XXII.

SUR LA RÉSOLUTION QUALITATIVE DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

Verhandl. des III Intern. Math. - Kongresses, Heidelberg, 1904.

pp. 402-408.

Je vais résumer, en causant et commentant en peu, le contenu d'un mémoire, qui paraîtra prochainement sous ce même titre dans les « Acta Mathematica » de M. MITTAG-LEFFLER (*).

* * *

Dans le problème des trois corps (points matériels S, J, P, qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière, tant que les positions des trois points sont distinctes.

D'après cela il est prèsque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisement M. PAINLEVÉ ([1]) a démontré que, à partir des conditions initiales données, des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour t convergent vers une valeur finie t_1.

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur la représentation des branches uniformes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps, les coordonnées sont exprimables, *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement*, par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet x une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout-à-l'heure, la fonction $x(t)$ reste

(*) In questo vol.: XXIII, pp. 419-439 [N.d.R.].

([1]) Voir ses *Leçons etc., professées à Stockholm* chez A. Hermann, Paris, 1897, p. 583.

régulière pour toutes les valeurs de t qu'il y a lieu de considérer: savoir, de l'instant initial t_0 jusqu'à l'infini dans le cas général, où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de t_0 à t_1 (ce dernier instant exclu), lorsque le choc intervient. Dans les deux cas, les intervalles de l'axe réel (t_0, ∞), (t_0, t_1) sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point t_0. Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données initiales, les dérivées successives de la fonction $x(t)$ au centre t_0 de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de $x(t)$ embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative, et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à remplir par les circonstances initiales pour que deux des trois corps ou tous les trois se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint ([2]), vient d'être brillamment discutée par M. BISCONCINI dans un mémoire, qui va paraître dans les « Acta Mathematica ». La seconde attend encore une réponse.

Mais, lors même qu'on en posséderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques.

En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels, et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et dégré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite ε. A cette condition seulement les conclusions mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné le mouvement se poursuivra régulièrement quel que soit t, il faudra être certain que les distances mutuelles restent supérieures à l'ε susdit.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est bien ainsi, voilà le but essentiel du côté qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint.

([2]) *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », ser. II, t. IX, 1903 [in questo vol.: XVI, pp. 279-308].

* * *

Il est à peine nécessaire de rappeler que ce cas particulier est caractérisé par les conditions suivantes:

la masse de P est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres corps S et J;

ce mouvement (qui, d'après la première hypothèse, doit correspondre à une solution du problème des deux corps) est le plus simple possible, savoir S et J tournent uniformément autour de leur centre de gravité O; le corps P se meut (initialement et par suite à tout instant) dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de S et de J.

On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: Mouvement plan d'un point P soumis à l'attraction newtonienne des deux centres (mobiles) S et J.

Pour rendre la notation aussi simple que possible il convient d'adopter:

la distance constante $\overline{SJ}$ comme unité de longueur;

la somme des masses des deux corps S et J comme unité de masse: μ étant alors la masse de J, celle de S sera $\nu = 1 - \mu$;

l'unité de temps de façon que la vitesse de la rotation de la droite SJ autour de O soit 1.

Dans ces conditions la constante de gravitation universelle a la valeur 1, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de P est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\varDelta},$$

en désignant par r la distance $\overline{PS}$, par $\varDelta$ la distance $\overline{PJ}$.

Rapportons la position de P à des axes mobiles x, y, ayant l'origine en S, et SJ pour direction positive de x.

Soient d'autre part p et q les composantes de la vitesse héliocentrique de P, c'est-à-dire de la vitesse rapportée à un système de direction invariable (ce qui n'est pas x, y), ayant l'origine en S.

