XVIII.

SOPRA LA EQUAZIONE DI KEPLER (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIII (1° Sem. 1904), pp. 260-268.

1. – Per e abbastanza piccolo, la equazione di KEPLER

$$u - e \operatorname{sen} u = \zeta$$

definisce univocamente la u come funzione regolare della e e del parametro ζ. Infatti la derivata del primo membro, rispetto ad u, $1 - e \cos u$, non si annulla per $e = 0$.

Lo sviluppo classico di u per potenze di e, fornito dalla serie di LAGRANGE è

$$u = \zeta + \sum_1^\infty{}_n \frac{e^n}{n} \frac{d^{n-1} \operatorname{sen}^n \zeta}{d\zeta^{n-1}} .$$

Il raggio di convergenza di questo sviluppo dipende in generale da ζ. Quando ζ varia comunque sopra l'asse reale, esso ha un limite inferiore e_1, notato già da LAPLACE e stabilito con procedimenti rigorosi dal signor ROUCHÉ [1]. Questo limite $e_1 = 0{,}6627$ risulta definito da

$$\frac{2l}{E^l + E^{-l}} ,$$

dove l è la radice (unica positiva) della equazione

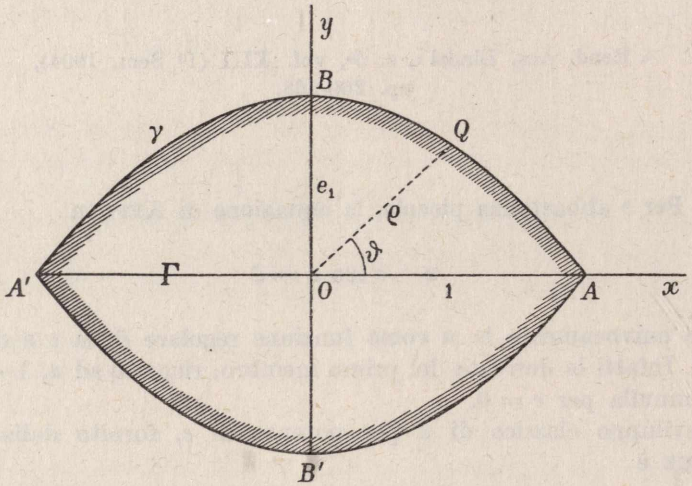
$$f(l) = -l(E^l - E^{-l}) + E^l + E^{-l} = 0 .$$

(*) Presentata dal Socio V. VOLTERRA nella seduta del 6 marzo 1904.

[1] *Sur la série de Lagrange*, « Journal de l'École Polytechnique », 39ᵉ Cahier, 1862. Cfr. HERMITE, *Cours d'analyse*, 19ᵉ Leçon; oppure TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, chap. XVI.

(Per evitare ambiguità colla e si designa con E la base dei logaritmi neperiani).

Ciò posto, è chiaro che la serie sopra riportata resta convergente, per tutti i valori reali di ζ, solo sotto la condizione $|e| < e_1$. Ma, pur variando comunque ζ nel campo reale, la funzione $u(e, \zeta)$, definita dalla (I), è regolare rispetto ad e in un campo Γ (veggasi la figura) *maggiore* del cerchio $|e| = e_1$ e comprendente in particolare tutti i punti del segmento $(0, 1)$.



La ricerca — abbastanza elementare per verità — dei limiti di questo campo conduce naturalmente ad una rappresentazione analitica della funzione u, valida per tutti i punti del campo stesso. In modo preciso si ha il seguente semplicissimo risultato:

La funzione u di e, definita dalla equazione di KEPLER *è sviluppabile* (per qualunque valore reale di ζ) *in serie di potenze dell'argomento*

$$\eta = \frac{eE^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

(intendo pel radicale la determinazione, che si riduce all'unità per $e = 0$).

