XII.

SUR LES SURFACES (S) DE M. ZAREMBA [1]

« Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie »,
Cl. des Sc. math. et nat. Séance du 5 mai 1902,
pp. 263-270.

. . . .

. . . .

Dans une Note récente [2] vous avez démontré que les surfaces pour lesquelles les fonctions fondamentales de M. Poincaré peuvent être déduites de celles de M. Stekloff ou de celles de M. Le Roy, sont toutes les surfaces (S) et celles-là seulement, qui sont caractérisées par la propriété suivante:

« Désignons par A et B deux points quelconques pris sur une de « ces surfaces et par α et β les angles formés par les normales en A et B « avec les directions AB et BA: il doit exister une fonction $\psi(M)$ (non « identiquement nulle, cela va sans dire) de la position d'un point M « mobile sur la surface (S), telle que l'on ait

$$\psi(A) \cos \beta = \psi(B) \cos \alpha \tag{1}$$

« pour toutes les positions des points A et B sur la surface.

« Cette fonction ψ, lorsqu'elle existe, n'est autre chose (à un facteur « constant près) que la densité de l'électricité en équilibre sur la surface ».

J'ai tâché de me rendre compte de la nature de ces surfaces et j'ai pu reconnaître que leur classe est malheureusement très limitée.

Elles peuvent être seulement des quadriques, des cones ou des cylindres.

Les quadriques sont bien des surfaces (S). C'est ce qu'on vérifie immé-

---

[1] Extrait d'une lettre adressée par l'auteur à M. le professeur Zaremba; présenté à l'Académie, avec l'assentiment de l'auteur, par M. C. Żorawski m. c..

[2] Voir ce « Bulletin », Séance du 7 janvier 1902.

diatement, d'après votre remarque, en prenant pour ψ l'expression bien connue de la densité de l'électricité en équilibre sur une surface du second ordre.

Quant aux cônes et aux cylindres, ils ne sont pas des surfaces (S), en général, mais seulement sous une certaine condition (même très restrictive). Je n'ai pas poussé le calcul assez loin pour interpréter géométriquement cette condition.

Voici comment je justifie mes assertions.

Soient x, y, z; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées de A et de B; ψ, X, Y, Z; $\psi + \Delta\psi$, $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$, $Z + \Delta Z$ les valeurs de la fonction ψ et des cosinus directeurs de la normale en A et en B.

En désignant par Σ une somme de termes semblables en x, y, z, nous avons

$$\cos\alpha = \frac{1}{AB}\sum X\Delta x\,, \qquad \cos\beta = -\frac{1}{AB}\sum (X + \Delta X)\Delta x\,,$$

et l'équation (W) peut s'écrire

$$(1') \qquad \psi\sum(2X + \Delta X)\Delta x + \Delta\psi\sum X\Delta x = 0.$$

Supposons que l'on ait tracé sur la surface une courbe quelconque joignant les points A et B. Sois s un paramètre quelconque qui fixe la position des points sur la courbe; s étant justement la valeur de ce paramètre au point B, 0 sa valeur en A.

En appliquant aux fonctions x, X et ψ le développement de Mac-Laurin, il vient

$$\left|\begin{aligned} \Delta x &= \frac{dx}{ds}\,s + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\,s^2 + \frac{1}{3\,!}\frac{d^3x}{ds^3}\,s^3 + \dots\,, \\ \Delta X &= \frac{dX}{ds}\,s + \frac{1}{2}\,\frac{d^2X}{ds^2}\,s^2 + \dots\,, \\ \Delta\psi &= \frac{d\psi}{ds}\,s + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\psi}{ds^2}\,s^2 + \dots\,. \end{aligned}\right.$$

Si nous introduisons ces développements dans (1′), les coefficients de s et de s^2 s'annulent, car on a bien

$$\sum X\frac{dx}{ds} = 0\,,$$

et par suite

$$\sum \frac{dX}{ds}\frac{dx}{ds} = -\sum X \frac{d^2x}{ds^2}. \tag{2}$$

En exprimant que le coefficient de s^3 doit aussi s'annuler, on trouve

$$\psi\left\{\frac{1}{3}\sum X\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{2}\sum\frac{dX}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum\frac{d^2X}{ds^2}\frac{dx}{ds}\right\} + \frac{1}{2}\frac{d\psi}{ds}\sum X\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

d'où, en remplaçant $\sum X(d^3x/ds^3)$ par sa valeur, tirée de (2), à savoir

$$-2\sum\frac{dX}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \sum\frac{d^2X}{ds^2}\frac{dx}{ds},$$

nous avons

$$\sum\left(\frac{dX}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{d^2X}{ds^2}\right) = 3\,\frac{d\log\psi}{ds}\sum X\frac{d^2x}{ds^2}. \tag{3}$$

Cette relation doit être satisfaite en tout point et pour toute courbe d'une surface (S).

