X.

LA TEORIA ELETTRODINAMICA DI HERTZ DI FRONTE AI FENOMENI DI INDUZIONE (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XI, (2° sem., 1902), pp. 75-81.

Nel risolvere due particolari questioni di induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di HELMHOLTZ-HERTZ, ho incidentalmente asserito (¹) che alla teoria hertziana pura manca qualche elemento (due condizioni ai limiti) perchè quelle questioni, e così il problema generale dell'induzione elettrodinamica, risultino matematicamente determinati.

Mi affretto a dichiarare che una tale affermazione è inesatta.

Un più maturo esame mi ha infatti mostrato che le condizioni in superficie scaturiscono ovviamente da un passaggio al limite, che è nello spirito della teoria di HERTZ.

Nella presente Nota metto in chiaro questo punto, desumendone la univoca determinazione del problema generale dell'induzione elettrodinamica entro l'àmbito della teoria hertziana pura.

Ne consegue l'identità delle teorie integrali di HELMHOLTZ-HERTZ e di MAXWELL di fronte ai fenomeni di induzione: l'una e l'altra si accordano infatti nel campo abbracciato dalle equazioni differenziali di HERTZ.

Che le teorie di HELMHOLTZ-HERTZ e di MAXWELL conducessero ai medesimi risultati, per quanto concerne l'accennata classe di problemi, avevo già avvertito a proposito delle due particolari questioni da me discusse; ma io supponevo allora che si trattasse di un campo, comune bensì alle due teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nelle equazioni differenziali di HERTZ. È invece proprio questa la ragion vera della coincidenza.

(*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI.

(¹) *Sur le champ électromagnétique* etc., « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », ser. III, t. IV, 1902, pag. 6-7 [in questo vol., pp. 154-155]; *Influenza di uno schermo conduttore*, ecc., in questi « Rendiconti », Nota I del 16 febbraio u. s., pag. 164-165; [in questo vol., pp. 218-219]; nonchè « Nuovo Cimento », fascicolo di giugno, § 7 della notizia ivi inserita.

www.rcin.org.pl

A rigore si potrebbe dunque fare a meno delle teorie integrali, anche per quanto attiene ai fenomeni di induzione. Ma non è, a mio credere, opportuno, relegarle senz'altro tra i ferrivecchi, poichè nelle applicazioni particolari (e le due sopra ricordate ne sono esempio), si può spesso valersene con notevole vantaggio per semplificare la trattazione matematica.

1. - Comportamento delle forze elettromagnetiche. nell'attraversare una superficie conduttrice.

Sia τ uno strato conduttore di spessore finito $2h$, limitato da due piani paralleli $z = -h$, $z = h$; siano Q_1 e Q_2 due punti di questi piani, situati sopra una medesima perpendicolare ad entrambi.

Designino, colle solite notazioni, X, Y, Z; L, M, N le componenti delle forze elettrica e magnetica in un generico punto Q dello strato conduttore τ; $X_1, \dots, N_1$; $X_2, \dots, N_2$ i loro valori limiti in Q_1 e Q_2 rispettivamente (supposto, beninteso, che Q vi tenda senza uscire da τ).

Ritenuto che τ sia un conduttore isotropo, e dette ε, μ, λ le sue costanti caratteristiche, saranno soddisfatte entro τ le equazioni fondamentali di Hertz

$$\left\{\begin{aligned} A\mu \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A\varepsilon \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ, \end{aligned}\right.$$

dove, come di consueto, si rappresenta con A la inversa della velocità della luce nell'etere.

Dalle prime due di ciascun gruppo, integrando rispetto a z fra $-h$

www.rcin.org.pl

e h, si ottiene

$$(1) \qquad \begin{cases} X_2 - X_1 = \dots, \\ Y_2 - Y_1 = \dots; \end{cases}$$

$$\left| \begin{aligned} L_2 - L_1 &= -4\pi A \int_{-h}^{h} \lambda Y \, dz + \dots, \\ M_2 - M_1 &= 4\pi A \int_{-h}^{h} \lambda X \, dz + \dots, \end{aligned} \right.$$

nelle quali i termini omessi convergono a zero con h, sempreché, come è nella natura delle cose, si ritengano le forze elettromagnetiche e loro derivate prime finite entro τ, e dotate di limite superiore finito, anche al decrescere indefinito dello spessore h.