La serie converge entro il cerchio $|\eta| = 1$, *cui corrisponde, nel piano della variabile complessa e, l'intero campo di regolarità* Γ *della funzione u.*

Come si vede, l'argomento η si annulla per $e = 0$ e cresce, per valori reali, da 0 ad 1, assieme ad e. Gli sviluppi procedenti per potenze di η presentano perciò, oltre al vantaggio della incondizionata validità per qualsiasi orbita ellittica, la stessa convenienza numerica degli sviluppi abituali, procedenti per potenze di e.

2. – Il ramo della funzione u di e, definito senza ambiguità dalla (I), nell'intorno dell'origine O, resta certamente uniforme e regolare finchè non si annulla

$$1 - e \cos u\,.$$

Ne viene che, procedendo da O, nel piano e, lungo una linea qualsiasi, la regolarità di u può cessare, e cessa effettivamente (i corrispondenti valori di e essendo per la u punti critici di indice 2) solo quando sussistano insieme le due equazioni

$$u - e \operatorname{sen} u = \zeta\,, \tag{1}$$

$$1 - e \cos u = 0\,. \tag{2}$$

Supponiamo ζ reale e vediamo quali condizioni se ne traggono per i valori di e, che le rendono soddisfatte.

Incominciamo col porre

$$e = \varrho E^{i\vartheta}\,, \qquad u = \omega + i\tau\,,$$

essendo ϱ il modulo di e, ω la parte reale di u, ecc.

La sostituzione nelle (1), (2) dà

$$\omega + i\tau + \tfrac{1}{2}\, i\varrho\{E^{-\tau+i(\vartheta+\omega)} - E^{\tau+i(\vartheta-\omega)}\} = \zeta\,,$$
$$\tfrac{1}{2}\,\varrho\,\{E^{-\tau+i(\vartheta+\omega)} + E^{\tau+i(\vartheta-\omega)}\} = 1\,,$$

e, scindendovi il reale dall'immaginario,

$$\omega + \tfrac{1}{2}\,\varrho\{-E^{-\tau}\operatorname{sen}(\vartheta+\omega) + E^{\tau}\operatorname{sen}(\vartheta-\omega)\} = \zeta\,;$$
$$\begin{cases} \tau + \tfrac{1}{2}\,\varrho\{E^{-\tau}\cos(\vartheta+\omega) - E^{\tau}\cos(\vartheta-\omega)\} = 0\,, \\ \tfrac{1}{2}\,\varrho\{E^{-\tau}\cos(\vartheta+\omega) + E^{\tau}\cos(\vartheta-\omega)\} = 1\,, \\ \tfrac{1}{2}\,\varrho\{E^{-\tau}\operatorname{sen}(\vartheta+\omega) + E^{\tau}\operatorname{sen}(\vartheta-\omega)\} = 0\,. \end{cases}$$

A noi interessa di riconoscere quali valori di ϱ e di ϑ rendono soddisfatto il sistema, variando comunque ζ. La prima equazione serve, si può dire, unicamente a definire ζ. Da essa possiamo perciò prescindere. Nelle altre tre è intanto a ritenersi $\varrho > 0$, poichè già sappiamo che, per $\varrho = 0$ (il che implica $e = 0$), il ramo considerato è regolare e quindi le equazioni non possono essere soddisfatte. Ciò apparisce del resto direttamente dalla seconda di esse, il cui primo membro, per $\varrho = 0$, e τ finito, si annulla, mentre dovrebbe essere eguale all'unità. Ritenendo dunque $\varrho > 0$, le suddette tre equazioni potranno essere scritte

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos(\vartheta + \omega) = E^{\tau} \dfrac{1-\tau}{\varrho}, \\[2ex] \cos(\vartheta - \omega) = E^{-\tau} \dfrac{1+\tau}{\varrho}; \end{cases}$$

$$(4) \qquad E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) = 0\,.$$

Si tratta di caratterizzare l'insieme γ (sarà, come vedremo, una curva) costituito dai punti $Q(\varrho, \vartheta)$ del piano e, per i quali risultano soddisfatte le (3), (4), essendo τ ed ω quantità (reali, s'intende) a priori indeterminate.

