XIV.

SUR LES TRAJECTOIRES SINGULIÈRES DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXV (1903), pp. 82-84.

Soient J, S, des masses respectives $\mu, \nu = 1 - \mu$, les deux corps tournant uniformément (avec une vitesse angulaire égale à l'unité) autour de leur centre de gravité commun. Soit P le troisième corps de masse négligeable.

Si l'on pose (en prenant $\overline{SJ}$ pour unité de longueur)

$$r = \overline{SP}, \quad \vartheta = \widehat{JSP}, \quad \varDelta = \overline{JP} = |\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\vartheta}|,$$

$$V = \frac{1}{\varDelta} - r\cos\vartheta, \qquad F = \frac{1}{2}\left\{R^2 + r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2\right\} - \frac{1}{2}r^2 - \frac{\nu}{r} - \mu V,$$

les équations du mouvement s'écrivent, sous forme canonique, pour ainsi dire, polaire,

$$\text{(I)} \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Theta}, \qquad \frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}.$$

La signification des variables conjuguées R, Θ se tire des équations elles-mêmes. En effet, les deux premières $dr/dt = R$, $d\vartheta/dt = \Theta/r^2 - 1$ nous apprennent que R n'est que la *dérivée du rayon vecteur*,

$$\Theta = r^2(d\vartheta/dt + 1)$$

le *double de la vitesse aréolaire* (*absolue*).

D'après une proposition bien connue, précisée par M. Painlevé, dans le problème des trois corps, le mouvement se poursuit régulièrement tant qu'il n'y a pas de choc. Il s'ensuit, pour le problème restreint, que toute singularité du mouvement peut provenir seulement de ce que, t tendant vers une valeur finie t_1, $\lim_{t=t_1} r = 0$ ou bien $\lim_{t=t_1} \Delta = 0$. (Évidemment les deux circonstances ne peuvent pas se présenter à la fois). Comme les deux corps S, J jouent un rôle symétrique (dans la question, sinon dans la notation) il suffira d'étudier le premier cas.

Proposons-nous donc de caractériser les trajectoires Σ (réelles, cela va sans dire) du système (I), sur lesquelles on a, pour une certaine valeur, d'ailleurs quelconque t_1,

$$\lim_{t=t_1} r = 0 \,. \tag{1}$$

Fixons une quelconque de ces Σ.

Le mouvement étant régulier avant l'instant t_1, r ne s'annule pas pour $t < t_1$; ce n'est pas non plus une constante, d'après (1). Il existe donc des valeurs de t, aussi près que l'on veut de t_1, pour lesquelles $dr/dt = R$ est $\gtrless 0$.

Ceci posé, considérons le système différentiel réduit qui définit les trajectoires et qu'on tire de (I) en éliminant dt et en tenant compte de l'intégrale de Jacobi $F = -C$, savoir

$$R^2 = r^2 + \frac{2\nu}{r} + 2\mu V - r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 - 2C \,.$$

R étant ainsi défini en fonction de r, ϑ, Θ, les équations des trajectoires sont

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}, \qquad \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}. \tag{II}$$

Les Σ cherchées doivent être naturellement des solutions de (II). Pour les séparer des autres solutions, il va nous suffire de retenir la circonstance suivante:

Il y a sur toute Σ des valeurs de r, si près que l'on veut de zéro, pour lesquelles ϑ et Θ sont des fonctions holomorphes de r.

C'est ce qui résulte immédiatement de (1) et de la remarque faite tout à l'heure que dr/dt ne s'annule pas identiquement.

Posons

$$\varrho = |\sqrt{r}|, \qquad \vartheta' = \frac{\Theta}{\varrho^4} - 1;$$

$$\varrho^2 W = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \varrho^2 \sin\vartheta\left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right), \qquad \varrho P = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho^2(-2C + 2\mu V + \varrho^4)\right];$$

$$H = -\varrho R = \pm\sqrt{2\nu - \varrho^6\vartheta'^2 + \varrho^2(-2C + 2\mu V + \varrho^4)},$$

avec quoi V, W, P résultent des fonctions de ϱ et de ϑ, régulières, pour toute valeur réelle de ϑ, dans le domaine de $\varrho = 0$; H (une fois fixé son signe) une fonction de ϱ, de ϑ et de ϑ', régulière au voisinage de $\varrho = 0$ pour toute valeur réelle de ϑ et de ϑ'. Cette nouvelle fonction inconnue ϑ' n'est évidemment autre chose que la vitesse angulaire relative $d\vartheta/dt$, comme il suit immédiatement de la relation $d\vartheta/dt = \Theta/r^2 - 1 = \Theta/\varrho^4 - 1$.

Le système (II) devient ainsi

$$(\Sigma) \qquad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = -2\varrho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \quad \varrho \frac{d\vartheta'}{d\varrho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\varrho \frac{W}{H},$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \varrho H \frac{dH}{d\varrho} = \varrho H \left(\frac{\partial H}{\partial \varrho} + \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varrho} + \frac{\partial H}{\partial \vartheta'} \frac{d\vartheta'}{d\varrho} \right) = (\varrho^3 \vartheta')^2 + \varrho^2 (P + 4\varrho \cdot \varrho^3 \vartheta').$$

La forme analytique du système (Σ) (régulier dans le domaine de $\varrho = 0$, ce point seulement excepté) permet aisément de conclure que, sur toute trajectoire Σ, ϑ et ϑ' sont nécessairement des fonctions holomorphes de ϱ, tant que ϱ est > 0 (et assez petit). Pour ϱ convergent à zéro, on ne sait rien *a priori*, sinon que $\varrho^3\vartheta'$ *reste fini* (ce qui est indispensable pour la réalité de H). Mais on démontre successivement:

1) D'après (2): la limite inférieure de H, lorsque ϱ tend vers zéro, n'est pas nulle.

2) D'après la seconde des (Σ):

$$\lim_{\varrho=0} \vartheta' = -1,$$

et, par suite,

$$\lim_{\varrho=0} H = \pm \sqrt{2\nu}.$$

3) D'après la méthode des limites: le système (Σ) admet ∞^1 intégrales $\vartheta(\varrho)$, $\vartheta'(\varrho)$, holomorphes dans le domaine $\varrho = 0$ et se réduisant respectivement, pour $\varrho = 0$: ϑ à une valeur arbitraire ϑ_0, ϑ' à -1.

4) Par une généralisation facile d'un théorème de Briot et Bouquet: il n'existe pas d'autres intégrales de (Σ) satisfaisant à la condition (3) (où il est sous-entendu que ϱ tend vers zéro le long de l'axe réel).

5) D'après l'équation $dt = dr/R = -2\varrho^2(d\varrho/H)$: en prenant pour H la détermination positive, les intégrales holomorphes susdites définissent effectivement des trajectoires Σ (prendre pour H la détermination négative reviendrait évidemment à changer t en $-t$).

En définitive, *les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps, le long desquelles P et S se choquent au bout d'un temps fini, correspondent aux ∞^1 intégrales de (Σ) holomorphes pour $\varrho = 0$ et à celles-ci seulement.*

12 Janvier 1903