XVI.

TRAIETTORIE SINGOLARI ED URTI NEL PROBLEMA RISTRETTO DEI TRE CORPI (1)

« Ann. di Mat. », s. 3ª, t. IX (1903),
pp. 1-32.

Nel problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di NEWTON) le forze, e per conseguenza le equazioni differenziali del moto, hanno comportamento analitico regolare finchè le posizioni dei tre punti sono distinte. Di qui si intuisce che unica causa di regolarità pel movimento può essere il fatto che due dei tre corpi (o tutti tre) tendono a coincidere.

Più precisamente il sig. PAINLEVÉ ha dimostrato (2) che, a partire da un istante t_0 (e da condizioni iniziali qualisivogliono), possono sorgere, e sorgono effettivamente, singolarità, solo quando una almeno delle mutue distanze tende a zero al convergere di t verso un valore (finito) t_1.

In forma più espressiva si può dire evidentemente: Il moto prosegue regolare a meno che non intervengono urti entro un tempo finito.

Quali sono le condizioni iniziali singolari, a partire dalle quali si va incontro ad un urto? Ecco la questione, che sarà qui risoluta per il problema ristretto. Si tratta, come è ben noto, del moto piano di una massa infinitesima P, attratta da due masse finite S, J uniformemente ruotanti.

Considerando, per fissar le idee, gli urti P, S (lo stesso naturalmente si applica agli urti P, J) *riconosceremo che una sola relazione uniforme* $u = 0$ *è caratteristica dell'urto e la costruiremo effettivamente.*

In un intorno conveniente di S il primo membro u della relazione invariante predetta si presenta con duplice determinazione, di cui una corrisponde agli urti passati (eiezioni), l'altra agli urti futuri (collisioni).

---

(1) I risultati della presente ricerca — meno quello dell'ultimo paragrafo — sonc stati esposti in due Note dei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris » (12 e 26 gennaio 1903), [in questo vol.: XIV, XV pp. 271-277].

(2) *Leçons etc., professées à Stockholm*, presso A. Hermann, Paris, 1897, pag. 583.

Quanto alla condizione generica di un urto (P, S; o P, J; passato o futuro) essa si ottiene evidentemente eguagliando a zero un prodotto di due fattori: u e l'analogo u', relativo agli urti P, J.

Per natura loro, le relazioni $u = 0$, $u' = 0$, $uu' = 0$ (le quali esprimono che è avvenuto o avverrà un certo urto) sono invarianti, cioè a dire, se sono soddisfatte inizialmente, seguitano ad esserlo; se non lo sono in un istante generico, non lo saranno (nè lo furono) mai. In particolare la disuguaglianza

$$uu' \gtrless 0$$

assicura la indefinita, regolare prosecuzione del movimento.

Il risultato è esauriente dal punto di vista matematico, ma non si presta ancora ad applicazioni concrete. Infatti i corpi celesti si possono legittimamente assimilare a punti materiali soltanto a patto che le loro dimensioni sieno trascurabili rispetto alle distanze, a patto cioè (per date dimensioni e dato grado di approssimazione) che queste distanze non discendano al disotto di un certo limite ε. Bisogna dunque non oltrepassare questo limite perchè le conclusioni matematiche sieno accettabili. E in ispecie, per poter affermare che non c'è pericolo di urti a partire da un dato stato di moto, bisognerebbe saper riconoscere (per la soluzione teorica corrispondente) non soltanto che le mutue distanze non convergono a zero (ciò, che — almeno per il problema ristretto — siamo ormai in grado di fare) ma ancora che esse restano superiori ad un ε assegnato.

Non è chi non veda la capitale importanza della questione; ma altro è porla, altro risolverla, sia pure per il solo problema ristretto. Nulla posso ancor dirne e chiudo quindi la digressione.

Rientrando nel tema del presente scritto, farò notare che esso può anche, e più generalmente, risguardarsi come uno studio delle traiettorie singolari: intendo quelle traiettorie, che escono da uno dei due centri di attrazione — fissiamo S — o vi terminano (traiettorie di eiezione o traiettorie di collisione).

Io ho appunto cominciato (dopo le indispensabili generalità dei §§ 1-2) collo stabilire alcuni caratteri analitici di queste traiettorie singolari. Ne ho tratta la condizione dell'urto, e da essa, ritornando alle traiettorie, una applicazione di indole qualitativa.

Ecco di che si tratta.

Quando la massa del secondo centro J è nulla (problema dei due corpi) le traiettorie singolari sono rette ed è ben noto che, su queste traiettorie, il mobile si allontana indefinitamente o ritorna in S, secondo il valore ($\gtrless 0$) della costante delle forze vive.

Il comportamento deve essere analogo (salvo le complicazioni provenienti dalla presenza del punto singolare J) anche quando la massa μ di J non è più nulla.

In modo rigoroso ho potuto però dimostrare soltanto il teorema seguente:

Per valori della costante C di JACOBI maggiori dell'unità e per μ abbastanza piccolo, le traiettorie singolari, che escono da S, si rinchiudono tutte in S, dopo un percorso finito.

1. - Equazione del moto. Forma canonica polare.

Uno dei tre corpi, P, ha massa trascurabile e non influisce quindi sul moto degli altri due S, J. Questo moto è il più semplice compatibile colla legge di NEWTON: S, J ruotano cioè uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O.

Il moto di P avviene nel piano, che contiene le due orbite circolari di S e di J.

Tutto si riduce così ad un problema con due gradi di libertà: moto piano di un punto P, sollecitato dall'attrazione newtoniana dei due centri variabili S, J.

Sieno $\nu = 1 - \mu$, μ le masse di S e di J, con che si suppone scelta per unità di massa la somma delle masse dei due corpi.

Convengasi ancora di assumere la distanza costante $\overline{SJ}$ per unità di lunghezza e l'unità di tempo in modo che la velocità angolare della retta SJ riesca eguale ad 1.

Con queste unità anche la costante di attrazione universale (costante di GAUSS) risulta eguale ad 1, e il potenziale (unitario) U delle forze agenti su P è

$$\frac{\nu}{\overline{SP}} + \frac{\mu}{\overline{JP}} .$$

Posto

$$\overline{SP} = r , \qquad \overline{JP} = \Delta , \qquad \widehat{JSP} = \vartheta$$

(ove ϑ si intenderà contato nel senso della rotazione), avremo ovviamente

$$\Delta = \left|\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\vartheta}\right| , \tag{1}$$

$$U = \frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} . \tag{2}$$

Rispetto ad un sistema d'assi uniformemente ruotanti ξ, η coll'origine in O e la direzione positiva dell'asse ξ verso J, le coordinate di S sono $-\mu$, 0; quelle di J: ν, 0.

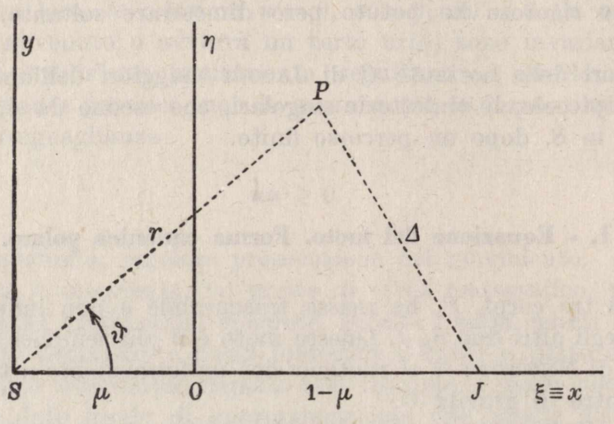

Fig. 1.