In primo luogo è lecito limitarsi a valori positivi di τ. Infatti il sistema (3), (4) si trasforma in se stesso, quando si cambiano τ ed ω in $-\tau$, $-\omega$, senza toccare ϱ e ϑ; e questo equivale a dire che l'insieme dei punti Q, corrispondenti a valori positivi di τ, non differisce dall'insieme corrispondente a valori negativi. L'uno e l'altro coincidono dunque con γ.

Si noti ancora che il sistema (3), (4) non cambia, quando, lasciando inalterati ϱ e τ, si cambiano ϑ ed ω:

1) in $-\vartheta$, $-\omega$;

2) in $\pi - \vartheta$, $\pi - \omega$.

Ne viene che, assieme ad ogni punto (ϱ, ϑ), appartengono a γ anche il punto simmetrico rispetto all'asse reale x, $(\varrho, -\vartheta)$, e il punto simmetrico rispetto all'asse immaginario y, $(\varrho, \pi - \vartheta)$.

Basterà perciò considerare i punti Q situati nel primo quadrante, e ripeterli per riflessione negli altri tre quadranti.

3. – E veniamo alla discussione del sistema (3), (4), in cui si intenda $\tau \geqslant 0$, nonchè ϑ compreso fra 0 e $\pi/2$.

Dalle (3) si ha

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega) = 1 - \cos^2(\vartheta + \omega) = 1 - E^{2\tau} \frac{(1+\tau)^2}{\varrho^2},$$

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega) = 1 - \cos^2(\vartheta - \omega) = 1 - E^{-2\tau} \frac{(1+\tau)^2}{\varrho^2},$$

mentre la (4) porge

$$E^{2\tau} \operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega) = E^{-2\tau} \operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega)\,,$$

e, portandovi per $\operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega)$, $\operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega)$ i loro valori, risulta

$$(5) \qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{4\tau} = 1 + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{2}{15}\tau^4 + \dots\,.$$

Questa equazione determina univocamente un valore positivo ϱ in funzione di τ. Ma non ad ogni valore di τ corrisponde una soluzione del nostro sistema. Bisogna che, portando nelle (3) la espressione (5) di ϱ, i secondi membri non superino l'unità in valore assoluto. Bisogna dunque che

$$E^{2\tau}(1-\tau)^2 \frac{E^{2\tau}-E^{-2\tau}}{4\tau} \leqslant 1\,, \qquad E^{-2\tau}(1+\tau)^2 \frac{E^{2\tau}-E^{-2\tau}}{4\tau} \leqslant 1\,,$$

le quali, posto per brevità

$$N = \frac{(1+\tau)^2E^{-2\tau}-(1-\tau)^2E^{2\tau}}{4\tau}\,, \tag{6}$$

equivalgono all'unica disuguaglianza $N > 0$, cioè anche a

$$(1+\tau)E^{-\tau}-|1-\tau|E^{\tau} \geqslant 0\,. \tag{7}$$

Per $\tau \leqslant 1$, si ha $|1-\tau| = 1-\tau$ e la (8) è senz'altro soddisfatta. Infatti il primo membro si annulla per $\tau = 0$, e cresce poi con τ, perchè la derivata

$$\tau(E^{\tau}-E^{-\tau})$$

è sempre positiva.

Se invece $\tau \geqslant 1$, $|1-\tau| = \tau - 1$, e la (7), ponendo ancora

$$f(\tau) = -\tau(E^{\tau}-E^{-\tau}) + (E^{\tau}+E^{-\tau})\,,$$

si scriverà,

$$f(\tau) \geqslant 0\,. \tag{7'}$$

La derivata

$$f'(\tau) = -\tau(E^{\tau}+E^{-\tau})$$

è negativa per τ positivo, la f va dunque decrescendo. Essa è positiva per $\tau = 1$, negativa per $\tau = 2$; si annulla quindi per un valore intermedio l. Perciò la (7′) riesce soddisfatta fra 1 e l, ma cessa di esserlo oltre l, in quanto la f, seguitando a decrescere, diventa e si mantiene negativa.