Il caso limite di una superficie (piana) conduttrice si ha dal nostro strato τ, supponendo che, al decrescere indefinito di h, sia finito e diverso da zero il limite dell'integrale $\int_{-h}^{h} \lambda \, dz$. Designando questo limite con $1/A^2R$, A^2R starà a rappresentare la resistenza unitaria della superficie, espressa in unità elettrostatiche, e quindi R la stessa resistenza unitaria, valutata in unità elettromagnetiche.

Per definizione, X_1 e Y_1 sono i valori limiti in Q_1 delle componenti tangenziali della forza elettrica, quando si tende a Q_1 da τ; ma, attesa la continuità delle componenti tangenziali, nel passaggio, anche brusco, fra due generici mezzi ([2]), è lecito altresí risguardare X_1, Y_1 come i valori limiti in Q_1, quando vi si tende dall'esterno dello strato. Lo stesso per L_1, M_1, e per X_2, Y_2; L_2, M_2 rispetto a Q_2.

Ciò posto, passando al limite per $h = 0$, ricaviamo dalle (1):

$$X_1 = X_2, \qquad Y_1 = Y_2,$$

le quali esprimono che:

Le componenti tangenziali della forza elettrica rimangono continue anche attraverso superficie conduttrici.

Ho enunciato addirittura la proposizione per una superficie qualunque, poichè la generalizzazione dal caso del piano si fa con procedimento ovvio e ben noto.

([2]) HERTZ, *Ueber die Grundgleichungen der elektrodynamik für ruhende Körper*, « Ges. Werke », B. II, p. 221; ovvero, in traduzione italiana, « Nuovo Cimento », terza serie, t. XXVIII, 1890, pag. 204-205.

www.rcin.org.pl

Designando con X, Y i valori comuni di X_1, X_2; Y_1, Y_2, le (2), al limite, danno:

$$\left\{\begin{aligned} L_2 - L_1 &= -\frac{4\pi}{AR}Y, \\ M_2 - M_1 &= \frac{4\pi}{AR}X, \end{aligned}\right.$$

le quali esprimono che *la forza magnetica tangenziale subisce una brusca variazione, definita da un vettore proporzionale alla forza elettrica e diretto normalmente ad essa.*

Importa osservare che, dalla direzione della forza elettrica a quella del vettore rappresentante la discontinuità, si ruota attorno all'asse z nel verso (negativo) yx.

Dopo ciò si passa senza difficoltà al caso di una superficie conduttrice qualsiasi.

Detti infatti α, β, γ i coseni direttori della normale in un suo punto generico Q; $X^{(T)}$, $Y^{(T)}$, $Z^{(T)}$ le componenti della forza elettrica tangenziale in Q (che, per quanto s'è visto, hanno in Q valore limite determinato, da qualunque parte vi si tenda); $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ gli incrementi bruschi, che subiscono le componenti della forza magnetica tangenziale, quando si attraversa la superficie nella direzione positiva della normale, la relazione geometrica, testè sostanzialmente enunciata, fra i due vettori $(X^{(T)}, Y^{(T)}, Z^{(T)})$, $(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, si esprime mediante le formule:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} &= \frac{4\pi}{AR}(\beta Z^{(T)} - \gamma Y^{(T)}), \\ \boldsymbol{M} &= \frac{4\pi}{AR}(\gamma X^{(T)} - \alpha Z^{(T)}), \\ \boldsymbol{N} &= \frac{4\pi}{AR}(\alpha Y^{(T)} - \beta X^{(T)}). \end{aligned}\right.$$

Sarebbe facile caratterizzare anche il comportamento delle componenti normali. Lascio però di farlo, perchè, come vedremo, non è necessario, per lo scopo nostro, fissarlo a priori: esso rimane all'incontro necessariamente determinato dagli altri dati del problema.

www.rcin.org.pl

2. - Posizione del problema generale della induzione elettrodinamica. Sua univocità.