Suppongasi il verso $\xi\eta$ coincidente con quello della rotazione. Avremo allora dal teorema di CORIOLIS come componenti della accelerazione assoluta (di un generico punto P di coordinate ξ, η)

$$\xi'' - 2\eta' - \xi\,,$$
$$\eta'' + 2\xi' - \eta\,.$$

Le equazioni del moto risultano dall'eguagliare la accelerazione alla forza unitaria: saranno dunque nel caso presente:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' - \xi = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}\,, \\[2ex] \xi'' + 2\xi' - \eta = \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\,. \end{cases}$$

Riferiamole ad un sistema di assi x, y paralleli a ξ, η, coll'origine nel punto S $(-\mu,\ 0)$; poniamo cioè

$$\xi = x - \mu\,, \qquad \eta = y\,.$$

Esse divengono

$$\begin{cases} x'' - 2y' - x = \dfrac{\partial U}{\partial x} - \mu = \dfrac{\partial}{\partial x}\,(U - \mu x)\,, \\[2ex] y'' + 2x' - y = \dfrac{\partial U}{\partial y} \qquad = \dfrac{\partial}{\partial y}\,(U - \mu x)\,. \end{cases}$$

Per definizione r e ϑ non sono che coordinate polari, corrispondenti alle cartesiane x, y. Si ha quindi

$$x = r \cos \vartheta \,, \qquad y = r \operatorname{sen} \vartheta \,,$$

da cui, derivando,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \vartheta = \frac{x}{r} \,, \qquad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = - r \operatorname{sen} \vartheta = - y \,,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen} \vartheta = \frac{y}{r} \,, \qquad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta = x \,.$$

Moltiplichiamo le superiori equazioni ordinatamente per x/r, y/r; $-y$, x, e sommiamo. Verrà

$$\begin{cases} \dfrac{x''x + y''y}{r} - \dfrac{2}{r}(xy' - yx') - r = \dfrac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos \vartheta) \,, \\[2ex] xy'' - yx'' + 2(xx' + yy') = \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r \cos \vartheta) \,. \end{cases}$$

Ora

$$xy' - yx' = r^2 \vartheta' \,, \qquad xx' + yy' = rr' \,,$$

e inoltre

$$\frac{x''x + y''y}{r} = r'' - r\vartheta'^2 \,, \qquad xy'' - yx'' = \frac{d}{dt}(r^2 \vartheta') \,.$$

Abbiamo così le equazioni del moto in coordinate polari:

$$r'' - r\vartheta'^2 - 2r\vartheta' - r = \frac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos \vartheta),$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \vartheta') + 2rr' = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r \cos \vartheta) \,.$$

È facile attribuir loro forma canonica. Pongasi infatti

(3) $$r' = R \,, \qquad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1 \,,$$

con che

$$\Theta = r^2(\vartheta' + 1),$$

e le nostre equazioni diverranno

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos\vartheta) + \dfrac{\Theta^2}{r_3} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left\{ U - \mu r \cos\vartheta - \dfrac{1}{2} r^2 \left(\dfrac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{2} r^2 \right\}, \\ \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}(U - \mu r \cos\vartheta) \qquad\quad = \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ U - \mu r \cos\vartheta - \dfrac{1}{2} r^2 \left(\dfrac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{2} r^2 \right\}. \end{cases}$$

Complessivamente le (3) e (4) si possono scrivere

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial R}, & \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \Theta}; \\ \dfrac{dR}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial r}, & \dfrac{d\Theta}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

dove F sta per

$$\frac{1}{2}\left\{ R^2 + r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 \right\} - U + \mu r \cos\vartheta - \frac{1}{2} r^2 .$$

Se si sostituisce ad U il suo valore (2) e si raccolgono invece i due termini in μ col porre

$$(5)\qquad V = \frac{1}{\varDelta} - r \cos\vartheta,$$

la espressione di F assume l'aspetto

$$(6)\qquad F = \frac{1}{2}\left\{ R^2 + r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 \right\} - \frac{\nu}{r} - \mu V - \frac{1}{2} r^2 .$$

Il significato cinematico delle variabili coniugate R, Θ risulta dalle (3), o, se si vuole, dalle stesse equazioni canoniche: $R = r'$ non è che la derivata del raggio vettore, $\Theta = r^2(\vartheta' + 1)$ il doppio della velocità areolare (assoluta). Infatti ϑ' è la velocità angolare di P, relativa all'asse SJ; questo ruota con velocità angolare costante $= 1$; $\vartheta' + 1$ è dunque la velocità angolare assoluta e, per conseguenza, $\frac{1}{2}r^2(\vartheta' + 1)$ la velocità areolare, pure assoluta.

2. - Integrale di Jacobi.

Conseguenze, che esso permette di ricavare dall'ipotesi $\lim\limits_{t=t_1} r = 0$.

Le (I) ammettono l'integrale

$$F = -C,$$

dove, secondo la consuetudine, la costante del secondo membro è designata con $-C$ (C costante di JACOBI).

Ponendo per brevità

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma = r^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{\Theta}{r^2}-1\right), \\ \mathfrak{P} = -2C + 2\mu V + r^2, \end{cases}$$

la equazione $F = -C$ può essere scritta

$$(8)\qquad \sigma^2 + rR^2 = 2\nu + r\mathfrak{P}.$$

$\mathfrak{P}$ è una funzione, che resta finita per $r = 0$. Si ha infatti dalla (4), $V = 1$, per $r = 0$, donde $\mathfrak{P} = -2(C-\mu)$.

La (8) mostra quindi che, per r abbastanza piccolo, la somma $\sigma^2 + rR^2$ non può differir molto da 2ν. Ne segue in particolare, considerando r, R, Θ, e quindi anche r, R, σ come funzioni di t definite dalle (I):

a) *Se anche, al convergere di t verso un valore t_1, r tende a zero, σ e $\sqrt{r}R$ restano finite.*

Dico di più che:

b) *Per t abbastanza vicino a t_1, $R = dr/dt$ si mantiene costantemente diversa da zero; r converge quindi a zero, decrescendo.*

In primo luogo, si ha dalla (6)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r\left(\frac{\Theta}{r^2}-1\right)^2 - \frac{2}{r}\left(\frac{\Theta}{r^2}-1\right)\Theta + \frac{\nu}{r^2} - \mu\frac{\partial V}{\partial r} - r,$$

ossia, per le (7) ed (8)

$$-\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\{\nu - rR^2 + r\mathfrak{Q}\},$$

dove

$$\mathfrak{Q} = 2\sqrt{r}\,\sigma + \mu r\frac{\partial V}{\partial r} + r^2 + \mathfrak{P}$$

resta finita, quando r converge a zero.

Scriviamo le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R} = R$$

sotto la forma:

$$r\frac{dR}{dt} = \frac{1}{r}\{\nu - rR^2 + r\Omega\},$$

$$R\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}rR^2$$

e sommiamole. Si ottiene

$$\frac{d(rR)}{dt} = \frac{\nu}{r} + \Omega.$$

Per r abbastanza piccolo, il primo termine del secondo membro prepondera su Ω. Supposto dunque $\lim_{t=t_1} r = 0$, $d(rR)/dt$ conserva il medesimo segno (positivo) per t abbastanza vicino a t_1. La funzione rR varia così, da un certo punto in poi, nel medesimo senso, mentre t converge a t_1, e può perciò attraversare una volta al più il valore zero.

Seguitando t ad avvicinarsi a t_1, il prodotto rR non si annulla più. Non si possono quindi annullare nè r, nè $R = dr/dt$. *c.d.d.*

Conviene dimostrare ancora un terzo lemma, cioè:

c) *Per t abbastanza vicino a t_1, il limite inferiore dei valori di rR^2 non è nullo.*

Moltiplicando le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad 2rR = 2r\frac{dr}{dt},$$

e aggiungendo $R^2(dr/dt)$ a entrambi i membri del prodotto, si trae:

$$\frac{d(rR^2)}{dt} = \frac{2}{r}\left\{\nu - \frac{1}{2}rR^2 + r\Omega\right\}\frac{dr}{dt}.$$

Proviamoci a supporre che il limite inferiore dei valori (essenzialmente $\geqslant 0$) assunti da rR^2 sia zero. Esisterebbero dei valori $\bar{t}$ di t, vicini a t_1, quanto si vuole, in cui rR^2 sarebbe prossimo a zero, pure quanto si vuole, in particolare per es. $< \frac{1}{2}\nu$. Prendiamo t abbastanza vicino a t_1 (e quindi r a zero) perchè inoltre il valore assoluto di $r\Omega$ non superi $\nu/4$.

Avremo

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\mathfrak{Q} > \frac{1}{2} \nu ,$$

e il secondo membro della precedente equazione avrà il segno di dr/dt. Perciò, nel punto $\bar{t}$, la funzione rR^2 sarà, al pari di r, decrescente (nel senso $\bar{t}$, t_1).

Ora, diminuendo rR^2, la disuguaglianza

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\mathfrak{Q} > \frac{1}{2} \nu$$

resta a fortiori soddisfatta. rR^2 seguita dunque a decrescere quando t si avvicina indefinitamente a t_1.

Così l'ipotesi che il limite inferiore sia zero, implicherebbe addirittura

$$\lim_{t=t_1} rR^2 = 0 .$$

Ma questo è assurdo.