Supposons en particulier que la courbe soit une asymptotique. On aura, d'après la définition de ces courbes,

$$\sum\frac{dX}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \tag{4}$$

ou bien, à cause de (2),

$$\sum X\frac{d^2x}{ds^2} = 0. \tag{4'}$$

Le second membre de (3) s'annule donc pour toute asymptotique. D'ailleurs on a encore pour ces courbes

$$\sum\frac{d^2X}{ds^2}\frac{dx}{ds} + \sum\frac{dX}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = 0;$$

l'égalité (3) se réduit par suite à

$$\sum\frac{dX}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = 0. \tag{5}$$

Supposons d'abord que la surface (réelle) envisagée ne soit ni développable, ni sphérique.

Il n'est pas possible dans ce cas que les deux formes quadratiques binaires, relatives à notre surface, $\sum dx^2$, $\sum dX\,dx$, aient des facteurs communs ([3]). Les asymptotiques ne sont donc pas (même lorsqu'elles sont imaginaires) des lignes de longueur nulle.

D'après cela, il est loisible, pour une asymptotique quelconque (qu'elle soit réelle ou imaginaire), de supposer le paramètre s choisi de sorte que l'on ait

$$\sum \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1\,,$$

et par suite

$$\sum \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0\,.$$

On a alors à la fois, d'après (4′) et (5),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0\,, \\ &\sum X\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0\,, \\ &\sum \frac{dX}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte de ce que

$$\sum X^2 = 1\,, \qquad \sum \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1\,;$$

$$\sum X\,\frac{dX}{ds} = 0\,, \qquad \sum \frac{dX}{ds}\,\frac{dx}{ds} = 0\,, \qquad \sum \frac{dx}{ds}\,X = 0\,,$$

on trouve immédiatement que le carré du déterminant des coefficients du système (6) a pour valeur

$$\frac{\sum dX^2}{ds^2}\,,$$

([3]) En effet, les deux formes étant réelles et la première ayant ses deux facteurs imaginaires conjugués, la seconde devrait les admettre tous deux. Elle serait alors proportionnelle à la première, ce qui arrive seulement pour le plan et pour la sphère. Voyez par exemple L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, chap. IV, pag. 92; [2e édit.; vol. I, p. 121].

expression qui ne s'annule ni en général, ni pour les asymptotiques. En effet, comme il ne s'agit pas d'une surface développable, $\sum dX^2$ est une forme définie et elle ne peut pas avoir de facteurs communs avec $\sum dX\,dx$ [4], à moins que la surface ne fut une sphère, ce que nous avons également exclu.

Les équations (6) exigent par conséquent que l'on ait, pour toute asymptotique de la surface,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0\,, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = 0\,, \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Les asymptotiques sont donc des droites. Mais, la surface n'étant pas développable, elle contient un double système d'asymptotiques. Donc elle est doublement réglée, c'est-à-dire une quadrique.

La sphère étant elle-même une quadrique, il n' y a pas, en dehors des quadriques, de surfaces (S) non développables.

Venons maintenant au cas où l'on aurait affaire à une surface (S) développable.

Permettez que je commence par établir quelques formules, auxquelles il me faudra avoir recours dans un moment.

Je rappelle d'abord que, pour toute surface réglée, les coordonnées x, y, z peuvent être définies en fonction de deux paramètres u, v par les trois équations

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 u + a_1\,, \\ y = \beta_1 u + b_1\,, \\ z = \gamma_1 u + c_1\,, \end{cases}$$

où $\alpha_1, a_1, \ldots, c_1$ désignent des fonctions de la seule variable v.

La surface étant réelle, il est encore loisible (par un choix convenable des paramètres u et v) de supposer

$$\text{(8)} \qquad \sum \alpha_1^2 = 1, \qquad \sum a_1'^2 = 1, \qquad \sum \alpha_1 a_1' = 0\,.$$

---

(4) C'est ce qui résulte de l'identité

$$\sum dX^2 = K \sum dx^2 + H \sum dX\,dx\,,$$

où K et H désignent respectivement la courbure totale et la courbure moyenne de la surface (Bianchi, loco citato, pag. 116: [2^e édit., vol. I, p. 149]).

En effet tout facteur commun aux deux formes $\sum dX^2, \equiv dXdx$ appartiendrait aussi (des que $K \gtrless 0$) à la forme $\sum dx^2$, tandis que, comme on vient de remarquer, $\sum dx^2$, $\sum dXx$ n'ont pas de facteurs communs.

Le signe $\sum$ représente toujours une somme de termes semblables en α, β, γ; a, b, c; ou, comme tout à l'heure, en x, y, z; X, Y, Z. Les accents dénotent des dérivations par rapport à v.