Consideriamo un campo elettromagnetico, definito in un dato intervallo di tempo t_0, t_1.

Sieno X', Y', Z' le componenti della forza elettrica; L', M', N' le componenti della forza magnetica.

Supposto, per fissar le idee, che la sede del campo sia un dielettrico indefinito S, impolarizzabile e in quiete, $X', \dots, N'$ saranno soluzioni del sistema

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\
A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\
A\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{(II)} \quad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\
A\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\
A\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx},
\end{aligned}
\right.
$$

le quali potranno del resto presentare singolarità (fisse o variabili con t, isolate, a una, a due, o anche a tre dimensioni), che non interessa di specificare.

Se si introducono nel campo dei conduttori, il campo rimane evidentemente modificato.

Supponiamo si tratti di una superficie, o, più in generale, di un sistema di superficie conduttrici, σ, non comprendenti alcun posto singolare delle $X', \dots, N'$. Indichiamo con X, Y, Z; L, M, N le componenti delle forze elettromagnetiche del campo così modificato.

Mi propongo di far vedere che, noti i valori di $X, \dots, N$ in un istante t_0, la teoria di Hertz basta a determinarli per ogni altro valore di t (dell'intervallo, entro cui si risguarda assegnato il campo induttore $X', \dots, N'$).

www.rcin.org.pl

A questo scopo osservo anzitutto che le differenze

$$X_1 = X - X', \qquad Y_1 = Y - Y', \qquad Z_1 = Z - Z';$$

$$L_1 = L - L', \qquad M_1 = M - M', \qquad N_1 = N - N'$$

(componenti delle forze elettromagnetiche dovute all'induzione) debbono essere, per natura loro, soluzioni delle (I), (II), regolari ([3]) in ogni punto dello spazio, non appartenenti alle σ, e nulle all'infinito come $1/r$ almeno ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

In un generico punto Q di σ, le $X', \ldots, N'$ si comportano, per ipotesi, regolarmente; le $X, \ldots, N$ debbono presentare i caratteri, rilevati nel precedente paragrafo.

Potremo dunque ritenere, per le differenze $X_1, \ldots, N_1$:

a) Le componenti $X^{(T)}$, $Y^{(T)}$, $Z^{(T)}$ della forza elettrica tangenziale (di origine induttiva) rimangono continue anche attraverso le σ.

b) Le componenti della forza magnetica tangenziale (indotta) subiscono, quando si attraversano le σ nel senso della normale positiva, le discontinuità:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Lambda_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\beta Z^{(T)} - \gamma Y^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\beta Z_1^{(T)} - \gamma Y_1^{(T)}) + c_1\,, \\[2ex] M_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\gamma X^{(T)} - \alpha Z^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\gamma X_1^{(T)} - \alpha Z_1^{(T)}) + c_2\,, \\[2ex] N_1 = \dfrac{4\pi}{AR}(\alpha Y^{(T)} - \beta X^{(T)}) = \dfrac{4\pi}{AR}(\alpha Y_1^{(T)} - \beta X_1^{(T)}) + c_3\,, \end{cases}$$

designandosi ordinatamente con c_1, c_2, c_3 le quantità cognite (funzioni regolari dei punti di σ)

$$\frac{4\pi}{AR}(\beta Z'^{(T)} - \gamma Y'^{(T)})\,,$$

$$\frac{4\pi}{AR}(\gamma X'^{(T)} - \alpha Z'^{(T)})\,,$$

$$\frac{4\pi}{AR}(\alpha Y'^{(T)} - \beta X'^{(T)}).$$

La direzione positiva α, β, γ della normale si intende scelta con criterio arbitrario in un punto di ciascuno dei pezzi, di cui si compone il

([3]) Si chiama qui regolare una funzione di x, y, z, t finita e continua assieme alle sue derivate prime e seconde.

www.rcin.org.pl

sistema σ (in un punto solo, nel caso tipico di un'unica superficie): essa resta allora fissata per continuità in ogni altro punto Q.

