont: $-\mu$, 0; celles de J: $1-\mu$, 0.

Ceci posé, d'après le théorème de CORIOLIS, les composantes de l'accélération absolue d'un point mobile quelconque P (ayant $x_1(t)$, $y_1(t)$ pour coordonnées par rapport à nos axes) seront

$$x_1'' - 2y_1' - x_1 \,,$$
$$y_1'' + 2x_1' - y_1 \,,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport au temps t.

Les équations du mouvement s'obtiennent en égalant l'accélération à la force, qui agit sur l'unité de masse.

Elles sont donc ici:

$$x_1'' - 2y_1' - x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right),$$
$$y_1'' + 2x_1' - y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right).$$

Passons maintenant de x_1, y_1 à un système d'axes parallèles x, y, ayant pour origine le point S.

Les formules de transformation

$$x_1 = x - \mu \,, \qquad y_1 = y$$

donnent

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' - 2y' - x = -\mu + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\[2ex] y'' + 2x' - y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \end{cases}$$

ayant posé pour abréger

$$V = \frac{1}{\Delta} - x \,.$$

Je pose encore

$$(2) \qquad \begin{aligned} x' &= p + y \,, \\ y' &= q - x \,, \end{aligned}$$

et je puis alors écrire les équations (1) sous la forme:

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \quad q + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = -p + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right). \end{cases}$$

Les deux équations du second ordre (1) se trouvent ainsi remplacées par le système équivalent d'équations du premier ordre (2), (3) aux quatre fonctions inconnues x, y, p, q.

C'est un système canonique, dont la fonction caractéristique est

$$\text{(4)}\qquad F = \frac{1}{2}\{(p+y)^2 + (q-x)^2\} - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\},$$

et les variables conjuguées x, p; y, q.

On constate en effet immédiatement que les équations (2) et (3) sont bien identiques aux suivantes:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \quad \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \quad \dfrac{\partial F}{\partial q}; \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Il convient de remarquer:

1) que les auxiliaires p et q, définies par (2), ne sont que les composantes de la vitesse absolue du mobile (plus précisément de la vitesse de P par rapport à un système de direction invariable ayant l'origine en S);

2) que les équations (I) admettent l'intégrale (dite de JACOBI)

$$F = -C.$$

En désignant par v la grandeur de la vitesse relative (aux composantes x', y'), la dite intégrale s'écrit, d'après (4) et (2),

$$\text{(5)}\qquad \frac{1}{2}v^2 - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\} = -C.$$

2. - Autre forme canonique. Régularisation au point S.

Une transformation du système (I), qui donne lieu à des conséquences remarquables, s'obtient en posant

$$\text{(6)}\qquad x + iy = (\xi + i\eta)^2,$$

$$\text{(7)}\qquad p - iq = \frac{\varpi - i\chi}{2(\xi + i\eta)} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

où il est sous-entendu qu'on doit séparément égaler dans les deux membres les coefficients de i et les termes qui en sont indépendants.

Les deux séries conjuguées x, y; p, q sont de la sorte liées aux deux nouvelles séries ξ, η; $\widetilde{\omega}$, χ par une transformation de contact. Il suit en effet de (6)

$$dx + i\,dy = 2(\xi + i\xi)(d\xi + i\,d\eta)\,,$$

d'où, en multipliant membre à membre avec l'équation (7),

$$(p - iq)(dx + i\,dy) = (\widetilde{\omega} - i\chi)(d\xi + i\,d\eta)\,,$$

ce qui donne en particulier

$$p\,dx + q\,dy = \widetilde{\omega}\,d\xi + \chi\,d\eta\,.$$

En posant

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{8}$$

et en tenant compte que r n'est autre que $|\sqrt{x^2 + y^2}|$, on obtient aisément de (6) et (7)

$$\left\{\begin{aligned} r &= \varrho^2\,, \\ p^2 + q^2 &= \frac{\widetilde{\omega}^2 + \chi^2}{4\varrho^2}\,, \\ xp + yq &= \frac{1}{2}\,(\xi\widetilde{\omega} + \eta\chi)\,, \\ xp - yq &= \frac{1}{2}\,(\eta\widetilde{\omega} - \xi\chi)\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Appliquons maintenant le changement de variables (6) et (7) au système différentiel (I).

