VIII *bis.*

SUL CAMPO ELETTROMAGNETICO GENERATO DALLA TRASLAZIONE UNIFORME DI UNA CARICA ELETTRICA PARALLELAMENTE AD UN PIANO CONDUTTORE INDEFINITO (*)

« Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. VI (1903),
pp. 442-455.

Prefazione.

Le recenti esperienze dei Sig.ri Crémieu e Pender sulla convezione elettrica [1] hanno messo fuor di discussione la concomitante esistenza di un campo magnetico dell'ordine di grandezza previsto dalla teoria.

Come è ben noto, esperienze di tal fatta furono eseguite dal Rowland fin dal 1876, e già quelle eransi ritenute decisive, tanto più che, almeno qualitativamente, apparvero confermate dai risultati, ottenuti più tardi dallo stesso Rowland e da altri (Himstedt, Röntgen, Hutchinson).

Tuttavia nel 1900 il Sig. Crémieu mise in dubbio la reale esistenza dell'accennato fenomeno, non avendo, in ripetute esperienze, potuto constatare alcun sensibile effetto di deviazione magnetica.

Le pubblicazioni del Sig. Crémieu fecero naturalmente convergere l'attenzione dei fisici sopra questo punto, che è fondamentale per la concezione maxwelliana dell'elettromagnetismo.

Nell'autunno del 1901, quando più viva era la controversia e già numerosi i lavori in argomento, il Prof. Righi ne intrattenne la Società fisica italiana [2], descrivendo le esperienze fino allora eseguite e mettendone in evidenza con mirabile limpidezza e acume critico i punti deboli o dubbi. Fra questi ultimi egli annoverò i possibili effetti di un artifizio, cui tutti, o quasi tutti, gli sperimentatori erano ricorsi, senza discuterne in alcun modo la portata.

(*) I primi due Capitoli di questa Memoria e il primo paragrafo del terzo non sono che la traduzione pressochè letterale delle corrispondenti parti della Memoria precedente. Si è perciò ritenuto di dover qui pubblicare soltanto la Prefazione (che, pur non differendo sostanzialmente da quella della Memoria VIII, contiene qualche maggiore precisazione) e i nn. 16-21, che costituiscono un effettivo complemento a codesta Memoria. [N.d.R.].

[1] « Journal de Physique », settembre 1903.

[2] « Nuovo Cimento », ottobre 1901.

Si tratta dell'impiego di uno schermo conduttore per sottrarre l'ago magnetico all'azione elettrica delle masse in convezione.

È chiaro — così osservava il Prof. RIGHI — che un diaframma metallico di conducibilità finita non può arrestare le azioni magnetiche, ma esso esercita senza dubbio una qualche influenza, che non si ha il diritto di trascurare. Disgraziatamente non siamo in grado di apprezzare questa influenza, come sarebbe necessario per una discussione rigorosa dei risultati sperimentali. I cultori della fisica matematica, potrebbero provvedere a questa mancanza, dandoci, non foss'altro, il campo elettromagnetico, prodotto, al di là di un piano conduttore indefinito, da una carica, che si muove con velocità costante sopra una retta parallela al piano.

L'appello del Prof. RIGHI mi invogliò a studiare il problema, e potei poco dopo comunicargliene la soluzione, dei cui risultati egli si è valso per confermare e completare le sue considerazioni critiche ([3]). La mia ricerca è stata già esposta in extenso negli « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse » (ser. III, t. IV, 1902), ma il cortese invito della Direzione di questo giornale mi induce a pubblicarne ora una redazione italiana.

I due primi capitoli non differiscono, si può dire, dalla precedente redazione se non per la lingua; nel terzo capitolo ho invece introdotta qualche semplificazione, sacrificando la integrazione rigorosa delle equazioni differenziali e ricavando direttamente le espressioni approssimate, che sole hanno interesse fisico e meglio si prestano alla interpretazione dei risultati.