Infatti, dr essendo negativo e, ripetiamolo,

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\mathfrak{Q} > \frac{1}{2} \nu ,$$

l'equazione

$$\frac{d(rR^2)}{dt} = \frac{2}{r} \left\{ \nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\mathfrak{Q} \right\} \frac{dr}{dt}$$

dà luogo alla disuguaglianza

$$- d(rR^2) > - \nu \, d \log r ,$$

che, integrata fra $\bar{t}$ e t, ove si designino con $\bar{r}$, $\bar{R}$ i valori delle funzioni r, R, relativi al valore $\bar{t}$ di t, porge

$$\bar{r}\bar{R}^2 - rR^2 > \nu \log \frac{\bar{r}}{r} .$$

L'impossibilità è manifesta, poichè, al convergere di t verso t_1, il primo membro resta finito, mentre il secondo cresce indefinitamente.

3. - Generalità sulle traiettorie singolari Σ, lungo le quali interviene un urto P, S.

Per il teorema di PAINLEVÉ, ricordato nell'introduzione, il movimento, nel problema dei tre corpi, prosegue regolare, a meno che una delle tre distanze non tenda a zero, al convergere di t verso un valore finito t_1.

Nel caso nostro, essendo costante la distanza $\overline{SJ}$, due soltanto sono le ipotesi possibili (ed escludentisi a vicenda): P tende ad S; ovvero P tende a J. Potremo limitarci a contemplarne una e supporre per es.

$$\lim_{t=t_1} r = 0 \,. \tag{9}$$

Nulla infatti distingue fra di loro i due corpi S, J nell'enunciato del problema ristretto; la notazione soltanto è asimmetrica, essendo appunto conveniente, per discutere gli urti P, S, assumere S come origine delle coordinate. Per quegli altri, basterebbe attribuire alle lettere il significato, che risulta dallo scambio di S con J.

Ciò posto, sia Σ una generica delle traiettorie singolari, su cui interviene un urto P, S, su cui cioè si verifica la (9). Per il lemma b) del precedente paragrafo, da un certo t in poi, dr/dt si conserva diversa da zero: d'altra parte nell'intervallo $\bar{t}$, t_1, quest'ultimo valore al più escluso, r, e così le altre variabili R, ϑ, Θ, sono funzioni regolari di t. Se ne deduce che t, e per conseguenza R, ϑ, Θ, possono essere considerate funzioni di r, regolari per r abbastanza piccolo (e > 0). Le equazioni differenziali, che le definiscono, sono, in virtù delle (I),

$$\text{(I')} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial R}}, \qquad & \frac{dR}{dr} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial r}}{\dfrac{\partial F}{\partial R}}; \\ \frac{d\vartheta}{dr} &= \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \Theta}}{\dfrac{\partial F}{\partial R}}, \qquad & \frac{d\Theta}{dr} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta}}{\dfrac{\partial F}{\partial R}}. \end{aligned} \right.$$

Prescindendo dalla prima, rimane eliminato t; ma si può prescindere anche dalla seconda, sostituendole la relazione in termini finiti $F = -C$, che è atta a fornire R in funzione di r, ϑ, Θ e porge precisamente

$$R = \sqrt{\frac{2\nu}{r} - 2C + 2\mu V - r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + r^2} \,. \tag{10}$$

Ritenuta per R questa espressione, le due rimanenti equazioni divengono

$$
\text{(II)} \qquad \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}, \qquad \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}.
$$

Tale è il sistema ridotto, cui debbono soddisfare le funzioni $\vartheta(r)$, $\Theta(r)$ corrispondenti a una generica Σ.

Si avverta che anche per un'altra traiettoria qualsiasi (su cui soltanto non sia dr/dt identicamente nulla e quindi r costante ([3])) sono verificate le (II). Quel che di più si può asserire per le Σ e che, come vedremo, basta a caratterizzarle è la circostanza seguente: *ϑ e Θ sono soluzioni del sistema* (II) *regolari nell'intorno del valore* $r = 0$ (questo valore al più escluso).

4. - Trasformazione delle equazioni, che definiscono le traiettorie. Comportamento del sistema trasformato nel punto $\varrho = 0$.

Poniamo

$$
(11) \qquad \varrho = |\sqrt{r}\,|, \qquad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1 = \frac{\Theta}{\varrho^4} - 1\,; \qquad H = -\varrho R,
$$

con che la espressione esplicita di H in variabili ϱ, ϑ, ϑ' è, a norma della (10) e mettendo in evidenza il doppio segno del radicale,

$$
(12) \qquad H = -\varrho R = \pm\sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + 2\mu\varrho^2 V - \varrho^6\vartheta'^2 + \varrho^6}\,.
$$

Si noti poi, confrontando colle (3), che la nuova variabile ϑ' non è che $d\vartheta/dt$ (velocità angolare relativa).

Avremo ovviamente

$$
dr = 2\varrho\, d\varrho\,, \qquad \partial\Theta = \varrho^4\, \partial\vartheta'\,,
$$

e perciò il sistema (II) assume intanto l'aspetto

$$
\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{2}{\varrho^4}\frac{\partial H}{\partial \vartheta'}\,, \qquad \frac{d\Theta}{d\varrho} = -2\,\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\,.
$$

([3]) Si riconosce facilmente che, in questo caso, deve rimanere costante anche ϑ, talchè P serba la posizione invariata rispetto agli altri due corpi S, J. Si tratta dunque delle soluzioni particolari di Laplace (relative al problema ristretto).

Essendo poi

$$\frac{d\vartheta'}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho^4}\frac{d\Theta}{d\varrho} - \frac{4}{\varrho^5}\Theta = \frac{1}{\varrho^4}\frac{d\Theta}{d\varrho} - \frac{4}{\varrho}(\vartheta' + 1),$$

il sistema trasformato in ϱ, ϑ, ϑ' così si presenta:

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{2}{\varrho^4}\frac{\partial H}{\partial\vartheta'} = -2\varrho^2\frac{\vartheta'}{H},$$

$$\varrho\frac{d\vartheta'}{d\varrho} = -4(\vartheta'+1) - \frac{2}{\varrho^3}\frac{\partial H}{\partial\vartheta} = -4(\vartheta'+1) - \frac{2\mu}{\varrho H}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

Teniamo conto del valore (5) di V, cioè

$$V = \frac{1}{\Delta} - r\cos\vartheta,$$

e notiamo che, derivando e scrivendo ϱ^2 per r, risulta

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = \varrho^2 \operatorname{sen}\vartheta\left(1 - \frac{1}{\Delta_3}\right).$$

Posto quindi per brevità

$$W = \operatorname{sen}\vartheta\left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right), \tag{13}$$

avremo in definitiva

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\vartheta}{d\varrho} = -2\varrho^2\dfrac{\vartheta'}{H}, \\[2ex] \varrho\dfrac{d\vartheta'}{d\varrho} = -4(\vartheta'+1) - 2\mu\varrho\dfrac{W}{H}. \end{cases}$$

Badando alle espressioni analitiche (12), (13) di H e di W, si constata immediatamente che, per valori finiti qualsivogliono di ϑ e di ϑ' e per ϱ abbastanza piccolo, i secondi membri delle (Σ) sono funzioni regolari. La singolarità del sistema, relativa al valor zero della variabile indipendente ϱ, proviene così esclusivamente dal fattore ϱ, che compare nel primo membro della seconda equazione.

Esistenza di integrali olomorfi. - Se $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ è una soluzione olomorfa delle (Σ), $\vartheta'(\varrho)$ deve necessariamente ridursi a -1 per $\varrho = 0$. Basta, per accertarsene, porre $\varrho = 0$ nella seconda delle (Σ).

Osservato questo, affermo che:

TEOR. I. - *Il sistema* (Σ) *ammette* ∞^1 *integrali olomorfi* $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$, *riducentisi, per* $\varrho = 0$, ϑ *a un valore arbitrario* ϑ_0, ϑ' *a* -1.

La dimostrazione si fa agevolmente, ricorrendo al calcolo dei limiti di CAUCHY.

In primo luogo $-2\varrho^2\vartheta'/H$, $-2\mu W/H$ possono ritenersi funzioni dei tre argomenti ϱ, $\vartheta - \vartheta_0$, $\vartheta' + 1$, regolari nell'intorno del valore zero di ciascuno di essi. Sotto questo aspetto, esse vengono inoltre a dipendere dalla costante ϑ_0 e si presentano — importa notarlo — come funzioni periodiche di detta ϑ_0.