D'après l'identité

$$p\,dx + q\,dy = \widetilde{\omega}\,d\xi + \chi\,d\eta\,,$$

le système transformé en ξ, η, ω, χ sera encore canonique avec la même fonction caractéristique F, qu'on doit seulement exprimer par les nouvelles variables.

Nous aurons donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \widetilde{\omega}}\,, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \chi}\,; \\ \frac{d\widetilde{\omega}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}\,, & \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta}\,. \end{aligned}\right. \tag{I'}$$

Quant à F, les (4) et (9) donnent après coup

$$(4') \qquad F = \frac{1}{8\varrho^2}\{(\tilde{\omega} + 2\varrho^2\eta)^2 + (\chi - 2\varrho^2\xi)^2\} - \left\{\frac{\nu}{\varrho^2} + \frac{1}{2}\varrho^4 + \mu V\right\},$$

$V = 1/\Delta - x$ étant une fonction régulière tant que $\overline{PS} < 1$, c'est-à-dire, d'après (6), tant que $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Pour notre but il suffit d'ailleurs de retenir que c'est une fonction holomorphe pour $|\xi|$, $|\eta|$ assez petits.

Il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer (tout en n'ayant pas à m'en servir dans ce qui va suivre) que le système (I') peut être régularisé au point S.

Voici de quelle façon.

Introduisons une variable auxiliaire τ d'après la position

$$d\tau = \frac{dt}{\varrho^2}.$$

Tant que le mouvement se poursuit régulièrement $\varrho^2 = r$ n'est pas nul (ni infini). Il y a donc correspondance biunivoque entre t et τ, et on peut bien considérer cette dernière, au lieu de t, comme variable indépendante. Faisons ce changement dans les équations différentielles (I'). On n'a qu'à y remplacer dt per $\varrho^2 d\tau$, ce qui donne:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varrho^2\frac{\partial F}{\partial\tilde{\omega}}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \varrho^2\frac{\partial F}{\partial\chi};$$
$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} = -\varrho^2\frac{\partial F}{\partial\xi}, \qquad \frac{d\chi}{d\tau} = -\varrho^2\frac{\partial F}{\partial\eta}.$$

Comme $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$, et F a, pour toute solution de (I'), une valeur constante $-C$, on peut écrire:

$$\varrho^2\frac{\partial F}{\partial\xi} = \frac{\partial(\varrho^2 F)}{\partial\xi} - 2\xi F = \frac{\partial(\varrho^2 F)}{\partial\xi} + 2C\xi = \frac{\partial}{\partial\xi}[\varrho^2(F + C)].$$

De même

$$\varrho^2\frac{\partial F}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}[\varrho^2(F + C)].$$

Il suffit donc de poser

$$H = \varrho^2(F + C) = \frac{1}{8}\{(\tilde{\omega} + 2\varrho^2\eta)^2 + (\chi - 2\varrho^2\xi)^2\} - \left\{\nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^6 + \mu\varrho^2 V\right\}$$

pour pouvoir présenter le système précédent sous la forme

$$(\mathrm{I}'') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \tilde{\omega}}, & \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \chi}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{d\chi}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \end{aligned} \right.$$

qui est encore canonique et parfaitement régulier au point S.

Toute solution de (I′) [ou de (I)] donne lieu à une solution de (I″), pour laquelle $H = 0$, et réciproquement (la constante C ayant même valeur dans les deux cas).

3. - Equation de Hamilton-Jacobi. Déduction d'une intégrale complète W.

L'équation de Hamilton-Jaccobi, relative au système (I′), s'obtient de suite en égalant la fonction caractéristique (4′) à une constante et en y entendant

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \qquad \chi = \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Je désignerai la constante par $-C$, et je pourrai écrire, en chassant le dénominateur ϱ^2,

$$(10) \qquad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\varrho^2\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\varrho^2\xi\right)^2\right\} = \nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^6 + \mu\varrho^2 V.$$

L'équation analogue pour le système complètement régularisé (I″) serait

$$H = \text{const.},$$

ce qui revient encore à (10) lorsqu'on donne à la constante du second membre la valeur zéro.