In tesi generale è preferibile, per poter fissare in modo preciso il grado di approssimazione, integrare rigorosamente prima e semplificare poi, avendo riguardo all'ordine di grandezza dei dati della questione. Però, introducendo le approssimazioni addirittura nelle equazioni differenziali, si ha il vantaggio di arrivare più speditamente al risultato finale. Io non ho esitato ad adottare ora questo secondo procedimento, perchè, mentre si riduce notevolmente l'apparato analitico, riesce affatto evidente (per l'estrema piccolezza del parametro, di cui si trascurano le potenze superiori alla prima) che l'errore commesso non può essere che piccolissimo.

Basta aggiungere, in linea di rigore, che la materiale verifica di tale circostanza può essere fatta procedendo nel primo modo, e trovasi effettivamente indicata nel lavoro francese.

Ciò premesso, ecco i caratteri salienti del risultato ottenuto:

Sia a il rapporto fra la velocità di convezione e quella della luce;

([3]) « Nuovo Cimento », gennaio 1902.

$30k$ la resistenza ohmica dell'unità di superficie del piano conduttore (espressa in ohm); $h = 2\pi a/k$, talchè, nelle condizioni sperimentali ordinarie, a e k sono numeri assai piccoli (dell'ordine di 10^{-6} nell'esempio citato al n. 17), mentre h è generalmente finito.

Al di là dello schermo conduttore la forza elettrica è trascurabile; la forza magnetica deriva da un potenziale (a meno di termini di secondo ordine in a) ed è press'a poco $1/(1 + \sqrt{1 + h^2})$ di quella che agirebbe, se non ci fosse lo schermo (cfr. per un enunciato più preciso il n. 19). Essa vien dunque ridotta della metà almeno, ma non potrebbe essere totalmente intercettata, al pari di quanto avviene per la forza elettrica, se non per una conduttività infinita ($k = 0$, $h = \infty$). È precisamente quello, che aveva intuito il Prof. RIGHI.

Ancora poche parole circa la posizione analitica del problema.

Come equazioni fondamentali del campo elettromagnetico ho assunto quelle, che io chiamo di HELMHOLTZ-HERTZ, le quali sono identiche nella forma alle originarie di HELMHOLTZ e ne differiscono nella sostanza soltanto per ciò che ai potenziali ordinari (traducenti la ipotesi di una propagazione istantanea delle azioni a distanza) si intendono sostituiti dei potenziali ritardati (traducenti cioè la ipotesi di una propagazione con velocità eguale a quella della luce).

Queste equazioni costituiscono un particolare sistema di integrali delle ben note equazioni differenziali di HERTZ.

Il loro interesse è principalmente filosofico, poichè ne rimane collegato in modo esauriente il punto di vista classico delle azioni a distanza colla elettrodinamica maxwelliana. Ma non è trascurabile d'altra parte il loro valore, dirò così pratico, prestandosi esse a risolvere molti problemi in modo più comodo e diretto che non sia offerto dalla teoria hertziana pura. E questo è ben naturale, poichè, prendendo le mosse da un sistema integrale, anzichè dalle equazioni differenziali, si risparmia una parte di lavoro.

Io avevo anche creduto ([4]) che (per essere meno ampia e quindi più determinata) la teoria di HELMHOLTZ-HERTZ presentasse un sostanziale vantaggio sull'altra, fornendo essa soltanto, in qualche caso concreto (e precisamente nei problemi di induzione ([5]), come l'attuale) le condizioni complementari, necessarie per individuare, fra le soluzioni delle equazioni differenziali di HERTZ, quella corrispondente ad un dato problema.

([4]) Cfr. per es. «Nuovo Cimento», giugno 1902, pag. 454.

([5]) In cui cioè si tratta di valutare le modificazioni, apportate ad un assegnato campo elettromagnetico dalla presenza di corpi conduttori.