Dopo ciò si esaurisce in un momento la parte formale della dimostrazione, verificando che il sistema (Σ) è effettivamente atto a fornire, mediante successive derivazioni, i valori, per $\varrho = 0$, delle derivate delle funzioni $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$, supposte olomorfe. Con questi valori, che riescono evidentemente periodici, rispetto a ϑ_0, si possono costruire le serie di TAYLOR, definienti gli integrali $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$.

Resta da provarne la convergenza.

Pongasi

$$|\vartheta - \vartheta_0| = \tau_1\,, \qquad |\vartheta' + 1| = \tau_2$$

e si indichino con $\mathfrak{M}_1(\varrho, \tau_1, \tau_2)$, $\mathfrak{M}_2(\varrho, \tau_1, \tau_2)$ due funzioni *maggioranti* di $-2\vartheta'/H$, $-2\mu W/H$ rispettivamente.

Basta confrontare il sistema (Σ), scritto per maggior chiarezza sotto la forma

$$(\Sigma') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(\vartheta - \vartheta_0)}{d\varrho} = -\,2\varrho^2\frac{\vartheta'}{H}\,, \\ &\varrho\,\frac{d(\vartheta' + 1)}{d\varrho} + 4(\vartheta' + 1) = -\,2\mu\varrho\,\frac{W}{H}\,, \end{aligned} \right.$$

con

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\tau_1}{d\varrho} = \varrho^2\mathfrak{M}_1\,, \\ &\varrho\,\frac{d\tau_2}{d\varrho} + 4\tau_2 = \varrho\mathfrak{M}_2\,, \end{aligned} \right.$$

per riconoscere che quest'ultimo è un *sistema maggiorante*.

Tutto si riduce così a far vedere che il sistema (14) ammette una soluzione $\tau_1(\varrho)$, $\tau_2(\varrho)$, olomorfa e annullantesi per $\varrho = 0$.

Si considerino a tale scopo i valori delle derivate di τ_1, τ_2, per $\varrho = 0$.

Essi vengono successivamente determinati dalle equazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^n\tau_1}{d\varrho^n} = \dfrac{d^n(\varrho^2\mathfrak{M}_1)}{d\varrho^n}, \\ (n+4)\dfrac{d^n\tau_2}{d\varrho^n} = n\dfrac{d^n\mathfrak{M}_2}{d\varrho^n} \end{cases} \qquad (n=1,2,\dots),$$

che si ricavano derivando le (14) — la prima $n-1$ volte, la seconda n — e facendo poi $\varrho = 0$.

Maggioranti delle (15) sono evidentemente le equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{d^n\tau_1}{d\varrho^n} = \dfrac{d^n(\varrho^2\mathfrak{M}_1)}{d\varrho^n}, \\ \dfrac{d^n\tau_2}{d\varrho^n} = \dfrac{d^n\mathfrak{M}_2}{d\varrho^n}. \end{cases}$$

Ma queste corrispondono al sistema

$$\frac{d\tau_1}{d\varrho} = \varrho^2\mathfrak{M}_1, \qquad \frac{d\tau_2}{d\varrho} = \mathfrak{M}_2,$$

il quale si comporta regolarmente per $\varrho = 0$ e rientra quindi nel teorema generale di esistenza, conosciuto sotto il nome di teorema di Briot e Bouquet.

Non esistenza di altri integrali. - Le espressioni degli ∞^1 integrali olomorfi di (Σ) sono evidentemente della forma

$$(16)\qquad \begin{cases} \vartheta - \vartheta_0 = \varrho\alpha(\varrho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 = \varrho\beta(\varrho, \vartheta_0), \end{cases}$$

dove α e β designano funzioni di ϱ e di ϑ_0, periodiche rispetto a ϑ_0 e regolari per ϱ abbastanza piccolo.

Effettuiamo un cambiamento di variabili, nel sistema differenziale (Σ), sostituendo alle funzioni incognite ϑ e ϑ' due nuove funzioni ϑ_0, u, legate a ϑ, ϑ' dalle formule

$$(17)\qquad \begin{cases} \vartheta - \vartheta_0 = \varrho\alpha(\varrho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 = \varrho\beta(\varrho, \vartheta_0) + u. \end{cases}$$

Queste definiscono un'effettiva trasformazione fra le due coppie ϑ, ϑ'; ϑ_0, u, regolare nell'intorno di $\varrho = 0$, poichè il determinante funzionale $\begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta' \\ \vartheta_0 & u \end{pmatrix}$ si riduce all'unità per $\varrho = 0$.

La risoluzione, rispetto a ϑ_0, della prima equazione ci dà

$$\vartheta_0 = \vartheta + \varrho\bar{\alpha}(\varrho, \vartheta)\,, \tag{18}$$

con $\bar{\alpha}$ funzione regolare per ϱ abbastanza piccolo e periodica rispetto a ϑ. Quest'ultima asserzione richiede una parola di commento:

Dal confronto della (18) colla prima delle (17) si ricava

$$\bar{\alpha}(\varrho, \vartheta) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0)\,,$$

l'eguaglianza cambiandosi in identità se nei due membri si immagina tutto espresso per ϱ, ϑ, ovvero per ϱ, ϑ_0. Ciò posto, si osservi che, quando ϑ_0 si incrementa di 2π, anche $\vartheta_0 + \varrho\alpha$, cioè ϑ, subisce un eguale incremento, α essendo funzione periodica.

Ne viene

$$\bar{\alpha}(\varrho, \vartheta) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0 + 2\pi) = \bar{\alpha}(\varrho, \vartheta + 2\pi)\,,$$

che mette appunto in evidenza la periodicità di $\bar{\alpha}$.

Portando nella seconda delle (17) il valore (18) di ϑ_0 e chiamando $f(\varrho, \vartheta)$ la espressione, che ne risulta per β, si ottiene

$$u = \vartheta' + 1 - \varrho f(\varrho, \vartheta)\,, \tag{19}$$

dove f si comporta evidentemente come α, è cioè funzione regolare di ϱ, per ϱ abbastanza piccolo, e periodica rispetto a ϑ.

Il sistema trasformato in ϑ_0, u si costruisce, derivando le (18), (19), il che dà

$$\frac{d\vartheta_0}{d\varrho} = \frac{d\vartheta}{d\varrho} + \frac{\partial(\varrho\,\bar{\alpha})}{\partial\varrho} + \varrho\,\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\varrho}\,,$$

$$\frac{du}{d\varrho} = \frac{d\vartheta'}{d\varrho} - \frac{\partial(\varrho f)}{\partial\varrho} - \varrho\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\varrho}\,,$$

sostituendo per $d\vartheta/d\varrho$, $d\vartheta'/d\varrho$ i loro valori, forniti dalle (Σ) e immaginando poi espressi ϑ, ϑ' per ϑ_0, u_0, a norma delle (17). Si vede subito che il risultato è del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta_0}{d\varrho} = \bar{a}\,, \\[2ex] \varrho\,\dfrac{du}{d\varrho} = -4u + \varrho\bar{b}\,, \end{cases}$$

con $\bar{a}$ e $\bar{b}$ funzioni periodiche di ϑ_0, regolari per qualsiasi valore finito di u e per ϱ abbastanza piccolo.

In virtù delle (16) e (17), queste equazioni devono ammettere gli ∞^1 integrali particolari

$$\vartheta_0 = \text{cost.}\,, \qquad u = 0\,,$$

e ciò esige che i secondi membri si annullino (per qualsiasi valore di ϱ e di ϑ_0), quando vi si fa $u = 0$.

Il sistema trasformato in ϑ_0, u può quindi essere scritto

$$(\Sigma'') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\vartheta_0}{d\varrho} = au\,, \\[2ex] \varrho\,\dfrac{du}{d\varrho} = (-4 + \varrho b)u\,, \end{cases}$$

a e b designando ancora funzioni di ϱ, u, ϑ_0, regolari per qualunque valore finito di u, purchè ϱ sia abbastanza piccolo, e periodiche rispetto a ϑ_0.

È ora assai facile, imitando un ragionamento di Briot e Bouquet ([4]), dimostrare il

Teor. II. - *Oltre alle soluzioni olomorfe, il sistema* (Σ) *non ne ammette alcun'altra* (reale), *tale che, per* ϱ *convergente a zero* (lungo l'asse reale, naturalmente), *si abbia*

$$(20) \qquad \lim_{\varrho=0} \vartheta'(\varrho) = -1\,.$$

Sia $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ una soluzione (reale), regolare per $\varrho > 0$ e abbastanza piccolo. Quanto al comportamento per ϱ convergente a zero, si faccia soltanto l'ipotesi (20).