La equazione $f(l) = 0$ è quella stessa, che si incontra cercando il minimo raggio di convergenza (per ζ reale) dello sviluppo di u in serie di potenze di e. Il valore numerico della radice l è 1,9967 (*).

(*) Questo numero va corretto in 1,19967. (V. Rouché, loc. cit. (¹), pag. 212). [N. d. R.].

Messo in chiaro che sono da considerare soltanto valori di τ, compresi fra 0 ed l, mostriamo reciprocamente che ad ognuno di essi corrisponde uno ed un sol punto Q del primo quadrante.

Il modulo ϱ è, come si è visto, determinato senza ambiguità dalla (5). Quanto all'argomento ϑ, abbiamo le (3) e le

$$\text{sen}\,(\vartheta + \omega) = \pm E^{\tau}\sqrt{N}\,, \qquad \text{sen}\,(\vartheta - \omega) = \pm E^{-\tau}\sqrt{N}\,,$$

che ne sono necessaria conseguenza in virtù delle (5), (6). Portando questi valori nella (4) si riconosce che i radicali vanno presi con segno opposto, e con ciò la (4) stessa rimane identicamente soddisfatta.

Essendo poi

$$\cos 2\vartheta = \cos\,(\vartheta + \omega)\cos\,(\vartheta - \omega) - \text{sen}\,(\vartheta + \omega)\,\text{sen}\,(\vartheta - \omega)\,,$$

ricaviamo in definitiva

$$(8) \qquad \cos 2\vartheta = \frac{1-\tau^2}{\varrho^2} + N = -\tau\frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2} + \frac{E^{2\tau} + E^{-2\tau}}{2} = 1 - \frac{2}{3}\tau^4 + \ldots\,,$$

la quale determina univocamente un angolo 2ϑ non maggiore di due retti, e quindi uno ed un solo angolo ϑ del primo quadrante.

Le considerazioni precedenti ci assicurano che, al variare di τ fra zero ed l, il secondo membro della (8) rimane compreso fra -1 e $+1$. Se ne ha la riprova, notando:

1) che, per $\tau = 0$, $\cos 2\vartheta = 1$.

2) che $\cos 2\vartheta$ decresce con τ.

Infatti, essendo

$$\frac{d\cos 2\vartheta}{d\tau} = -\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) + \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2}\,,$$

$$\frac{d^2\cos 2\vartheta}{d\tau^2} = -2\tau(E^{2\tau} - E^{-2\tau}) \quad (< 0, \text{ per } \tau > 0)\,,$$

la funzione $d\cos 2\vartheta/d\tau$ è decrescente, e, siccome, per $\tau = 0$, si annulla, così, per valori positivi di τ, essa è negativa, e quindi $\cos 2\vartheta$ decresce.

3) che, per $\tau = l$, $\cos 2\vartheta = -1$.

Ciò risulta dall'essere l radice dell'equazione $f(l) = 0$, donde

$$l(E^{l} - E^{-l}) = E^{l} + E^{-l}\,.$$

Posta infatti la espressione di $\cos 2\vartheta$ sotto la forma

$$\tfrac{1}{2}\,\{-\tau(E^{\tau} - E^{-\tau})(E^{\tau} + E^{-\tau}) + E^{2\tau} + E^{-2\tau}\}\,,$$

quando vi si fa $\tau = l$, e si sostituisce $l(E^l - E^{-l})$ col suo valore $E^l + E^{-l}$, rimane effettivamente

$$\cos 2\vartheta = \tfrac{1}{2}\{-(E^l + E^{-l})^2 + E^{2l} + E^{-2l}\} = -1.$$

Da queste osservazioni emerge che, al variare di τ da 0 ad l, l'anomalia ϑ varia, costantemente crescendo, da 0 a $\pi/2$.