Un più attento esame mi ha invece mostrato [6] che, anche dalla teoria hertziana pura, cioè direttamente dalle equazioni differenziali, si trae, con un semplice passaggio al limite, tutto quello, che occorre per rendere univocamente determinati i problemi di induzione.

Resta pur sempre che l'uso dei potenziali ritardati conferisce perspicuità, speditezza ed eleganza agli sviluppi matematici.

. . . .

. . . .

Capitolo III.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA PROPOSTO

. . . .

16 (*). - Forma definitiva del sistema differenziale, da cui dipende la determinazione di F_1, U_1, V_1.

Cominciamo coll'esplicitare le (6), esprimendovi tutto in funzione delle nostre incognite F_1, U_1, V_1.

Dalle (IV) e (VI) si ha

$$X = -m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi} - \frac{dF_1}{d\xi} + a\frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y = -m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\xi} + a\frac{dV_1}{d\xi};$$

sostituendo anche Au_1, Av_1 a mezzo dei loro valori (5), le (6) si possono scrivere

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a\frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi},\\ &\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a\frac{dV_1}{d\xi} = \qquad m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}.\end{aligned}\right.$$

---

[6] « Rendiconti dei Lincei », 3 agosto 1902. [In questo vol.: X, pp. 245-252].

(*) Il seguito si riattacca direttamente al n. 15 della Memoria precedente (p. 176). [N.d.R.].

Queste due relazioni sono verificate soltanto per $|\zeta| = 0$; ma non è difficile ricavarne due altre valide per qualunque $|\zeta|$, il che è quanto dire in ogni punto dello spazio.

Osserviamo perciò che, date le proprietà, di cui devono godere F_1, U_1, V_1, i primi membri delle (6′) sono due funzioni di ξ, η, $|\zeta|$ regolari per tutti i valori reali di ξ, η e positivi di $|\zeta|$, nulle per $|\zeta| = \infty$, le quali coincidono ordinatamente con

$$m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \qquad m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$$

per $|\zeta| = 0$, e soddisfanno all'equazione indefinita

$$\square f = 0 .$$

A tutte queste condizioni soddisfanno anche i secondi membri, purchè soltanto vi si sostituisca ζ con $-|\zeta|$ (sostituzione necessaria per togliere le singolarità nel punto m). Ma (come si vede subito, pensando che la conclusione sta per le funzioni armoniche) non possono esistere due soluzioni *distinte* della equazione $\square f = 0$, regolari ecc., e coincidenti per $|\zeta| = 0$. Ne viene che, ponendo

$$\nabla^2 = (\Delta^2)_{\zeta=-|\zeta|} = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2] , \tag{7}$$

le (6′) danno luogo alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a\frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\xi} , \\ &\frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a\frac{dV_1}{d\xi} = m\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\eta} , \end{aligned}\right. \tag{8}$$

verificate in ogni punto dello spazio.

Il problema analitico, che si tratta di risolvere, consiste dunque nella integrazione del sistema, costituito

a) dalle equazioni di primo ordine (4) ed (8);

b) dalle equazioni di secondo ordine

$$\square F_1 = 0 , \qquad \square U_1 = 0 , \qquad \square V_1 = 0 , \tag{9}$$

mediante funzioni di ξ, η, $|\zeta|$, regolari per ogni valore reale di ξ, η e positivo di $|\zeta|$, e annullantisi per $|\zeta| = \infty$, come si conviene a potenziali di distribuzioni situate sul piano $\zeta = 0$.