Mediante le (18), (19), la $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ dà luogo ad una soluzione $\vartheta_0(\varrho)$, $u(\varrho)$ delle (Σ''), regolare per $\varrho > 0$ e tale che

$$(20') \qquad \lim_{\varrho=0} u(\varrho) = 0\,.$$

Gli integrali olomorfi delle (Σ) corrispondono, come già abbiamo notato, alle ∞^1 soluzioni delle (Σ''), per cui la funzione $u(\varrho)$ si annulla identicamente (e $\vartheta_0 = \text{cost}$).

Ad escludere la esistenza di altri integrali (reali) delle (Σ), soddisfacenti alla (20), basterà constatare che le (Σ'') non possono ammettere alcuna soluzione (reale), per cui $u(\varrho)$ verifichi la (20′) senza essere identicamente nulla.

Sia, se possibile, $u(\varrho)$, $\vartheta_0(\varrho)$ una tale soluzione: ϱ_0 un valore di ϱ, in cui $u(\varrho_0) = u_0$ non si annulla.

([4]) Cfr. per es. Picard, *Traité d'analyse*, tom. III, pag. 27.

u non cresce indefinitamente, anzi converge a zero con ϱ. Si può dunque scegliere ϱ_0 abbastanza piccolo, perchè, per tutti i valori ϱ, $u(\varrho)$, $\vartheta_0(\varrho)$, relativi all'intervallo $(\varrho_0, 0)$, estremi inclusi [5], la funzione

$$b(\varrho, u(\varrho), \vartheta_0(\varrho))$$

resti finita e quindi (data la sua regolarità per $\varrho > 0$) integrabile.

Ciò posto, indichiamo con v la funzione

$$\log(\varrho^4 u),$$

con v_0 il valore finito $\log(\varrho_0^4 u_0)$, che essa assume per $\varrho = \varrho_0$.

Sarà, in virtù della (20′),

$$\lim_{\varrho=0} v = -\infty .$$

D'altra parte la seconda delle (Σ''), dividendone entrambi i membri per $\varrho\mu$, diviene

$$\frac{d\log u}{d\varrho} = -\frac{4}{\varrho} + b ,$$

ossia

$$\frac{dv}{d\varrho} = b .$$

Integrando fra ϱ_0 e ϱ si ha

$$v = v_0 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} b\, d\varrho ,$$

e questa eguaglianza è assurda, poichè, al convergere di ϱ a zero, il primo membro ha per limite $-\infty$, mentre il secondo resta finito. *c.d.d.*

5. - Determinazione delle Σ. Traiettorie di collisione e traiettorie di eiezione. Relazione di simmetria.

Abbiamo visto a § 3 che, sopra una generica Σ, le variabili ϑ e Θ sono funzioni di r, regolari per r abbastanza piccolo (e > 0): abbiamo

(5) È vero che non si sa niente del comportamento di $\vartheta_0(\varrho)$ al convergere di ϱ a zero, ma come s'è avvertito, b è funzione periodica dell'argomento ϑ_0 e questo varia nel campo reale. La legittimità della conclusione è così manifesta.

visto inoltre (lemmi a) e c) del § 2) che la funzione

$$\sigma = r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)$$

resta finita e che il limite inferiore del prodotto rR^2 rimane superiore a zero, anche quando r decresce indefinitamente.

Avendo riguardo alle (11), (12), se ne ricava:

1) Una generica Σ corrisponde a soluzioni $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ del sistema (Σ), regolari per ϱ abbastanza piccolo ($e > 0$).

2) Al convergere di ϱ verso zero, la funzione $\sigma = \varrho^3\vartheta'$ resta finita e $|\varrho R| = |H|$ non discende al disotto di un limite positivo assegnabile.

Ciò posto, ricordiamo che W è funzione di ϱ, ϑ, regolare per ϱ abbastanza piccolo e periodica rispetto a ϑ. Concluderemo ovviamente (pur non sapendo come si comportano $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ al convergere di ϱ verso 0) che, sopra una generica Σ, W/H è funzione di ϱ, finita e integrabile da un certo valore ϱ_0 a zero.

Designando con M un'opportuna costante, potremo ritenere

$$\left|2\mu\frac{W}{H}\right| < M\,.$$

Moltiplichiamo ora la seconda delle (Σ) per ϱ^3. Se ne trae

$$\frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho^4(\vartheta'+1)\right\} = -\,2\mu\varrho^4\frac{W}{H}\,,$$

donde, integrando fra ϱ_0 e 0, ove si tenga presente che $\varrho^3\vartheta'$ resta finito e quindi $\lim\limits_{\varrho=0}\varrho^4\vartheta' = 0$,

$$\varrho_0^4\left\{\vartheta'(\varrho_0)+1\right\} = -\int_0^{\varrho_0} 2\mu\varrho^4\frac{W}{H}\,d\varrho\,.$$

Questa equazione può essere scritta

$$\vartheta'(\varrho_0)+1 = -\int_0^{\varrho_0} 2\mu\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^4\frac{W}{H}\,d\varrho\,,$$

con che la funzione sotto il segno resta ancora minore di M in valore assoluto (ϱ/ϱ_0 è infatti < 1 in tutto l'intervallo di integrazione). L'integrale del secondo membro converge perciò a zero con ϱ_0 e quindi

$$\lim_{\varrho_0=0}\vartheta'(\varrho_0) = -\,1\,.$$

Per le soluzioni Σ è dunque soddisfatta la condizione (20).

Se ne conclude, in base al secondo teorema del precedente paragrafo, che le Σ sono comprese fra gli ∞^1 integrali del sistema (Σ), olomorfi per $\varrho = 0$.

Reciprocamente ciascun integrale olomorfo definisce una Σ.

Basterà provare che il movimento, corrispondente ad uno qualunque dei detti integrali, avviene in modo che, al convergere di t verso un valore finito t_1, la r, o, ciò che è lo stesso, la ϱ converge a zero. Ricordiamo a tale scopo che, integrato il sistema ridotto (II), la legge del moto si ha dalla equazione [prima delle (I')]

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial r}} = \frac{1}{R}.$$

Ciò è quanto dire, in virtù delle (11), (12), che, per ogni soluzione del sistema (Σ),

$$dt = -2\varrho^2 \frac{d\varrho}{H}.$$

La funzione $1/H$ resta finita al convergere di ϱ a zero, anzi

$$\lim_{\varrho=0} \frac{1}{H} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\nu}},$$

secondochè nella (12) si attribuisce al radicale il segno $-$ o il segno $+$.

t converge dunque (crescendo o decrescendo secondo il segno adottato per il radicale) verso un valore finito, diciamo t_1, al convergere di ϱ a zero.

In definitiva:

Le traiettorie singolari Σ, lungo le quali interviene un urto P, S, entro un tempo finito, corrispondono a tutte e sole le soluzioni del sistema (Σ), olomorfe per $\varrho = 0$.

Se, nel sistema (Σ) stesso, si prende positivamente il radicale H, queste soluzioni olomorfe corrispondono ad urti futuri (traiettorie di collisione), se il radicale si prende negativamente, ad urti passati (traiettorie di eiezione).

Il sistema (Σ) possiede una notevole proprietà analitica. Esso rimane invariato se si scambiano contemporaneamente ϑ in $-\vartheta$ e H in $-H$. La verifica è immediata, ove si osservi che Δ, V e, per conseguenza, H sono funzioni pari di ϑ, W invece funzione dispari.

In virtù di tale proprietà, si ha manifestamente: *La simmetrica (rispetto alla retta SJ) di una traiettoria di collisione è traiettoria di eiezione e reciprocamente.*

6. - Discussione delle triettorie singolari per $\mu = 0$.

Particolare interesse presentano le traiettorie singolari chiuse, le quali, per così dire, nascono e muoiono in S.

Ci occuperemo in questo paragrafo del caso elementare $\mu = 0$.

Così acquisteremo un'idea della natura della questione, procurandoci in pari tempo un fondamento prezioso, per affrontare a suo tempo il caso generale.

Per $\mu = 0$ (quando cioè la massa di J è nulla e quindi non influisce sul moto della coppia S, P), si è ricondotti al problema piano dei due corpi, anzi, siccome anche la massa di P è, per ipotesi, trascurabile, addirittura al moto di P attratto da un centro S fisso (o, ciò che è lo stesso, in modo rettilineo uniforme).

Le traiettorie singolari sono evidentemente le rette uscenti da P.