Ceci remarqué en passant, faisons subir aux variables indépendantes ξ, η une substitution orthogonale

$$\xi + i\eta = e^{i\alpha}(\xi_1 + i\eta_1) \qquad (\alpha \text{ constante réelle}).$$

Les binômes

$$\xi^2 + \eta^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\eta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \eta}$$

sont des invariants et on peut écrire de suite comme transformée de l'équation précédente

$$(10') \qquad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + 2\varrho^2\eta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1} - 2\varrho^2\xi_1\right)^2\right\} = \nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^6 + \mu\varrho^2 V_1\,,$$

où V_1 est ce que devient V en y remplaçant ξ, η par $\xi_1 \cos\alpha - \eta_1 \sin\alpha$, $\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha$. V_1 est donc une fonction de ξ_1, η_1, α, périodique par rapport à α et regulière tant que $|\xi_1|$, $|\eta_1|$ demeurent assez petits.

L'équation (10'), quadratique par rapport à $\partial W/\partial\xi_1$, a deux racines, se réduisant respectivement à $\pm\sqrt{8\nu}$ pour la valeur zéro des trois autres arguments ξ_1, η_1, $\partial W/\partial\eta_1$.

Le théorème général d'existence relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous permet ainsi d'affirmer qu'il existe deux intégrales de (10'), holomorphes au voisinage de $\xi_1 = \eta_1 = 0$ et se réduisant à zéro pour $\xi_1 = 0$. Leurs développements en série de puissances de ξ_1, η_1 peuvent être calculés de proche en proche, en partant de l'une ou de l'autre des deux expressions de $\partial W/\partial\xi_1$ fournies par (10').

Fixons par exemple celle, pour qui le radical $\sqrt{8\nu}$ a sa valeur arithmétique.

L'intégrale correspondante a nécessairement la forme

$$W = \sqrt{8\nu}\,\xi_1(1 + \mathfrak{P}_1)\,,$$

où $\mathfrak{P}_1$ est une série de puissances de ξ_1, η_1, qui s'annule pour $\xi_1 = \eta_1 = 0$.

Comme les coefficients de l'équation (10') sont des fonctions périodiques du paramètre α, il en sera de même des coefficients de W et par suite de W elle-même.

Le champ de convergence de $\mathfrak{P}_1$, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, peut dépendre en particulier de la constante C et du paramètre α. Mais α ne dérange pas. On est assuré en effet par les remarques, qui précèdent, que, une fois fixée la valeur de C, on peut lui faire correspondre un domaine de l'espace complexe ξ_1, η_1, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, où la fonction W reste régulière quelle que soit la valeur (réelle) de α.

Abandonnons désormais les variables auxiliaires ξ_1, η_1, en reprenant nos variables ξ, η.

La fonction W, qu'on vient de définir, prend l'aspect

$$(11) \qquad W = \sqrt{8\nu}\,(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\{1 + \mathfrak{P}(\xi, \eta, \alpha)\}\,,$$

où $\mathfrak{P}$ est une fonction périodique de α, qui s'annule pour $\xi = \eta = 0$ et reste régulière dans un certain domaine des ξ, η, qu'on peut supposer indépendant de α (mais non de C).

4. - Sur une équation implicite dépendante de W.

On tire de (11)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \sqrt{8\nu}\cos\alpha + \dots, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu}\sin\alpha + \dots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu}\, e^{i\alpha} + \dots,$$

les termes non écrits contenant ξ ou η en facteur.

Introduisons, pour abréger l'écriture, l'expression (5) de la vitesse relative v, c'est-à-dire, en y remplaçant r par ϱ^2,

$$\varrho v = \left|\sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + \varrho^6 + 2\mu\varrho^2 V}\right|, \tag{5'}$$

et posons

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\,\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q}).$$

La fonction $\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \alpha)$ jouira — on le constate de suite — des mêmes propriétés que $\mathfrak{P}$, sauf bien entendu que ce n'est plus une fonction réelle.

Ceci posé, envisageons l'équation

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\,\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = k, \tag{12}$$

en y entendant par k un nombre de module égal à l'unité, et en y considérant: ξ, η comme des paramètres ayant des valeurs données ξ_0, η_0; α comme inconnue.

Le premier membre, c'est-à-dire $e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q})$, est une fonction périodique de α, régulière pour $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ assez petits.