Si può constatare senza alcuna difficoltà che le equazioni (4), (8) e (9), che qui trascrivo per comodo del lettore,

$$\left|\begin{array}{ll} (4) & \dfrac{dF_1}{d\xi} = \dfrac{dU_1}{d\xi} + \dfrac{dV_1}{d\eta}, \\[2ex] (8) & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\xi} + a\dfrac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2)\dfrac{d\frac{1}{\nabla}}{d\xi}, \\[2ex] \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\eta} + a\dfrac{dV_1}{d\xi} = m\dfrac{d\frac{1}{\nabla}}{d\eta}; \end{array}\right. \\[4ex] (9) & \square F_1 = 0, \qquad \square U_1 = 0, \qquad \square V_1 = 0 \\[1ex] & \left(\square \equiv (1-a^2)\dfrac{d^2}{d\xi^2} + \dfrac{d^2}{d\eta^2} + \dfrac{d^2}{d|\zeta|^2}\right), \end{array}\right.$$

sono effettivamente compatibili (costituiscono cioè un sistema completo) e che, tenuto conto delle condizioni qualitative, testè dichiarate, determinano univocamente le funzioni incognite.

Ma è anche più semplice richiamarsi addirittura al n. 16 della redazione francese del presente lavoro. Si trova ivi effettuata, in modo completo e rigoroso, la integrazione del nostro sistema; e da essa segue in particolare che esiste una sola terna di funzioni, soddisfacenti a tutti i requisiti voluti.

Ora mi accingo a ricavare dal sistema differenziale soltanto le espressioni approssimate di F_1, U_1, V_1, che meglio si prestano agli scopi fisici.

17. - Integrazione approssimata.

Nelle ordinarie condizioni sperimentali, a e k si possono ritenere assai piccole.

Per renderci conto dell'ordine di grandezza, supponiamo per es. che la velocità della carica mobile sia di 300 metri al secondo (il che è già esagerato). Si ha allora

$$a = Ac = \frac{300 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-6}.$$

Supponiamo ancora che il piano conduttore σ sia una lastra di rame dello spessore di un millimetro.

In generale, se g è lo spessore e ϱ la resistenza specifica di una lamina (espressa in ohm), si ha (n. 15)

$$k = \frac{1}{30} R_0 = \frac{1}{30} \frac{\varrho}{g} .$$

Per il rame, $\varrho = 16 \cdot 10^{-7}$, a un dipresso. Dacchè $g = 10^{-1}$, risulterà

$$k = \frac{1}{2} 10^{-6}$$

all'incirca.

Apparisce di qua che, in questo e in casi analoghi, la costante k è dello stesso ordine di grandezza di a, per cui, posto

$$k = \frac{2\pi a}{h} ,$$

la h è a risguardarsi finita (4π nell'esempio accennato).

Inoltre, visto che l'ordine di grandezza di a è 10^{-6}, anzi verosimilmente più piccolo, riesciranno affatto insensibili i termini affetti dal fattore a^2, e si caratterizzerà quindi con ogni desiderabile approssimazione la natura del campo, immaginando F_1, U_1, V_1 sviluppati secondo le potenze di a e limitandosi a valutare i primi due termini (di grado zero ed uno in a).

A tal uopo, notiamo anzi tutto che, per $a = 0$, si ha il problema statico dell'influenza del piano conduttore $\zeta = 0$ sul campo di una carica immobile m.

U_1 e V_1 sono allora evidentemente nulli e F_1/m non è che la funzione di Green, relativa al piano $\zeta = 0$ e al punto parametrico $m(0, 0, d)$. Ora si sa bene che questa funzione di Green è $-1/r_1$, dove

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}$$

rappresenta la distanza del punto potenziato $P(\xi, \eta, \zeta)$ da m, o dall'immagine di m, secondochè P ed m sono o no separati dal piano $\zeta = 0$.

Potremo così porre

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= -\frac{m}{r_1} + aF_1^{(1)} + a^2 F_1^{(2)} + \mathbf{3} , \\ U_1 &= ap + \mathbf{2} , \\ V_1 &= aq + \mathbf{2} , \end{aligned} \right.$$

rappresentando con $F_1^{(1)}$, $F_1^{(2)}$, p, q funzioni da determinarsi delle variabili ξ, η, $|\zeta|$ (indipendenti da a) e con $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ delle espressioni, almeno, di secondo o rispettivamente di terzo ordine, rapporto ad a.