L'integrale delle forze vive (relativo al moto rettilineo di un punto attratto dall'origine in ragione inversa dei quadrati delle distanze)

$$\frac{1}{2} x'^2 = \frac{1}{x} + h \tag{21}$$

mostra, come si vede subito e come del resto è ben noto, che, se l'energia totale h è positiva, il moto non cambia senso: si va, o dal centro di forza all'infinito, o viceversa. Se invece l'energia totale h è negativa, il mobile non descrive tutta la retta, ma il solo segmento $0, -1/h$. Si tratta perciò di eiezione, seguita da collisione.

Le traiettorie singolari chiuse sono dunque i segmenti rettilinei con un estremo in S (contati due volte).

Questo, si intende bene, concerne il moto assoluto, riferito cioè ad un sistema di assi di direzione invariabile.

I caratteri del moto relativo, rispetto ad un sistema di assi ruotanti con SJ, o, ciò che è sostanzialmente la stessa cosa, rispetto alle nostre variabili ϱ, ϑ, si ricavano, nel modo più comodo, dalle (Σ).

La seconda di esse, fattovi $\mu = 0$, dà (come unico integrale olomorfo nell'intorno di $\varrho = 0$)

$$\vartheta' = -1 .$$

La espressione (12) di H, ponendovi $\mu = 0$ e quindi $\nu = 1$, $\vartheta' = -1$, si riduce a

$$\pm \sqrt{2 - 2C\varrho^2}$$

e la prima delle (Σ) corrispondentemente a

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \pm \frac{2\varrho^2}{\sqrt{2-2C\varrho^2}}. \tag{22}$$

La espressione (6) di F mette in evidenza che, per $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\vartheta' = -1$, la costante C di JACOBI non è che la $-h$ del moto assoluto rappresentato dalla (21). *Le traiettorie* (relative) *chiuse sono dunque definite dalla equazione differenziale* (22), *in cui si intenda C costante positiva.*

Quanto alle posizioni, effettivamente occupate dal mobile, sopra queste curve, è chiaro, per la natura del moto assoluto corrispondente, che si avranno tutte facendo crescere ϱ da 0 a $1/|\sqrt{C}|$ e di là decrescere fino a zero. Nel periodo, in cui ϱ cresce (eiezione) si deve prendere il radicale H negativamente e quindi nella (22) il segno $-$, nel secondo periodo invece (collisione) il segno $+$, conformemente alla regola enunciata in fine del precedente paragrafo.

Riconosciamo di qua che il $d\vartheta$ è sempre negativo (6). Detto perciò ϑ_0 il valore iniziale di ϑ (direzione della tangente in S all'arco di eiezione), il raggio vettore descriverà l'intera curva ruotando sempre nello stesso senso (negativo), a partire dall'azimut ϑ_0, attorno ad S. L'azimut d'arrivo (direzione della tangente all'arco di collisione) sarà ϑ_0 — una certa costante 2Ω, che valuteremo tra un momento.

Ciò ritenuto, passiamo alla integrazione effettiva della (22).

Conviene porre

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{sen} \frac{w}{2}, \tag{23}$$

con che

$$\pm\sqrt{2-2C\varrho^2} = \sqrt{2}\cos\frac{w}{2},$$

$$d\varrho = \frac{1}{2\sqrt{C}}\cos\frac{w}{2}\,dw$$

(intendendo i radicali presi in valore aritmetico).

Per far crescere ϱ da 0 a $1/\sqrt{C}$ e poi decrescere fino a zero, basta far variare w da 0 a 2π.

Da 0 a π, $\cos(w/2)$ è positivo; negativo invece fra π e 2π. Si attribuisce perciò al radicale il debito segno sostituendolo con $-\sqrt{2}\cos(w/2)$.

---

(6) Cosa a priori evidente, poichè la traiettoria assoluta è rettilinea e qui la si considera rispetto ad assi ruotanti nel senso positivo (delle ϑ crescenti).

La (22), così trasformata, diviene

$$-(2C)^{\frac{3}{2}}\,d\vartheta = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{w}{2}\,dw = (1-\cos w)\,dw\,,$$

e, integrata, dà

$$w - \mathrm{sen}\,w = -\zeta\,, \tag{22'}$$

ove ho posto per brevità

$$\zeta = (2C)^{\frac{3}{2}}(\vartheta - \vartheta_0)\,. \tag{24}$$

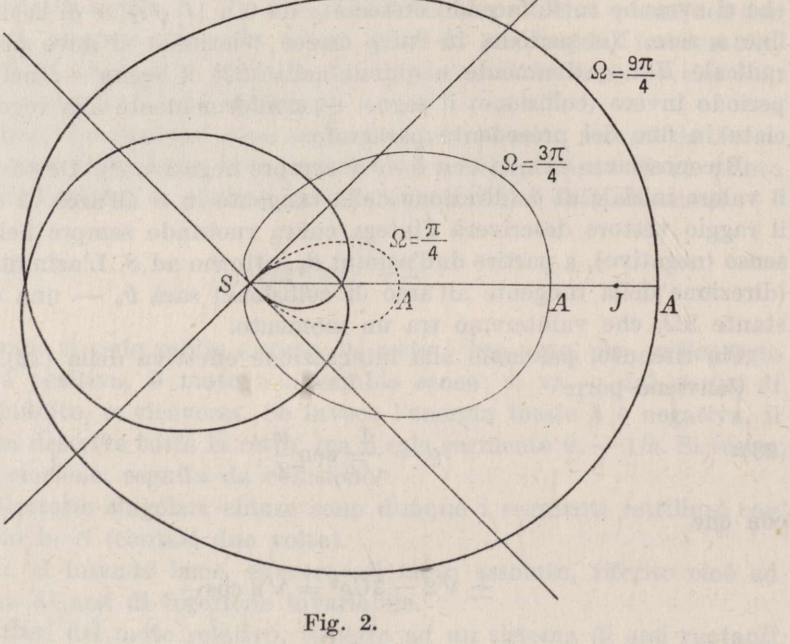

Fig. 2.

La (22′) mostra che, mentre w varia da 0 a 2π, mentre cioè si descrive l'intera traiettoria, ζ si incrementa di -2π, quindi, a norma della (24), ϑ di $-2\pi/(2C)^{\frac{3}{2}}$. L'angolo 2Ω delle due tangenti in S è dunque

$$2\Omega = \frac{2\pi}{(2C)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{25}$$

Si vede immediatamente che la curva è simmetrica rispetto alle bisettrice SA di quest'angolo (retta d'azimut $\vartheta_0 - \Omega$), ossia che a valori di ϑ

aventi per somma $2\vartheta_0 - 2\Omega$ corrispondono eguali valori di ϱ. E, per verità, se due valori di ϑ hanno per somma $2\vartheta_0 - 2\Theta$, i valori corrispondenti di ζ hanno per somma 2π. Ma valori di ζ aventi per somma 2π determinano, a norma della (22′), valori di w aventi pure per somma 2π, quindi valori supplementari di $w/2$; dunque, per la (23), valori eguali di ϱ, giusta l'asserto.

La (22′) è caso limite della equazione di Kepler. Essa ammette una sola radice reale w, che si riduce a zero per $\zeta = 0$. Ogni funzione trigonometrica di questa radice, in particolare $\cos w$, si può sviluppare in serie trigonometrica dell'argomento ζ.

Lo sviluppo di $\cos w$ si ha subito, particolarizzando formule note (7), ed è

$$\cos w = -\frac{1}{2} + \sum_1^\infty {}_n \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta ,$$

con

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} n(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)d\varphi .$$

Dalla (23), elevando al quadrato, si ha infine l'equazione polare delle traiettorie in questione

$$(22'') \qquad r = \frac{1}{C}\operatorname{sen}^2\frac{w}{2} = \frac{1}{2C}(1-\cos w) = \frac{1}{2C}\left\{\frac{3}{2} - \sum_1^\infty {}_n \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta\right\} .$$

Il loro comportamento qualitativo dipende dal valore di Ω (veggasi la fig. 2, dove la bisettrice SA è presa nella direzione SJ, particolarizzazione, che non ha alcuna influenza sulla forma delle curve). Se Ω non supera π, esse si chiudono semplicemente in S; se Ω supera π, esse si chiudono dopo tanti avvolgimenti attorno ad S, quant'è la parte intera del quoziente Ω/π.

Il valore di Ω dipende da quello adottato per C, o, se si vuole, per la *distanza afelia* $\overline{SA} = 1/C$, a norma della (25). Essa esprime (terza legge di Kepler applicata alle nostre traiettorie) che i quadrati delle ampiezze angolari 2Ω stanno fra loro come i cubi delle distanze afelie.