On peut dire également, en remplaçant α par

$$\gamma = e^{i\alpha},$$

que le premier membre de l'équation (12) est une fonction uniforme de γ,

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0),$$

holomorphe pour tous les points du cercle $|\gamma| = 1$, tant que $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ sont assez petits.

A cause de (10) et de (5′), on a l'identité

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = \frac{2\varrho v}{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\varrho^2(\xi - i\eta)}\,.$$

L'équation (12) entraîne donc la suivante:

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\varrho^2(\xi - i\eta)}{2\varrho v} = \frac{1}{k}\,, \tag{12'}$$

ce qu'on peut aussi énoncer en disant que l'équation (12) se transforme en elle même lorsqu'on y change i en $-i$, et k en $1/k$ (sans toucher aux autres quantités).

Mettons en évidence comme inconnue γ, au lieu de α, et appelons $\overline{\psi}$ ce que devient la fonction ψ lorsqu'on change i en $-i$ en laissant toute lettre inaltérée.

Les équations

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0) = k\,, \tag{12-bis}$$

$$\overline{\psi}\left(\frac{1}{\gamma}, \xi_0, \eta_0\right) = \frac{1}{k} \tag{12'-bis}$$

ne seront pas distinctes, d'après ce qu'on vient de dire: toute valeur de γ satisfaisant à la première vérifie par là même aussi la seconde.

Attribuons en particulier la valeur zéro aux paramètres ξ_0, η_0. Il reste, au premier membre de (12), $e^{i\alpha}$. L'équation (12 bis) se réduit donc à

$$\gamma = k\,.$$

Or $\partial\psi/\partial\gamma$ ne s'annule pas pour $\xi_0 = \eta_0 = 0$ (c'est l'unité).

Il existe partant un domaine autour du point $\xi = \eta = 0$, dans lequel l'équation (12 bis) définit univoquement une racine γ_1. Je dis qu'elle a l'unité pour module.

Je remarque pour cela qu'elle satisfait aussi à l'équation (12′ bis), et par suite même à celle qu'on en déduit en remplaçant toute quantité par sa conjuguée.

Comme ξ_0, η_0 et les autres constantes C, μ, ν sont essentiellement réelles, la dite opération consiste dans la substitution de ψ à $\bar{\psi}$, $1/\bar{\gamma}_1$ et $1/\bar{k}$ à $1/\gamma_1$ et $1/k$.

Le module de k étant l'unité, $1/\bar{k} = k$, et l'on aura en définitive, à côté de

$$\psi(\gamma_1, \xi_0, \eta_0) = k\,,$$

aussi

$$\psi\left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1}, \xi_0, \eta_0\right) = k\,.$$

Il en résulte que $1/\bar{\gamma}_1$ est racine de (12 bis) en même temps que γ_1.

Mais dans un certain domaine des ξ, η, il n'y a qu'une seule racine: γ_1 et $1/\bar{\gamma}_1$ sont donc identiques, ce qui démontre bien que la racine de l'équation (12 bis) reste unimodulaire dans ce domaine.

Je le désignerai par D, en faisant ici encore remarquer qu'on peut le considérer comme fixe dès qu'on ne fait pas varier C. Tant que ξ, η appartiennent à ce domaine on peut satisfaire à l'équation (12) par un angle réel $\alpha = (1/i) \log \gamma_1$, et un seulement, puisqu'on ne doit naturellement considérer comme distincts ceux qui en diffèrent par des multiples entiers de 2π.

5. - Solutions particulières. Choix des paramètres.

Revenons aux équations du mouvement en coordonnées cartésiennes x, y.

Une solution particulière quelconque reste déterminée d'une façon unique pourvu qu'on se donne l'état de mouvement (position et vitesse) correspondant à un instant quelconque t_0 ([4]).

Les quatre éléments déterminatifs des états de mouvement, appartenant à une même solution, sont toutefois liés à tout instant par la relation intégrale $F = -C$, et on pourra, pour fixer une solution particulière, se donner la valeur de la constante C, et trois des quatre quantité définissant la position P_0 et la vitesse à l'instant t_0.

En premier lieu, par exemple, les valeurs ξ_0, η_0 de ξ, η se rapportant à P_0. La connaissance de P_0 et de C définit sans ambiguité la valeur absolue v de la vitesse moyennant (5').

([4]) Cela suppose naturellement que tout soit régulier et par suite que la position du mobile dans l'état envisagé ne soit ni S ni J.