Abbiamo poi dalla (7)

$$\frac{1}{\nabla} = (\nabla^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(|\zeta|+d)^2}}\left\{1 - a^2\frac{\eta^2+(|\zeta|+d)^2}{\xi^2+\eta^2+(|\zeta|+d)^2}\right\}^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2}a^2\frac{\eta^2+(|\zeta|+d)^2}{r_1^3} + \mathbf{4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2}a^2\frac{d\left(\dfrac{\xi}{r}\right)}{d\xi} + \mathbf{4}\,,$$

con ovvio significato del simbolo $\mathbf{4}$.

Portiamo queste espressioni nelle (4) ed (8), scrivendo a/h al posto di $k/2\pi$ ed ordinando per le potenze di a. Otterremo:

$$(4')\qquad a\left\{\frac{d\dfrac{m}{r_1}}{d\xi} + \frac{dp}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta}\right\} + \mathbf{2} = 0\,,$$

$$(8')\qquad \left\{\begin{aligned} &-a\frac{dF_1^{(1)}}{d\xi} + a^2\left\{\frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{h}\frac{dp}{d|\zeta|} - \frac{dF_1^{(2)}}{d\xi} - \frac{1}{2}m\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{\xi}{r_1}\right) + \right.\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + m\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right\} + \mathbf{3} = 0\,,\\ &-a\frac{dF_1^{(1)}}{d\eta} + a^2\left\{\frac{dq}{d\xi} + \frac{1}{h}\frac{dq}{d|\zeta|} - \frac{dF_1^{(2)}}{d\eta} - \frac{1}{2}m\frac{d^2}{d\xi\,d\eta}\left(\frac{\xi}{r_1}\right)\right\} + \mathbf{3} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Trattiamo analogamente le (9), designando al solito con Δ_2 l'operatore di LAPLACE $d^2/d\xi^2 + d^2/d\eta^2 + d^2/d|\zeta|^2$ e tenendo presente che $\Delta_2(1/r_1) = 0$. Verrà:

$$(9')\qquad \left\{\begin{aligned} &a\Delta_2F_1^{(1)} + a^2\left\{\Delta_2F_1^{(2)} + m\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right\} + \mathbf{3} = 0\,,\\ &a\Delta_2 p + \mathbf{2} = 0\,,\\ &a\Delta_2 q + \mathbf{2} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

In queste equazioni devono separatamente annullarsi i coefficienti delle varie potenze di a.

Abbiamo intanto, considerando i coefficienti di a nelle (8′) e nella prima delle (9′),

$$\frac{dF_1^{(1)}}{d\xi}=0\,,\qquad \frac{dF_1^{(1)}}{d\eta}=0\,,\qquad \Delta_2 F_1^{(1)}=0\,,$$

da cui segue

$$F_1^{(1)}=0\,. \tag{11}$$

Infatti, per le prime due, $F_1^{(1)}$ è funzione della sola $|\zeta|$. In causa di $\Delta_2 F_1^{(1)}=0$, che si riduce a $d^2F_1^{(1)}/d|\zeta|^2=0$, non può dipenderne che linearmente. Ma [come ogni altro dei coefficienti degli sviluppi (10)] $F_1^{(1)}$ deve annullarsi per $|\zeta|=\infty$, e ciò si concilia colla linearità in $|\zeta|$, solo in quanto sia $F_1^{(1)}$ identicamente nulla.