Si noti da ultimo, osservando la (23), che, per $C > 1$, la distanza $\overline{SP} = \varrho^2$ rimane costantemente inferiore all'unità, talchè in particolare nessuna traiettoria va allora a passare per il punto J.

---

(7) Cfr. Tisserand, *Mécanique céleste*, tom. I, cap. XIII.

7. - Relazione invariante caratteristica dell'urto.

A quale condizione debbono soddisfare in un generico istante gli elementi determinativi del moto (posizione e velocità di P) perchè, a partire da essi, intervenga un urto entro un tempo finito?

La posizione e la velocità di P sono individuate dai valori di ϱ, ϑ, ϑ' e dalla costante C di JACOBI, che sostituisce, o, se si vuole anche, costituisce il quarto parametro.

Si tratterà, lasciando di mettere in evidenza la costante C, di riconoscere a quale condizione debbono soddisfare ϱ, ϑ, ϑ' per appartenere ad una delle traiettorie singolari, lungo le quali interviene un urto P, S, per appartenere cioè ad una Σ.

Tutto si riduce dunque ad esprimere che ϱ, ϑ, ϑ' sono valori assunti lungo una Σ, ossia, per quanto s'è visto a § 5, valori, che rientrano nel l'insieme definito dalle (16).

Così stando le cose, la condizione cercata si ha subito eliminando ϑ_0 tra le (16).

Di questa eliminazione ci siamo già implicitamente occupati a § 4. Ed ecco come.

La (19) è — si può dire — il risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (17). Le (16) si ottengono dalle (17) ponendovi $u = 0$. Non c'è che da porre $u = 0$ nella (19), perchè essa ci rappresenti il risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (16).

La relazione caratteristica dell'urto è dunque

$$\text{(III)} \qquad \vartheta' + 1 = \varrho\, f(\varrho, \vartheta).$$

La f si comporta regolarmente per ϱ abbastanza piccolo ed è funzione periodica di ϑ. Appunto per questa periodicità rapporto al parametro angolare ϑ, *la* (III) *è uniforme nel senso di* POINCARÉ.

Resta la effettiva determinazione della funzione $f(\varrho, \vartheta)$. Il procedimento, che ci ha condotti a definire la (III) come risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (16), potrebbe a rigore applicarsi anche per il calcolo quantitativo.

Infatti il teorema di esistenza (Teor. I del § 4) insegna a costruire (come serie di potenze di ϱ) le funzioni α e β, e l'eliminazione di ϑ_0 è pure un'operazione effettuabile, secondo i principi della teoria delle serie di potenze, e permetterebbe di calcolare uno dopo l'altro i coefficienti dello sviluppo di f in serie di potenze di ϱ.

Questo scopo si può però raggiungere in modo più spedito, come si esporrà nel seguente paragrafo.

Osservazione. - Interpretando altrimenti le lettere (cfr. § 3), la (III) può anche risguardarsi come condizione caratteristica di un urto P, J. Consideriamola in questa accezione, immaginiamo di esprimervi tutto per le nostre variabili ϱ, ϑ, ϑ', e rappresentiamola brevemente con

$$u' = 0 .$$

Rappresentiamo poi la (III) (come sostanzialmente abbiamo già avuto occasione di fare a § 4) con

$$u = 0 .$$

Evidentemente

$$\text{(IV)} \qquad u\,u' = 0$$

è la condizione generica di un urto, passato o futuro, di P con uno degli altri due corpi.

La disuguaglianza

$$u\,u' \gtrless 0 ,$$

assicura dunque la prosecuzione indefinita (passata e futura) del movimento di P.

8. - Calcolo della funzione f.

La relazione (III) è invariante pel suo significato: essa abbraccia tutte e sole le Σ; è quindi una varietà (dello spazio analitico ϱ, ϑ, ϑ') costituita interamente da traiettorie del sistema differenziale (Σ).

Ne viene che la (III) seguita ad essere soddisfatta, quando ci si sposta lungo le Σ, cioè, con linguaggio analitico, quando la si deriva rispetto a ϱ, tenendo conto delle (Σ) (e di essa stessa naturalmente).

Avremo così

$$\frac{d\vartheta'}{d\varrho} = \frac{\partial(\varrho f)}{\partial\varrho} + \varrho\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\varrho} ,$$

ossia

$$\frac{1}{\varrho}\left\{-4(\vartheta'+1) - 2\mu\varrho\,\frac{W}{H}\right\} = \frac{\partial(\varrho f)}{\partial\varrho} - 2\varrho^3\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\,\frac{\vartheta'}{H} ,$$

la quale deve sussistere identicamente, quando si introduca dappertutto, al posto di ϑ', il suo valore (III): $-(1-\varrho f)$.

Posto, per maggior chiarezza,

$$(26) \qquad \mathfrak{H} = (H)_{\vartheta'=-(1-\varrho f)} = \pm\sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + 2\mu\varrho^2 V - \varrho^6(1-\varrho f)^2 + \varrho^6} ,$$

il risultato della indicata sostituzione si potrà presentare sotto la forma

$$(27)\qquad 5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} = -2\mu \frac{W}{\mathfrak{H}} - \frac{2}{\mathfrak{H}} \varrho^3 (1 - \varrho f) \frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

La cercata funzione f è dunque un integrale di questa equazione a derivate parziali, la quale si presta nel modo migliore alla determinazione effettiva. Basta tener presente la sviluppabilità di f in serie di potenze di ϱ e porre di conformità

$$(28)\qquad f = \sum_0^\infty {}_m f_m \varrho^m .$$

La (27) permette di calcolare successivamente i coefficienti f_m dello sviluppo. Per accertarlo, si noti che, nel secondo membro, la f compare pel tramite dei prodotti ϱf, $\varrho(\partial f/\partial\vartheta)$, di modo che, se si deriva n volte e si pone poi $\varrho = 0$, il secondo membro dipende soltanto da $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ (e loro derivate rispetto a ϑ).

Nel primo membro viene invece

$$\frac{\partial^n}{\partial \varrho^n}\left(5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho}\right) = \frac{\partial^n}{\partial \varrho^n} \sum_0^\infty {}_m (5 + m) f_m \varrho^m ,$$

donde, per $\varrho = 0$,

$$n!\,(5 + n)\, f_n .$$

Così rimane univocamente determinato f_n in funzione dei coefficienti, che lo precedono. In particolare la (27) stessa dà, per $\varrho = 0$,

$$5\, f_0 = -2\mu \left(\frac{W}{\mathfrak{H}}\right)_{\varrho=0} = 0 ,$$

come risulta subito dalle (13) e (26). Tutte le f_n si potranno dunque valutare, l'una dopo l'altra, nel modo indicato, o, ciò che è lo stesso, introducendo per f lo sviluppo (28) ed eguagliando nei due membri della (27) i coefficienti delle stesse potenze di ϱ.

Per $\mu = 0$, si ha in particolare

$$f = 0 .$$

Infatti questo valore verifica la (27) (fattovi $\mu = 0$), ed è il solo, perchè (come abbiamo visto in generale, qualunque sia μ) i coefficienti dello sviluppo (28) sono univocamente determinati.

La condizione (III) dell'urto si riduce allora a

$$\vartheta' + 1 = 0 ,$$

risultato ovviamente prevedibile, il quale esprime che la velocità angolare (assoluta) di P, rispetto ad S, è nulla, ossia che la velocità di P è diretta secondo la retta PS.

Tornando al caso generale di μ qualunque, facciamo il calcolo dei primi termini dello sviluppo (28).

Anzitutto, da

$$\Delta^2 = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2 = 1 - 2\varrho^2\cos\vartheta + \varrho^4\,,$$

si trae

$$\Delta^{-1} = 1 + \varrho^2\cos\vartheta + \mathbf{4}\,,$$

$$\Delta^{-3} = 1 + 3\varrho^2\cos\vartheta + \frac{3}{2}(-1 + 5\cos^2\vartheta)\varrho^4 + \mathbf{6}\,,$$

designando genericamente con $\mathbf{k}$ una espressione d'ordine k in ϱ.