Comme quatrième élément déterminatif il y a lieu de prendre la direction de la vitesse [5].

φ désignant l'angle, que la dite direction fait avec la direction positive de l'axe des abscisses,

$$k = e^{i\varphi} \frac{\xi_0 - i\eta_0}{\varrho_0} \qquad (\varrho_0 = |\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}|) \tag{13}$$

sera notre quatrième paramètre.

Pour fixer une trajectoire il suffit naturellement de se donner C, ξ_0, η_0, k en se passant de l'instant particulier t_0 auquel correspondent ces quatre valeurs. Mais le phénomène est réversible, ce qui se déduit analytiquement de la circonstance que les équations (I) ne changent pas lorsqu'on y change t en $-t$ en renversant en même temps les signes de x', y'.

Renverser le sens de la vitesse équivaut à changer φ dans $\varphi + \pi$ et par conséquent (la position restant la même) k dans $-k$.

Il s'en suit qu'aux deux états de mouvement

$$C\,, \quad \xi_0\,, \quad \eta_0\,, \quad k\,;$$
$$C\,, \quad \xi_0\,, \quad \eta_0\,, \quad -k$$

correspondent les deux sens opposés d'une même trajectoire.

Il convient encore d'indiquer quelle est l'expression de k en fonction des variables conjuguées ξ, η, ϖ, χ (je supprime l'indice 0 pour abréger l'écriture).

Partons pour cela de l'identité

$$x' + iy' = ve^{i\varphi}\,.$$

On en tire

$$k = \frac{x' + iy'}{v} \, \frac{\xi - i\eta}{\varrho}\,.$$

Transformons le second membre en profitant des (2), (6), (7), et il viendra

$$k = \frac{\varpi + i\chi - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v}\,. \tag{14}$$

---

[5] Je n'aurais pas à considérer le cas $v = 0$, et je puis partant parler de direction.

6. - Intégrales canonique. Leur validité effective au voisinage de S.

Soit β une constante et envisageons les équations classiques de la méthode d'intégration de JACOBI

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta ,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} = \tilde{\omega} , \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi ,$$

W étant l'intégrale complète, définie au § 3.

Supposons qu'elles soient satisfaites par des valeurs particulières ξ_0, η_0, $\tilde{\omega}_0$, χ_0 de ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ.

Il est bien connu que les intégrales ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ de (I'), définies par les valeurs initiales ξ_0, η_0, $\tilde{\omega}_0$, χ_0 continuent à vérifier ces équations tant que le mouvement reste régulier.

Ceci rappelé, désignons par A un arc quelconque de trajectoire tout intérieur au domaine D.

On a le théorème suivant:

Quel que soit A, on peut toujours fixer les constantes α et β de façon que les équations (II), (III) soient remplies en tout point de A.

D'après ce qui précède, il nous suffit de le constater pour un point seulement, soit $P_0(\xi_0, \eta_0)$, qu'on supposera, bien entendu, distinct de S.

La vitesse est sans doute > 0 (⁶), et on peut compléter la définition de la trajectoire en associant à C, ξ_0, η_0 le quatrième paramètre k du paragraphe précédent.

Les valeurs de $\tilde{\omega}$, χ, qui correspondent à la quaterne C, ξ_0, η_0, k sont les solutions des deux équations $F = -C$ et (14), v étant défini par (5') en fonction de C, ξ_0, η_0.

La première équation $F = -C$ peut s'écrire, à cause de (4') et de (5'),

$$\tfrac{1}{4}\{(\tilde{\omega} + 2\varrho^2\eta)^2 + (\chi - 2\varrho^2\xi)^2\} = \varrho^2 v^2 ,$$

qui, combinée avec (14), donne lieu au système linéaire:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\tilde{\omega} + i\chi - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = k ,$$

$$\text{(15)} \qquad \frac{\tilde{\omega} - i\chi + 2i\varrho^2(\xi - i\eta)}{2\varrho v} = \frac{1}{k} .$$

(⁶) En effet, parmi les conditions, qui doivent être satisfaites dans le domaine D, il y a la suivante: ϱv c'est-à-dire $|\sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + \varrho^6 + 2\pi\varrho^2 V}|$ reste uniforme; v ne peut donc pas s'annuler à l'intérieur de D.