On reconnaît aisément — je ne vous entretiendrai pas avec des passages tout-à-fait élémentaires — que les équations du mouvement de P peuvent être présentées sous la forme canonique suivante:

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}; \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

pourvu qu'on pose:

$$F=\frac{1}{2}\{(p+y)^2+(q-x)^2\}-\left\{\frac{\nu}{r}+\frac{1}{2}r^2+\mu\left(\frac{1}{\Delta}-x\right)\right\}.$$

Comme F ne contient pas t, le système (I) admet l'intégrale évidente (dite de JACOBI) $F=$ const., que j'écrirai

$$F=-C\,; \tag{1}$$

par cette même indépendence de t, la méthode d'intégration de JACOBI, appliquée au système (I), conduit à envisager (1) comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à une fonction inconnue W d'après les positions

$$p=\frac{\partial W}{\partial x}\,,\qquad q=\frac{\partial W}{\partial y}\,. \tag{2}$$

Ceci bien posé, rattachons-nous aux remarques précédentes, d'après lesquelles le mouvement se poursuit régulièrement tant que les distances ne tendent pas vers zéro.

Dans le cas actuel, $\overline{SJ}$ restant constante, il y a lieu de se préoccuper seulement de la circonstance que P se rapproche indéfiniment d'un de ces deux points. Il suffit d'ailleurs d'en evinsager un, S par exemple, puisque le rôle de l'autre est absolument identique et les conclusions seraient par suite les mêmes.

Je me suis pourtant proposé l'étude des trajectoires du système (c'est-à-dire des courbes décrites par le point P, rapportées aux axes x, y) dans une région suffisamment petite entourant le centre S.

Les équations (I) présentent des singularités en S, qui proviennent du terme ν/r de F (et de ce terme seulement).

Il en est de même de l'équations de HAMILTON-JACOBI

$$F=-C\,,$$

envisagée comme équation aux dérivées partielles en W. Mais elle peut être régularisée (ce qui réussit d'ailleurs même pour le système différentiel (I)). J'entends par là qu'on peut, par un changement convenable de variables indépendantes, faire disparaître la singularité.

Il suffit d'avoir recours à la transformation (conforme)

$$x+iy=(\xi+i\eta)^2 \tag{3}$$

pour que, après avoir chassé d'une part et d'autre le dénominateur

$$\varrho^2=\xi^2+\eta^2=r\,,$$

l'équation (1) prenne la forme (parfaitement régulière au point $\xi=\eta=0$)

$$(1') \qquad \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}+2\varrho^2\eta\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}-2\varrho^2\xi\right)^2\right]=\nu-C\varrho^2+\frac{1}{2}\varrho^6+\mu\varrho^2\left(\frac{1}{\Delta}-x\right).$$

Par la même transformation les formules (2) deviennent

$$(2') \qquad \begin{cases} p=\dfrac{1}{2\varrho^2}\left(\xi\dfrac{\partial W}{\partial \xi}-\eta\dfrac{\partial W}{\partial \eta}\right), \\ q=\dfrac{1}{2\varrho^2}\left(\eta\dfrac{\partial W}{\partial \xi}+\xi\dfrac{\partial W}{\partial \eta}\right). \end{cases}$$

La régularité de (1') est la clef de voûte de ce qui va suivre.

On comprend en effet qu'il n'y a désormais plus de difficulté à établir l'existence d'une, et même d'une infinité d'intégrales de (1'), *holomorphes au point S, et complètes*, c'est-à-dire contenant, outre C, une seconde constante essentielle α.

L'intégrale, que j'ai considérée, a la forme

$$W=\sqrt{8\nu}(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)+\dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieure au premier par rapport à ξ, η.

En glissant sur les détails de démonstration, j'arrive au résultat principal:

C'est que l'équation (formée d'après la méthode de JACOBI)

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha}=\beta,$$

où β désigne une nouvelle constante, est apte à représenter (sour forme évidemment holomorphe) *tous* les arcs A de trajectoires possibles au voisinage de S. D'une façon plus précise, on peut délimiter autour de S un certain domaine D (dépendant de la constante C), tel que, si P pénètre dans D, son mouvement a lieu nécessairement sur une des courbes (II).