Si ha poi

$$V = \frac{1}{\Delta} - \varrho^2\cos\vartheta = 1 + \mathbf{4}\,,$$

$$W = \operatorname{sen}\vartheta\left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right) = -\frac{3}{2}\varrho^2\operatorname{sen}\vartheta\left\{2\cos\vartheta + (-1 + 5\cos^2\vartheta)\varrho^2 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{H}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\left\{1 + \frac{C-\mu}{2\nu}\varrho^2 + \mathbf{4}\right\},$$

$$-2\mu\frac{W}{\mathfrak{H}} = \pm\frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}}\varrho^2\operatorname{sen}\vartheta\left\{2\cos\vartheta + \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu}\cos\vartheta + 5\cos^2\vartheta\right)\varrho^2 + \mathbf{4}\right\}.$$

Di qua apparisce che il secondo membro della (27) contiene ϱ^2 a fattore. Devono dunque annullarsi f_0 ed f_1, e conviene, per il calcolo dei coefficienti successivi, prendere f sotto la forma

$$(28') \qquad f = \varrho^2\psi = \varrho^2\sum_0^\infty{}_m\, \psi_m\varrho^m\,,$$

donde

$$5f + \varrho\frac{\partial f}{\partial\varrho} = \varrho^2\left(7\psi + \varrho\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\right) = \varrho^2\sum_0^\infty{}_m\,(m+7)\psi_m\varrho^m\,.$$

Portiamo per f la espressione (28') anche nel secondo membro della (27); sopprimiamo da una parte e dall'altra il fattore ϱ^2 e scriviamo sviluppatamente. Risulta

$$7\psi_0 + 8\psi_1\varrho + 9\psi_2\varrho^2 + 10\psi_3\varrho^3 + \mathbf{4}$$

$$= \pm \frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen}\vartheta \left\{ 2\cos\vartheta + \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu}\cos\vartheta + 5\cos^2\vartheta \right)\varrho^2 + \mathbf{4} \right\}$$

$$\mp \frac{2}{\sqrt{2\nu}}\varrho^3 \frac{\partial\psi_0}{\partial\vartheta} + \mathbf{4},$$

e il confronto dei coefficienti delle potenze di ϱ, fino alla terza, porge

$$\psi_0 = \pm \frac{3}{7}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} 2\vartheta,$$

$$\psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = \pm \frac{1}{3}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen}\vartheta \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu}\cos\vartheta + 5\cos^2\vartheta \right),$$

$$\psi_3 = \mp \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\frac{\partial\psi_0}{\partial\vartheta} = -\frac{3}{35}\frac{\mu}{\nu}\cos 2\vartheta.$$

La espressione di f, fino al quint'ordine è dunque

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} f = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}}\varrho^2 \Big\{ \frac{3}{7}\operatorname{sen} 2\vartheta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\vartheta \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu}\cos\vartheta + 5\cos^2\vartheta \right)\varrho^2 \\ \mp \frac{3}{35}\frac{2}{\sqrt{2\nu}}\cos 2\vartheta\,\varrho^3 + \dots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

dove (ricordando la regola del § 5 e intendendo per $\sqrt{2\nu}$ il valore aritmetico del radicale) *dovremo prendere i segni superiori, se si tratta di urti futuri, gli inferiori, se si tratta di urti passati.*

I termini effettivamente calcolati nella (23) bastano a fornire una espressione approssimata di f, valida, per ϱ abbastanza piccolo, qualunque sia ϑ. Essi permettono in particolare di seguire l'andamento delle curve

$$f = \text{cost.}$$

in un intorno abbastanza piccolo di S.

Si noti che, per $\vartheta = 0$, il primo coefficiente, che non si annulla, è precisamente quello di ϱ^5. Tutti i termini calcolati sono dunque necessari per la rappresentazione approssimata (per poter asserire che, di fronte ad essi, i successivi sono trascurabili in un intorno abbastanza piccolo di $\varrho = 0$, qualunque sia ϑ).

La determinazione di f è esauriente per ϱ abbastanza piccolo. A definire la funzione in tutto il suo campo di esistenza, basta teoricamente il prolungamento analitico. Ma sarebbe desiderabile di precisare il campo di validità dello sviluppo (28); e più generalmente di riconoscere i caratteri della funzione f e il modo di calcolarla effettivamente per qualunque valore di ϱ. Rispetto alla prima questione, non sarà forse superfluo osservare che, applicando il metodo dei limiti alla equazione (27), si può facilmente assegnare *un* valore di ϱ (se non il vero raggio di convergenza), al disotto del quale lo sviluppo (28) di f è certo convergente.

9. - Traiettorie singolari chiuse per i piccoli valori di μ.

Nel caso speciale $\mu = 0$ (§ 6) le traiettorie singolari, corrispondenti a valori positivi della costante C di Jacobi, sono tutte curve chiuse.

Quale sarà il comportamento delle analoghe Σ per μ qualunque ? Si può dimostrare che, almeno per μ abbastanza piccolo e $C > 1$, la proprietà seguita a sussistere.

A questo scopo, riprendiamo per un momento a considerare il sistema differenziale (Σ), risguardandovi la costante μ come un parametro (e $\nu = 1 - \mu$).

Lo stesso metodo dei limiti, che ha servito a stabilire il teorema di esistenza, mostra [8] che gli ∞^1 integrali olomorfi $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$ sono, in un certo intorno E di $\varrho = 0$, funzioni regolari di μ, per $\mu < 1$, e in particolare per μ abbastanza piccolo.

Ciò ritenuto, conveniamo di designare con $\overline{\Sigma}_\mu$ una qualunque delle ∞^1 Σ, che corrispondono a un dato valore di μ e a un valore, pur dato e maggiore dell'unità, della costante C di Jacobi.

Fissiamo una generica $\overline{\Sigma}_0$ e la $\overline{\Sigma}_\mu$ uscente da S sotto lo stesso angolo ϑ_0.

Sia E' un generico intorno di S, interno ad E.

La $\overline{\Sigma}_0$, essendo chiusa, rientra manifestamente in E' (e quindi in E), dopo un certo percorso finito [e non nullo, perchè ogni $\overline{\Sigma}_0$ contiene anche un punto, $\varrho = 1/|\sqrt{C}|$, in cui H si annulla e che non può quindi appartenere al campo E di regolarità del sistema differenziale (Σ)].

Dico che anche $\overline{\Sigma}_\mu$ rientra in E, dopo un percorso finito, purchè μ differisca abbastanza poco dallo zero.

La giustificazione di tale asserto non va cercata nelle equazioni (Σ),

---

[8] Cfr. Poincaré, *Mécanique céleste*, tom. I, nn. 23-26.

il cui comportamento, fuori di E, non è sempre regolare (il denominatore H può benissimo annullarsi), ma nelle equazioni originarie (I), in cui t è la variabile indipendente. Da quando $\bar{\Sigma}_0$ esce a quando rientra in E' passa un tempo finito; in questo intervallo la $\bar{\Sigma}_0$ resta sempre a distanza finita, non solo da S, ma anche, per essere $C > 1$ (cfr. § 6), dall'altro punto singolare J. Si può dunque essere certi, per un teorema fondamentale del sig. POINCARÉ [9], che, se il parametro μ è abbastanza piccolo, $\bar{\Sigma}_\mu$ si mantiene vicina a $\bar{\Sigma}_0$ tanto quanto si vuole; così vicina in particolare che, quando $\bar{\Sigma}_0$ rientra in E', la posizione sincrona di $\bar{\Sigma}_\mu$ appartenga ad E.

Adesso è facile constatare che $\bar{\Sigma}_\mu$ va proprio a terminare in S.

Immaginiamo infatti di partirci da S e di seguire $\bar{\Sigma}_\mu$ nel suo percorso. In partenza, si ha a fare con una traiettoria di eiezione. Sopra di essa, sarà di conseguenza soddisfatta la (III), il radicale $\sqrt{2\nu}$ dello sviluppo di f [come l'H delle (Σ)] andando preso negativamente.

La (III), o meglio la sua continuazione analitica, seguita ad essere soddisfatta lungo tutta la curva.

Quale può essere la continuazione analitica della (III), quando $\bar{\Sigma}_\mu$ rientra in E?

La circostanza che la funzione f verifica la (27) mostra che in E sono possibili per f, e quindi per la (III), due sole determinazioni, corrispondenti al doppio segno del radicale. Nell'uscire da E il radicale andava preso negativamente; nel rientrare lo si dovrà invece prendere positivamente, poichè questo accade sopra la traiettoria vicinissima $\bar{\Sigma}_0$.

La $\bar{\Sigma}_\mu$ rientra dunque in E coi caratteri di traiettoria di collisione.

c.d.d.

Parmi ben probabile che, al di là di un certo valore della costante di JACOBI, le Σ seguitino ad essere curve chiuse, per qualunque valore di μ (e non soltanto per μ abbastanza piccolo). Non sono però riescito a dimostrarlo rigorosamente.

---

(9) Loco citato, n. 27.

Padova, Febbraio 1903.