Ancora, si osserva che, se $X_1^+, \ldots, N_1^+$ rappresentano i valori limiti delle componenti $X_1, \ldots, N_1$, quando si tende a Q dalla regione positiva (quella verso cui è rivolta la direzione positiva della normale); $X_1^-, \ldots, N_1^-$ gli analoghi valori limiti, quando si tende a Q dalla regione negativa, sussiste l'identità

$$\begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{N}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

Per verificarlo, basta tener presente che le differenze $X_1^+ - X_1^{(T)}$, $Y_1^+ - Y_1^{(T)}$, $Z_1^+ - Z_1^{(T)}$, e le tre analoghe $X_1^- - X_1^{(T)}$, ecc., sono proporzionali ad α, β, γ, talchè è lecito, nei due determinanti nel primo membro sostituire $X_1^{(T)}$, $Y_1^{(T)}$, $Z_1^{(T)}$ agli elementi della prima riga; sommando allora i due determinanti, trattando nello stesso modo le componenti della forza magnetica e ricordando il significato di $\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{N}_1$, risulta appunto il secondo membro.

Ciò posto, ricaviamo per le nostre componenti $X_1, \ldots, N_1$ la formula di Poynting: moltiplichiamo cioè le (I), (II) (scrittovi X_1 per X, ecc.) ordinatamente per $X_1/4\pi A$, $Y_1/4\pi A$, ..., $N_1/4\pi A$, e sommiamo, integrando a tutto il campo S. Con ovvie integrazioni per parti, in cui bisogna naturalmente aver riguardo alle superficie di discontinuità σ, posto per brevità

$$\Omega = \int_S \left\{ \frac{1}{8\pi} (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) + \frac{1}{8\pi} (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2) \right\} dS, \tag{4}$$

si ottiene

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{4\pi A} \int_\sigma \left\{ \begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} \right\} d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{4\pi A} \int_\sigma \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{N}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma.$$

www.rcin.org.pl

Integrando ancora fra t_0 e t e designando con $\mathbf{\Omega}_0$ il valore di $\mathbf{\Omega}$ per $t = t_0$, risulta

$$(5) \qquad \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0 + \frac{1}{4\pi A}\int_{t_0}^{t} dt \int_\sigma \begin{vmatrix} X_1^{(T)} & Y_1^{(T)} & Z_1^{(T)} \\ \mathbf{\Lambda}_1 & M_1 & N_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma = 0.$$

Appoggiandosi a questa identità, è facile riconoscere che non possono esistere due distinti sistemi di integrali delle (I), (II), regolari in tutto lo spazio (escluse al più le σ), nulli (come $1/r$ almeno) all'infinito, soddisfacenti sopra le σ alle due condizioni a), b), e coincidenti per $t = t_0$: in altri termini, che le differenze di due sistemi siffatti si annullano identicamente.

Infatti queste differenze costituiscono un sistema integrale delle (I), (II), che si comporta come gli altri fuori delle σ, soddisfa sopra le σ alla a) e alle (3), dove si ponga $c_1 = c_2 = c_v = 0$; infine si annulla per $t = t_0$. La (5) assume allora l'aspetto

$$\mathbf{\Omega} + \frac{1}{A^2 R}\int_{t_0}^{t} dt \int_\sigma (\mathbf{\Lambda}_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\, d\sigma = 0.$$

Siccome tutti gli elementi di integrale sono positivi, questa relazione esige che sia zero separatamente ciascun elemento, il che implica l'identico annullarsi delle sei differenze. *C.d.d.*