Le altre condizioni, che discendono dalle (4′), (8′), (9′), posto per brevità

$$f=F_1^{(2)}+\frac{1}{2}m\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r_1}\right),$$

si scriveranno:

$$\frac{d}{d\xi}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)+\frac{dq}{d\eta}=0\,, \tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)+\frac{1}{h}\frac{dp}{d|\zeta|}=\frac{df}{d\xi}\,,\\&\frac{dq}{d\xi}+\frac{1}{h}\frac{dq}{d|\zeta|}=\frac{df}{d\eta}\,,\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\Delta_2 f=0\ \text{(7)},\qquad \Delta_2 p=0\,,\qquad \Delta_2 q=0\,. \tag{14}$$

(7) È ciò, che diventa la equazione

$$\Delta_2 F_1^{(2)}+m\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{r_1}\right)=0\,,$$

quando per $F_1^{(2)}$ si pone $f-\frac{1}{2}m(d/d\xi)(\xi/r_1)$, come si vede subito notando che

$$\Delta_2\frac{1}{r_1}=0\,,\qquad \Delta_2\frac{\xi}{r_1}=2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

Eliminando f fra le (13), si ottiene

$$\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)-\frac{d^2 q}{d\xi^2}+\frac{1}{h}\,\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{dp}{d\eta}-\frac{dq}{d\xi}\right)=0\,,$$

mentre la (12), derivata rispetto ad η, dà

$$\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)+\frac{d^2 q}{d\eta^2}=0\,,$$

che, sottratta dalla precedente, ove si tenga conto di $\Delta_2 q = 0$, permette di presentare il risultato dell'eliminazione di f sotto la forma

$$\frac{d}{d|\zeta|}\left\{\frac{dq}{d|\zeta|}+\frac{1}{h}\left(\frac{dp}{d\eta}-\frac{dq}{d\xi}\right)\right\}=0\,,$$

ossia, integrando rispetto a $|\zeta|$ fra un valore generico e l'infinito (la quantità in parentesi deve al solito annullarsi per $|\zeta|=\infty$), sotto la forma

$$\frac{dq}{d|\zeta|}+\frac{1}{h}\left(\frac{dp}{d\eta}-\frac{dq}{d\xi}\right)=0\,. \tag{15}$$

Determinazione di $dq/d|\zeta|$. - Fra le (12) e (15) si può ancora ovviamente eliminare p.

Avuto riguardo a $\Delta_2 q = 0$, si trova la equazione

$$h\,\frac{d^2 q}{d\xi\, d|\zeta|}+\frac{d^2 q}{d|\zeta|^2}=\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right),$$

la quale, posto

$$\frac{dq}{d|\zeta|}=\psi,$$

si scrive più semplicemente

$$h\,\frac{d\psi}{d\xi}+\frac{d\psi}{d|\zeta|}=\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right)$$

e serve a determinare univocamente ψ, dato che ψ, al pari di q, deve annullarsi per $|\zeta|=\infty$.

La integrazione si fa nel modo più comodo, sostituendo alle variabili indipendenti ξ, $|\zeta|$ due loro combinazioni lineari ξ_1, ζ_1 definite dalle formule

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = \xi_1 + h\zeta_1 \,, \\ |\zeta| = \zeta_1 \,, \end{array}\right.$$

con che i simboli operativi

$$\frac{d}{d\xi_1}\,, \qquad \frac{d}{d\zeta_1}$$

equivalgono rispettivamente a

$$\frac{d}{d\xi}\,, \qquad h\frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d|\zeta|}\,,$$

e la equazione in ψ si riduce a

$$\frac{d\psi}{d\zeta_1} = \frac{d^2}{d\xi_1\, d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right) = -\frac{d}{d\xi_1}\left(\frac{m\eta}{r_1^3}\right).$$

Notiamo che, al crescere indefinito di ζ_1, anche $|\zeta|$ diventa infinita e perciò ψ deve convergere a zero.