Considérons d'autre part la fonction W et supposons d'attribuer à α la valeur α_1, racine de l'équation (12), où l'on suppose bien entendu que C, ξ_0, η_0, k soient ceux qui appartiennent au point envisagé de notre A.

Les dérivées $\partial W/\partial\xi$, $\partial W/\partial\eta$ vérifient de la sorte (pour $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$) l'équation (12) et par là même (comme on l'a remarqué au § 4) aussi l'équation (12′). La comparaison de ces deux équations (12), (12′) avec le système (14), (15) donne immédiatement (pour l'état de mouvement C, ξ_0, η_0, k)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \tilde{\omega}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi .$$

Les équations (III) sont donc remplies au point P_0 de A, dès qu'on donne à α la valeur α_1. Il en est de même de (II), pourvu qu'on prend β égal à la valeur du premier membre. *c. q. f. d.*

Remarque. - Rien n'empêche de suivre une trajectoire aussi hors de D, tant que le mouvement reste régulier. On peut encore affirmer que les équations (II), (III) resteront vérifiées, en entendant par W la continuation analytique, obtenue en suivant la trajectoire, de la détermination valable dans D (et uniforme dans ce domaine). Mais cela ne nous aide pas grande chose, puisqu'il nous est inconnu comment se comporte W hors de D.

En particulier si une trajectoire rentre dans D après en être sortie, la continuation de W, correspondante à la rentrée, soit W_1, tout en étant toujours une intégrale de (9), peut fort bien différer de la détermination $\sqrt{8\nu}\,(\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha) + ...$: celle-ci était en effet caractérisée par une condition initiale, qui n'est pas invariante vis-à-vis d'une continuation analytique.

On peut ajouter que cette circonstance gênante de la non-uniformité de W n'est pas seulement à craindre, mais se présente en réalité. Voici un exemple bien simple.

Supposons que la masse μ du centre J soit nulle. P n'est alors soumis qu'à l'attraction de S, et l'on est reconduit au problème élémentaire du mouvement d'un point P, attiré suivant la loi de NEWTON par un centre S, qu'on peut considérer fixe.

Par rapport à des axes fixes le mouvement de P est képlérien et admet les deux intégrales des forces vives et des aires. Celle de JACOBI n'en est qu'une combinaison linéaire, et, h, c, C désignant respectivement les constantes des forces vives, des aires et de JACOBI, on trouve

$$C = -h + c .$$

Si h est négative, la trajectoire (absolue) de P est une ellipse; son axe a et son paramètre p sont exprimés par les formules

$$a = -\frac{1}{h}, \qquad p = c^2 .$$

Par rapport aux axes mobiles x, y, qui tournent uniformément, tout se passe comme si (les axes étant fixes) l'ellipse tournait autour du foyer S, dans le sens opposé, pendant que P la parcourt d'un mouvement képlérien.

Laissons de côté les valeurs particulières de h, pour qui le moyen mouvement serait commensurable avec la vitesse de la rotation (fictive) de l'ellipse, c'est-à-dire rationnel, puisque cette vitesse a la valeur -1.

Un petit raisonnement, bien souvent employé dans des cas analogues, permet alors de conclure que la trajectoire relative de P remplit entièrement (7) la couronne circulaire définie par les distances aphélie et périhélie de l'orbite absolue.

Il suffit donc que le domaine D (correspondant à une valeur donnée quelconque de la constante C) renferme à son intérieur quelque point d'une de ces trajectoires (provenant des orbites elliptiques) pour qu'il doive nécessairement contenir une infinité d'arcs A appartenant tous à cette même trajectoire.

Pour constater qu'il en est bien ainsi, donnons à C une valeur positive, d'ailleurs quelconque, et rappelons l'identité $C = -h + c$.

On y satisfait en prenant par exemple c très petit, et par conséquent $-h$ très voisin à C, avec la précaution que $(-2h)^{3/2}$ ne soit pas rationnel.

L'orbite absolue est alors une ellipse de moyen mouvement $(-2h)^{3/2}$ irrationnel et de paramètre $p = c^2$ très petit.

Rien n'empêche évidemment de supposer c assez petit pour que la région périhélie tombe bien à l'intérieur de D.