Il raggio vettore ϱ va invece costantemente decrescendo (il suo inverso $1/\varrho$ costantemente crescendo), poichè si ha dalla (5)

$$\text{(9)}\qquad \frac{d\dfrac{1}{\varrho^2}}{d\tau} = \frac{1}{4\tau^2}\{2\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) - (E^{2\tau} - E^{-2\tau})\} = -\frac{1}{2\tau^2}\,\frac{d\cos 2\vartheta}{d\tau},$$

e il secondo membro è costantemente positivo, per quanto è stato ora osservato. Il minimo di ϱ è dunque raggiunto per $\tau = l$ e quindi $\vartheta = \pi/2$. Tale minimo valore viene definito, a norma della (5), da

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{E^{2l} - E^{-2}}{4l} = \frac{l(E^l - E^{-l})(E^l + E^{-l})}{4l^2},$$

la quale, usufruendo qui ancora la $f(l) = 0$, porge

$$\varrho = \frac{2l}{E^l + E^{-l}},$$

che è la espressione nota del minimo raggio di convergenza e_1, ricordata al n. 1.

Riassumendo, possiamo concludere:

I punti Q del primo quadrante corrispondono univocamente ai valori di τ dell'intervallo $(0, l)$, *a norma delle equazioni* (5), (8), *e costituiscono in conseguenza un arco di curva analitica AB. Quest'arco incomincia* $(\tau = 0)$ *nel punto A dell'asse reale x, distante* 1 *dall'origine, e termina* $(\tau = l)$ *nel punto B dell'asse y, situato alla* (*minima*) *distanza* $e_1 = 0{,}6627$.

Fra A e B il raggio vettore varia costantemente decrescendo (*).

Cerchiamo ancora l'angolo α, che la tangente alla curva in un punto generico Q forma colla direzione positiva dell'asse x.

Si ha $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$; quindi, dalle $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\operatorname{sen}\vartheta$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\, d\varrho + \varrho\cos\vartheta\, d\vartheta}{\cos\vartheta\, d\varrho - \varrho\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta}.$$

(*) Il caso $\tau=0$ richiede in veritá una trattazione autonoma, ma estremamente facile, che porta ad aggiungere alla figura del testo le due semirette dell'asse reale $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. [N. d. R.]

Moltiplichiamo sopra e sotto per $-2 \operatorname{sen} 2\vartheta/\varrho^3$, potremo scrivere

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \operatorname{sen} \vartheta \dfrac{d \dfrac{1}{\varrho^2}}{d\tau} + \dfrac{\cos \vartheta}{\varrho^2} \dfrac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}}{\operatorname{sen} 2\vartheta \cos \vartheta \dfrac{d \dfrac{1}{\varrho^2}}{d\tau} - \dfrac{\operatorname{sen} \vartheta}{\varrho^2} \dfrac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}},$$

che, avuto riguardo alla (9), si riduce a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \vartheta \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\tau^2} - \dfrac{1}{\varrho^2} \right)}{\cos^2 \vartheta \dfrac{\operatorname{sen} \vartheta}{\tau^2} + \dfrac{\operatorname{sen} \vartheta}{\varrho^2}}.$$

Escluso per un momento il valore zero di τ, e quindi anche di ϑ, il denominatore è manifestamente finito e > 0; il numeratore è pure finito e si annulla con $\cos \vartheta$. Ne viene $\operatorname{tg} \alpha = 0$, per $\vartheta = \pi/2$.

Al convergere di τ a zero, si ha

$$\varrho = 1, \quad \lim_{\tau=0} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (}^2\text{)},$$

e per conseguenza $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$.

