XI.

SULLA CINETOSTATICA

« Atti Acc. Padova », vol. XVIII, Dispensa III (1902), pp. 1-8.

Ha spesso interesse dal punto di vista tecnico la determinazione delle reazioni, che, per effetto di dati legami, si esercitano sopra un sistema materiale in quiete, o più generalmente in dato stato di movimento. Le reazioni misurano infatti — cambiate solo di senso — i cimenti (statici o dinamici) cui sottostanno i congegni materiali realizzanti i vincoli; ed un esatto apprezzamento dei cimenti massimi è indispensabile per stabilire e discutere le condizioni, sotto cui un dato congegno può rispondere al suo ufficio senza pericolo di guasti.

In questo intento si svolse recentemente una trattazione teorica (*cinetostatica*) [1], i cui fondamenti sono impliciti nei canoni della meccanica pura e si possono anzi riattaccare nel modo il più diretto al classico principio dei lavori virtuali.

Tuttavia, nella letteratura scolastica, si suol tacerne o accennarvi appena di sfuggita (a proposito dei moltiplicatori di LAGRANGE).

Ciò mi induce a pubblicare (con piccole modificazioni e omettendo per brevità gli esempî) quanto ebbi a dire sull'argomento nel corso di meccanica razionale della R. Università di Padova.

1. – Generalità.

Designino x, y, z le coordinate di un punto generico P di un sistema materiale comunque vincolato; m la massa; X, Y, Z le componenti della

[1] Cfr. principalmente: K. HEUN, *Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung » IX, 2, 1901, §§ 18, 19; *Ueber Hertzsche Mechanik*, « Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. », I, 1, 1902.

forza attiva (F) applicata in P; Ξ, H, Z le componenti della reazione (Φ) dovuta ai legami.

Sarà $(F) + (\Phi)$ la forza totale, che sollecita P, e per conseguenza (supposti fissi gli assi)

$$mx'' = X + \Xi ,$$
$$my'' = Y + H ,$$
$$mz'' = \mathcal{Z} + Z .$$

Si vede che le reazioni dovute ai legami rimangono univocamente determinate, in ogni punto e in ogni istante, quando sono noti il movimento e le forze attive.

Sieno

$$\sum (A_h \delta x + B_h \delta y + C_h \delta z) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{1}$$

le equazioni (indipendenti) che caratterizzano gli spostamenti virtuali del sistema. (Naturalmente tanti sono i vincoli — olonomi oppure anolonomi — indipendenti, quante le equazioni (1): μ nel caso nostro).

In base al principio dei lavori virtuali, alle Ξ, H, Z, si può, e in un sol modo, attribuire la forma

$$\left\{ \begin{aligned} \Xi &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_\mu A_\mu , \\ H &= \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_\mu B_\mu , \\ Z &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\mu C_\mu , \end{aligned} \right. \tag{2}$$

con che rimane messo in evidenza il contributo recato alle reazioni da ciascuno dei legami del sistema.

Fissiamone alcuni, gli ultimi $\mu - \nu$ per es., e prendiamo a considerare la reazione in P, ad essi dovuta, di componenti

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \lambda_{\nu+1} A_{\nu+1} + \ldots + \lambda_\mu A_\mu , \\ \mathfrak{Y} &= \lambda_{\nu+1} B_{\nu+1} + \ldots + \lambda_\mu B_\mu , \\ \mathfrak{Z} &= \lambda_{\nu+1} C_{\nu+1} + \ldots + \lambda_\mu C_\mu . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Sieno δx, δy, δz le componenti di uno spostamento del nostro sistema conciliabile coi primi ν legami (ed eventualmente non coi rimanenti $\mu - \nu$).

Le δx, δy, δz soddisfacendo, per loro definizione, alle equazioni

$$\sum (A_h \delta x + B_h \delta y + C_h \delta z) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu),$$

le (2) e (3) danno ovviamente

$$\sum (\Xi\,\delta x + H\,\delta y + Z\,\delta z) = \sum (\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z)\,.$$

Sostituiamo nel primo membro, al posto di Ξ, H, Z, i loro valori $-(X - mx'')$, $-(Y - my'')$, $-(Z - mz'')$, e ne ricaveremo la relazione simbolica

$$\sum (\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z) = -\sum \{(X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z\}\,, \tag{4}$$

la quale costituisce un punto di partenza assai comodo per la effettiva determinazione delle reazioni, nella forma che meglio conviene ai casi singoli.

2. - Osservazione concernente i così detti sistemi staticamente indeterminati.

Dalle cose dette risulta che, per ogni vincolo, sono univocamente determinate le reazioni corrispondenti. Ma, si noti bene, ciò presuppone essenzialmente che le equazioni (1), e quindi i vincoli del sistema considerato, sieno tra loro indipendenti.

Dal punto di vista analitico si può sempre ricondursi a questo caso, sopprimendo senz'altro quelle tra le equazioni dei legami, che fossero sovrabbondanti.

Nella realtà fisica le cose vanno diversamente: si incontrano spesso vincoli sovrabbondanti (esempio classico, quello di un corpo che si appoggia sopra un piano per più di tre punti) e il sopprimerne alcuno con criterio arbitrario, in modo da ricondursi a un sistema staticamente determinato, non risponde in generale alle condizioni di fatto.