7. - Conséquences de la représentation holomorphe des trajectoires à l'intérieur de D. Conditions de choc et de sureté mécanique. Portée relative de ces conditions.

THÉORÉME. Si un arc A se rapproche indéfiniment de S, il y passe. D'après le paragraphe précédent l'équation (II) sera vérifiée en tout point de A pour des valeurs convenables des constantes α et β. Par hypo-

(7) Plus précisément la courbe est condensée dans la couronne, c'est-à-dire qu'il y a des points de la courbe si près que l'on veut de tout point fixé d'avance à l'intérieur (ou sur le contour) de la couronne.

thèse l'arc possède des points si près de S que l'on veut. Dans ces points la fonction

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \sqrt{8\nu}\,(-\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha) + \dots$$

prend des valeurs, qu'on peut rendre plus petites que toute quantité assignée d'avance. Mais $\partial W/\partial\alpha$ a, tout le long de A, la valeur constante β. On doit en conclure $\beta = 0$, ce qui démontre bien que A passe par S.

Si, pour un A quelconque, $\beta \gtrless 0$, la courbe ne peut pas se rapprocher indéfiniment de S. C'est une conséquence évidente du résultat obtenu tout à l'heure. Mais il y a plus.

Le minimum δ des distances des points de A à S est une fonction de C, α, β, périodique par rapport à α et s'annulant avec β. On en conclu, d'après le paragraphe précédent, que ce δ est une fonction uniforme des circonstances initiales. Soient en effet C, ξ_0, η_0, k les quatre paramètres définissant l'état initial C_0 (le point ξ_0, η_0 étant toujours supposé à l'intérieur de D).

Considérons d'autre part la fonction $\delta(C, \alpha, \beta)$. On doit y remplacer α par la racine α_1 de l'équation (12) et β par sa valeur

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\xi=\xi_0,\, \eta=\eta_0,\, \alpha=\alpha_1}.$$

δ devient ainsi une fonction uniforme de C, ξ_0, η_0, k; mais on peut encore substituer à C et à k leurs valeurs F et (14), et on aura de la sorte une fonction uniforme des paramètres canoniques ξ_0, η_0, ϖ_0, χ_0 de l'état E_0.

Occupons-nous maintenant des courbes

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0\,,$$

qui passent simplement par le point S.

Aux conditions, imposées à D au § 4, imaginons ajoutée, comme il est évidemment permis, encore la suivante:

D doit être assez petit pour que la courbe

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

n'ait à l'intérieur de D que l'unique branche régulière passant par S; et cela quelle que soit la valeur (réelle) de α.

On est alors assuré que la longueur de l'arc de la dite courbe, compris entre P_0 et S, est finie.

D'ailleurs, dans le domaine D, ϱv est toujours > 0 et diffère autant moins de $|\sqrt{2\nu}|$ qu'il s'agit de points plus près de S.

Le mouvement ne peut donc pas changer de sens sur l'arc $\widehat{P_0 S}$; de plus la vitesse croît indéfiniment lorsqu'on s'approche de S. Le temps nécessaire au mobile pour parcourir cet arc $\widehat{P_0 S}$ reste partant fini et tend même vers zéro plus rapidement que l'arc lui même.

On pourrait préciser cette remarque en ayant recours à la dernière intégrale canonique

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t + \text{const.} ;$$

mais nous n'avons pas à discuter les lois du mouvement.

Il nous suffit de rappeler que sur toute trajectoire le mouvement est possible dans les deux sens, pour pouvoir conclure de ce qui précède:

Chacun des arcs $\partial W / \partial \alpha = 0$ est à la fois trajectoire de collision et trajectoire d'éjection; $\beta = 0$ (ou, si l'on veut, $\delta = 0$) est donc la condition caractéristique d'un choc P, S.

Ainsi qu'il a été remarqué plus généralement à propos de la fonction $\delta(C, \alpha, \beta)$, on peut exprimer β en fonction uniforme des circonstances initiales, c'est-à-dire de C, ξ_0, η_0, k, ou bien encore de la quaterne canonique ξ_0, η_0, $\widetilde{\omega}_0$, χ_0. Il serait aisé de calculer autant de termes que l'on veut du développement (convergent à l'intérieur de D) de $\beta(C, \xi_0, \eta_0, k)$ en série de puissances de ξ_0, η_0.