La nature analytique de W permet de tirer, presque en corollaires, les conclusions suivantes:

Aucun des arcs A ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais; c'est-à-dire tout arc A ne passant pas exactement au point S en reste à une distance finie. La moindre distance ∂ du point S à un arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur l'arc. *Ou bien* $\partial=0$; *c'est la condition du choc. Ou bien* $\partial>0$. *On peut affirmer que, sur* *l'arc A, le mouvement se poursuit régulièrement. Si en surplus $\partial > \varepsilon$, il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.*

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ($\partial > \varepsilon$, ni même $\partial > 0$, quel que soit t). C'est une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. Phragmén. On conçoit en effet qu'on puisse bien, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de D le long d'un arc A et y rentrer le long d'un arc *différent* A', et ainsi de suite, avec des nouveaux ∂ ayant même zéro pour limite inférieure. Il arrive sans doute — et on peut le constater déjà dans les cas élémentaire, où la masse μ de J serait nulle — qu'une trajectoire pénètre successivement dans D par une série indéfinie de arcs A, qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de D comme des éléments distincts. Quant à la limite inférieure des ∂, je n'en puis rien dire. Tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoués.

Il n'en reste pas moins un résultat positif se rapportant à la région D: Si $\partial > \varepsilon$ il n'y a rien à craindre *actuellement* du voisinage de S. Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

* * *

Il m'importe de prévenir une objection.

Je vais d'abord la suggérer par les remarques suivantes:

Toutes les trajectoires d'un certain domaine D autour de S (subordonné à la valeur de C) peuvent être représentées — avons-nous dit — sous la forme

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta \,,$$

le premier membre dépendant de ξ, η, C, α.

Les composantes p, q de la vitesse du mobile au point quelconque ξ, η d'une de ces trajectoires sont données par les formules (2').

Imaginons de tirer de ces formules C et α en fonction de p, q (ξ et η), et faisons la substitution dans $\partial W/\partial\alpha$; de même exprimons-y ξ, η à l'aide de x, y.

On obtient en définitive une véritable intégrale des équations différentielles du mouvement

$$f(x, y, p, q) = \beta \,.$$

On démontre sans peine qu'une telle intégrale ne coincide point avec

$F = \text{const.}$, et est bien *uniforme* (et holomorphe) au voisinage d'un quelconque des états de mouvement (x, y, p, q) possibles à l'intérieur de D (le point S étant seulement excepté) ([3]).

Voici maintenant l'objection à laquelle je faisais allusion:

L'existence d'une intégrale uniforme, autre que $F = \text{const.}$, est en contradiction avec un résultat bien connu de M. POINCARÉ.

A la vérité la contradiction n'existe pas, et on le met au jour bien simplement en ayant égard aux limites de validité du théorème de M. POINCARÉ. On y établit la non-existence d'intégrales uniformes *par rapport aux variables képlériennes*, ce qui implique l'uniformité au voisinage de tous les états de mouvement (x, y, p, q), qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure d'après ce théorème l'existence d'intégrales uniformes pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage de quelque état non-elliptique.

Notre intégrale

$$f = \beta ,$$

qui est uniforme dans le domaine D, se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

* * *

J'ai sans doute abusé de votre bienveillante attention et je m'empresse à prendre congé en exprimant une présomption personnelle.

Je pense qu'il doit bien réussir (et par des moyens simples, comme on vient d'en avoir exemple) de *régulariser* l'équation de HAMILTON-JACOBI, même pour le problème général des trois corps.

On y puisera peut-être une confiance bienfaisante pour des nouvels efforts tendant à perfectionner de plus en plus les méthodes d'approximation quantitative.

([3]) On veut dire par là que, pour un quelconque de ces états, soit (x_0, y_0, p_0, q_0), il existe un domaine non nul (de l'espace analytique x, y, p, q autour des valeurs x_0, y_0, p_0, q_0) tel que, lorsqu'on se donne dans ce domaine trois des quantités x, y, p, q, la quatrième reste déterminée sans ambiguité par la relation $f = \beta$.