Come è ben noto, la questione si può risolvere in modo soddisfacente, solo uscendo dall'ambito dei vincoli rigidi e ricorrendo alla teoria dell'elasticità ([2]).

3. - Cinetostatica dei sistemi rigidi.

Particolarmente importante per le applicazioni tecniche è il calcolo delle reazioni, che si esercitano in una generica porzione rigida C di un dato sistema S (in un pezzo di macchina per es.) in causa dei vincoli

([2]) Cfr. in particolare: A. Castigliano, *Théorie des systèmes élastiques*, Torino, 1879 capitoli I, II; F. Siacci, *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 5ª, vol. III, 1894.

materiali (appoggi, attacchi, incastri, assi, perni), che stabiliscono il collegamento di C colle altre parti del sistema.

In questo genere di questioni non è di solito necessario individuare la distribuzione delle reazioni nei singoli punti della porzione considerata C (il che in generale incappa nelle difficoltà accennate al precedente paragrafo), ma basta conoscerne l'effetto complessivo, che è, come nella statica, caratterizzato dalla risultante $(\mathfrak{R})$ e dal momento risultante $(\mathfrak{M})$, rispetto a un generico centro di riduzione.

Sceglieremo per semplicità l'origine O del sistema coordinato x, y, z.

Ecco come si può procedere per determinare i due vettori $(\mathfrak{R})$ ed $(\mathfrak{M})$.

Supponiamo che il primo membro della (4) contempli le reazioni dovute ai soli vincoli del pezzo C, rimossi i quali, C si comporterebbe con un solido libero. In questa condizione di cose la (4) stessa sussiste certamente per tutti gli spostamenti che lasciano fermi i punti P di S, non appartenenti a C, e operano rigidamente sui punti di C.

Supponendo δx, δy, δz scelti a questo modo, la (4) si presenta come l'equazione simbolica del moto del corpo rigido C, soggetto alle forze attive e a quelle tali reazioni, di cui vogliamo appunto valutare la risultante $(\mathfrak{R})$ e il momento risultante $(\mathfrak{M})$.

Ne conseguono, come è ben noto, le sei equazioni

$$\mathfrak{R}_x = \frac{dH_x}{dt} - R_x, \quad \text{ecc.}; \tag{5}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{dG_x}{dt} - M_x, \quad \text{ecc.}; \tag{6}$$

dove designiamo con (H) e (G) la risultante e il momento risultante delle quantità di moto dei punti del corpo C, rispetto all'origine O; con (R) ed (M) la risultante e il momento risultante delle forze attive.

È chiaro che le (5) e (6) si possono rispettivamente compendiare nelle relazioni vettoriali

$$(\mathfrak{R}) = \frac{d(H)}{dt} - (R), \tag{5'}$$

$$(\mathfrak{M}) = \frac{d(G)}{dt} - (M). \tag{6'}$$

Per l'effettivo calcolo delle componenti dei due vettori $(\mathfrak{R})$ e $(\mathfrak{M})$ può essere spesso conveniente di riferirsi ad assi solidali col corpo C. Non valgono allora le (5), (6), che presuppongono gli assi fissi; le espressioni delle componenti si ricavano però agevolmente (con artificio spesso usato) dalle (5′), (6′), che sono indipendenti dal sistema di riferimento.

Immaginiamo a questo scopo, accanto agli assi $Oxyz$, che vogliamo ora ritenere rigidamente collegati con C, un secondo sistema ξ, η, ζ di direzione invariabile, ma coll'origine nello stesso punto, in generale mobile, O.

Sia Q l'estremo del vettore (H), supposto applicato in O. Le coordinate di Q, rispetto ai nostri due sistemi di assi, altro non sono se non le componenti di (H).

Rispetto agli assi ξ, η, ζ, che hanno direzione invariabile, le componenti del vettore $d(H)/dt$ sono, per definizione,

$$\frac{dH_\xi}{dt}, \qquad \frac{dH_\eta}{dt}, \qquad \frac{dH_\zeta}{dt}.$$

Il vettore $d(H)/dt$ si può dunque interpretare come la velocità di Q rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$.

Ciò posto, per il teorema di Coriolis, le componenti dello stesso vettore $d(H)/dt$, rispetto agli assi $Oxyz$ solidali con C, saranno

$$\frac{dH_x}{dt} - rH_y + qH_z, \qquad \frac{dH_y}{dt} - pH_z + rH_x, \qquad \frac{dH_z}{dt} - qH_x + pH_y,$$

rappresentandosi al solito con p, q, r le componenti della velocità angolare del triedro $Oxyz$.

Analoghe espressioni valgono naturalmente per le componenti di $d(G)/dt$.

Dopo ciò le (5′) e (6′), proiettando sugli assi x, y, z, danno le formule cercate:

$$(5'') \qquad \mathfrak{R}_x = \frac{dH_x}{dt} - rH_y + qH_z - R_x, \qquad \text{ecc.}$$

$$(6'') \qquad \mathfrak{M}_x = \frac{dG_x}{dt} - rG_y + qG_z - M_x, \qquad \text{ecc.}$$