J'omets le calcul en renvoyant à mon mémoire « Traiettorie singolari etc. » cité dans l'introduction, où j'ai explicité la condition du choc sous une forme un peu différente.

Les données étant encore C, ξ_0, η_0, k, on peut se proposer de reconnaître si le choc, caractérisé par la condition $\beta = 0$, est passé ou futur.

Voyons pour cela ce qui se passe au voisinage immédiat du point S. Toute A est une courbe régulière ayant en S une tangente bien déterminée. Si l'on a affaire à un choc passé, le rayon vecteur SP a du être dirigé, à l'instant de l'éjection, précisément comme la tangente à A dans le sens du mouvement. On a donc alors à la limite $\varphi = \vartheta$, en désignant par ϑ l'anomalie du rayon vecteur, et, comme au § 5, par φ l'inclinaison de la vitesse sur la direction positive de l'axe des abscisses.

Si l'on a affaire a un choc futur, la relation limite sera au contraire $\varphi = \vartheta + \pi$.

Ceci posé, comme les états, qu'on considère, correspondent à des positions très voisines de S, il est bien évident que, la relation $\beta = 0$ étant satisfaite, φ doit différer très peu ou bien de ϑ, ou bien de $\vartheta + \pi$. Dans le premier cas il s'agit d'une éjection, dans le second d'une collision.

Au point de vue physique l'absence de choc ne suffit pas à garantir la régularité du mouvement: pour qu'il soit légitime de le retenir conforme aux prévisions du calcul, il faut que les corps ne se rapprochent pas au délà d'un certain ε.

Lorsque le mobile est à l'intérieur de D on peut encore décider, par la connaissance de l'état de mouvement à un instant quelconque, s'il en sera ainsi ($\delta > \varepsilon$). Toutefois ni cette condition de sûreté, ni l'autre moins restrictive, qui exclut simplement le choc, embrassent toute la durée du mouvement.

Elles sont bien valables tant que le mobile reste en D; mais si le mobile y rentre après en être sorti, elles ne permettent a priori aucune prévision. Cela tient à ce que l'on rentre dans D avec une détermination inconnue W_1 de W, pouvant donner lieu à un nouveau arc $\partial W_1/\partial\alpha = \beta$.

Quoi qu'il en soit, il reste toujours un résultat positif se rapportant à la région D: Si $\delta > \varepsilon$, il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements nouveaux (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

8. - Remarque.

Tout arc de trajectoire intérieur à D satisfait effectivement aux équations

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha} = \beta$$

et (III).

Comme il a déjà été substantiellement remarqué, en éliminant α et C de $\partial W/\partial\alpha$ on obtient une fonction uniforme f de ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ.

On a donc pour tout arc A

$$f(\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi) = \beta\,.$$

La fonction f est distincte de F, puisque, en se rapportant par exemple aux variables C, ξ, η, k, on a $F = -C$, tandis que

$$f = \sqrt{8\nu}\,(-\,\xi \operatorname{sen}\alpha + \eta\cos\alpha) + \ldots$$

$$= \sqrt{8\nu}\left(-\,\xi\,\frac{k - \dfrac{1}{k}}{2i} + \eta\,\frac{k + \dfrac{1}{k}}{2}\right) + \cdot$$

n'est pas une fonction de la seule C.

Voilà une intégrale autre que $F = \text{const.}$ uniforme pour quelque système de valeurs de ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ et par suite aussi des variables cartésiennes x, y, x', y', qui en sont des fonctions algébriques.

A première vue la conclusion est choquante, puisqu'elle paraît en contradiction avec le théorème bien connu de M. POINCARÉ, qui exclut l'existence d'intégrales uniformes en déhors de $F = \text{const.}$

Il n'en est rien toutefois, et on peut s'en convaincre aisément en ayant égard aux limites de validité des deux résultats.

Celui de M. POINCARÉ établit la non-existence d'intégrales uniformes par rapport aux variables képlériennes, ce qui implique l'uniformité au voisinage de *tous* les états de mouvements x, y, x', y', qui appartiennent a une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure, d'après cette proposition, l'existence d'intégrales uniformes, pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage des états de mouvement, qui ne seraient elliptiques du tout.

Notre intégrale $f = \beta$, qui est uniforme dans le domaine D, se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

Padoue, septembre 1904.