Il est bien clair que les génératrices rectilignes de la surface (7) correspondent aux lignes $v = \text{const.}$

Les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale sont définis par les équations

$$\sum X^2 = 1, \qquad \sum X\alpha_1 = 0, \qquad \sum X(\alpha_1' u + a_1') = 0\,.$$

Dire qu'une surface est développable, c'est dire que le plan tangent reste le même tout le long d'une même génératrice, ou, si l'on veut, que X, Y, Z ne dépendent pas de u. Il faut pour cela (et il suffit) que, en entendant désormais par X, Y, Z des fonctions de v seulement, on ait à la fois

$$\sum X^2 = 1, \qquad \sum X\alpha_1 = 0, \qquad \sum X a_1' = 0; \tag{9}$$

$$\sum X\alpha_1' = 0\,. \tag{10}$$

Posons pour plus de symétrie

$$\left\{\begin{array}{lll} a_1' = \beta_2, & b_1' = \beta_2, & c_1' = \gamma_2\,, \\ X = \alpha_3, & Y = \beta_3, & Z = \gamma_3\,. \end{array}\right. \tag{11}$$

Les équations (8) et (9) expriment simplement que

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3; \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3; \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{array}$$

sont les cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle. Leurs dérivées par rapport à v pourront donc s'exprimer toutes au moyen de trois fonctions auxiliaires p, q, r, par les formules classiques de POISSON.

L'équation (10) n'est autre chose que $q = 0$. On a de la sorte

$$\alpha_1' = \alpha_2 r, \qquad \alpha_2' = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \qquad \alpha_3' = -\alpha_2 p \tag{12}$$

avec les autres semblables en β et γ.

Ceci posé, la différentiation des (7) nous donne

$$dx = \alpha_1\, du + \alpha_2(ru+1)\, dv, \quad \text{etc.};$$

$$d^2x = \left[2\alpha_2 r\, du + \{(\alpha_3 p - \alpha_1 r)(ru+1) + \alpha_2 r'u\}\, dv\right] dv, \quad \text{etc.}$$

On trouve de même, d'après les conventions (11),

$$dX = -\alpha_2 p\, dv, \quad \text{etc.};$$

$$d^2X = -\{(\alpha_3 p - \alpha_1 r)p + \alpha_2 p'\}\, dv^2, \quad \text{etc.}$$

d'où, à cause des relations d'orthogonalité,

$$\sum X\, d^2x = p(ru+1)\, dv^2,$$

$$\sum dX\, d^2x = -\{2pr\, du + pr'u\, dv\}\, dv^2,$$

$$\sum d^2X\, dx = \{pr\, du + p'(ru+1)\, dv\}\, dv^2.$$

Après ces remarques préliminaires, nous allons reprendre l'équation (3). Comme elle doit être vérifiée pour toute ligne de la surface, elle équivaut à

$$\sum (dX\, d^2x - d^2X\, dx) = 3d \log \psi \sum X\, d^2x.$$

Les formules qu'on vient d'écrire montrent que, pour les surfaces développables, cette condition se réduit à

$$d \log \psi = -\frac{r}{ru+1}\, du - \tfrac{1}{3}\left\{\frac{r'u}{ru+1} + \frac{p'}{p}\right\} dv \tag{13}$$

$$= -\tfrac{1}{3} d \log p(ru+1) - \tfrac{2}{3}\frac{r}{ru+1}\, du.$$

Elle exige que le second membre soit une différentielle exacte et par suite que r *soit une constante*.

Il est aisé d'en apercevoir la signification géométrique.

En effet, ou bien $r = 0$.

La première des (12) avec ses analogues exprime alors que

$$\alpha'_1 = \beta'_1 = \gamma'_1 = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (7), que les génératrices rectilignes de notre surface sont toutes parallèles.

La surface est alors un cylindre.

Ou bien $r \gtrless 0$.

La comparaison des relations

$$\alpha'_1 = \alpha_2 r\,, \quad \beta'_1 = \beta_2 r, \quad \gamma'_1 = \gamma_2 r\,,$$

avec

$$a'_1 = \alpha_2\,, \quad b'_1 = \beta_2\,, \quad c'_1 = \gamma_2\,,$$

donne

$$a'_1 = \frac{\alpha'_1}{r}\,, \quad b'_1 = \frac{\beta'_1}{r}\,, \quad c'_1 = \frac{\gamma'_1}{r}{}_2$$

d'où (x_0, y_0, z_0 étant des constantes)

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{r} + x_0, \qquad b_1 = \frac{\beta_1}{r} + y_0, \qquad c_1 = \frac{\gamma_1}{r} + z_0\,.$$

Les (7) définissent dans ce cas un cône ayant son sommet au point x_0, y_0, z_0.

Il résulte de là que les surfaces (S) développables ne peuvent être que des cônes ou des cylindres. Ici toutefois la réciproque n'est plus vraie en général, mais seulemen. dans le cas, évidemment très particulier, où la fonction ψ, définie par l'équation (13), coinciderait avec la densité de l'électricité en équilibre.

Je pense avec vous qu'ici encore on ne trouverait que des surfaces du second degré.

. . . .

. . . .

Padoue, le 29 Avril 1902.