La tangente in A (nel verso AB) è dunque inclinata sulla direzione positiva dell'asse x di 120°, cioè sulla AO di 60°. La tangente in B è invece parallela all'asse x.

Se ora si riflette l'arco di curva AB negli altri tre quadranti, si ottiene (cfr. la figura) una curva chiusa γ, che ha in A e nel suo simmetrico A' due punti angolosi di apertura 120°, mentre c'è perfetto raccordo in B e B'.

La curva γ costituisce il contorno completo del campo di regolarità Γ della nostra funzione u, poichè ogni punto Q di γ è effettivamente singolare per qualche valore reale del parametro ζ. Risulta infatti dalle precedenti considerazioni che ad ogni Q corrispondono due valori eguali ed opposti di τ e di ω, per i quali coesistono le (1) (3) (con ζ reale). I primi sono univocamente determinati, i secondi a meno di multipli di 2π.

(²) Questo risulta subito dalla (8), in quanto

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} = \frac{1}{3} \tau^4 + \ldots .$$

La (1) stessa poi (essendo $u = \omega + i\tau$) coordina ad ogni punto Q due valori reali di ζ, eguali ed opposti (e i loro congrui rispetto a 2π).

4. – La funzione u di e (ritenuto ζ comunque variabile nel campo reale) è regolare entro Γ, e non oltre. Secondo i principî della teoria delle funzioni, la naturale espressione analitica di u in Γ è quella di una serie di potenze del parametro $\eta(e)$, che realizza la rappresentazione conforme di Γ sopra un cerchio di raggio 1.

Nel caso presente la determinazione di η è pressochè immediata.

Ricordiamo infatti che in ogni punto Q del contorno γ di Γ valgono ad un tempo le (1), (2). Dalla (2) si ha

$$e \operatorname{sen} u = \sqrt{e^2 - 1} = i\sqrt{1 - e^2}\,,$$

con che la (1) può essere scritta

$$u = \zeta + i\sqrt{1 - e^2}\,,$$

e la (2) stessa

$$E^{iu} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\,.$$

Sostituendovi per u il suo valore $\zeta + i\sqrt{1 - e^2}$, se ne ricava

$$E^{i\zeta} = \frac{eE^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\,,$$

la quale viene dunque soddisfatta da valori reali di ζ in ogni punto Q, e ciò per entrambe le determinazioni del radicale $\sqrt{1 - e^2}$ [3].

Ne viene che, sul contorno γ, la funzione $eE^{\sqrt{1-e^2}}/(1 + \sqrt{1 - e^2})$ (anzi ciascuna delle due determinazioni, che la funzione comporta) ha modulo eguale all'unità.

D'altra parte, se immaginiamo di tagliare il piano e dai punti 1 e -1 fino a $+\infty$ e $-\infty$ rispettivamente, e di fissare per il radicale $\sqrt{1 - e^2}$ la determinazione $= 1$, per $e = 0$, la

$$\eta = \frac{eE^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

---

[3] In quanto, come è stato osservato alla fine del numero precedente, ad ogni punto Q convengono valori eguali ed opposti di u e di ζ; quindi, per la equazione testè incontrata $u = \zeta + i\sqrt{1 - e^2}$, anche valori eguali ed opposti del radicale.

costituisce un ramo uniforme di funzione della variabile complessa e, regolare nel piano così tagliato, e in particolare entro Γ. Sopra γ è $|\eta| = 1$. La derivata di η rapporto ad e

$$\frac{\sqrt{1-e^2}\, E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

non si annulla entro Γ (le sue radici sono evidentemente solo ± 1).

Per queste tre proprietà la η effettua la rappresentazione conforme del campo Γ sopra un cerchio di raggio 1.

Val forse la pena di rilevare che, per essere la funzione η olomorfa anche nei punti B e B' ($\pm ie_1$) del contorno γ, si ha in questi punti non solo raccordo grafico (ciò che già sapevamo), ma vera e propria continuazione analitica.