Ciò posto, integrando, rispetto a ζ_1, da un valore (positivo) generico fino all'infinito, e, osservando che, nel secondo membro, ξ_1 ed η sono variabili indipendenti da ζ_1, risulta

$$\psi = \frac{d}{d\xi_1}\left\{ m\eta \int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\zeta_1}{r_1^3} \right\}.$$

L'integrale interno si calcola senza difficoltà e si trova

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\zeta_1}{r_1^3} = \frac{1}{r_1\{\sqrt{1+h^2}\,r_1 + h\xi_1 + (1+h^2)\zeta_1 + d\}}\,,$$

essendo, in variabili ξ_1, ζ_1,

$$r_1^2 = (\xi_1 + h\zeta_1)^2 + \eta^2 + (\zeta_1 + d)^2\,.$$

Ripassiamo alle variabili ξ, $|\zeta|$ e designiamo con

$$\varphi = \frac{1}{r_1\{\sqrt{1+h^2}\,r_1 + h\xi + |\zeta| + d\}} \tag{16}$$

l'integrale testè calcolato, espresso in queste variabili. Dacchè ψ sta per $dq/d|\zeta|$, risulta in definitiva

$$\frac{dq}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\xi}(m\eta\varphi)\,. \tag{17}$$

Avuto riguardo alla espressione (16) di φ, si verifica subito che il secondo membro della (17) è (come appunto dev'essere) funzione regolare di ξ, η, $|\zeta|$, per ogni valore reale di ξ, η, > 0 di $|\zeta|$, e diventa infinitesimo al crescere indefinito di $|\zeta|$.

Quanto all'armonicità, si può, senza calcoli, constatarla come segue: Il precedente integrale

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{r_1^3}$$

(dove, per evitare ambiguità, ho designato con λ la variabile corrente di integrazione) sostituendo, a λ, $\mu = \lambda - \zeta_1$, può essere scritto

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\{(\xi_1 + h\zeta_1 + h\mu)^2 + \eta^2 + (\zeta_1 + d + \mu)^2\}^{3/2}}\,,$$

ossia, riponendo ξ per $\xi_1 + h\zeta_1$, $|\zeta|$ per ζ_1,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2\}^{3/2}}\,,$$

che è una nuova espressione di φ.

Ne viene

$$\eta\varphi = \int_0^{\infty} \frac{\eta\, d\mu}{\{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2\}^{3/2}} = -$$

$$- \int_0^{\infty} d\mu \frac{d}{d\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}}\right\}.$$

Ora

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}}$$

è funzione armonica di ξ, η, $|\zeta|$ (inversa della distanza dal punto, fisso rispetto a ξ, η, $|\zeta|$, $-h\mu$, 0, $-d-\mu$).

D'altra parte l'operatore Δ_2 si può portare sotto il segno integrale (i limiti essendo costanti) ed invertire colla derivazione rispetto ad η; dunque

$$\Delta_2(\eta\varphi) = 0 . \qquad c.d.d.$$

Osserviamo ancora, poichè ci servirà tra un momento, che

$$h\frac{d(\eta\varphi)}{d\xi} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r_1}\right). \tag{18}$$

Anche questo si può verificare senza sviluppi materiali, prendendo le mosse dalla circostanza che la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}}$$

— dirò ϑ per brevità — dipende da μ pel tramite degli argomenti $\xi + h\mu$, $|\zeta| + d + \mu$, talchè si ha identicamente

$$h\frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{d\vartheta}{d|\zeta|} = \frac{d\vartheta}{d\mu} .$$

Con ciò al primo membro della (18) (sempre per essere le operazioni di derivazione, rapporto a ξ e a $|\zeta|$, invertibili coll'integrazione rispetto a μ) si può attribuire l'aspetto

$$-\int_0^\infty d\mu \frac{d^2\vartheta}{d\mu\, d\eta} = \left[\frac{d\vartheta}{d\eta}\right]_\infty^0 .$$

Ora ϑ si annulla per $\mu = \infty$ e si riduce ad $1/r_1$ per $\mu = 0$. Rimane così $(d/d\eta)(1/r_1)$, il che prova la (18).

Determinazione di $dp/d|\zeta|$. - Riprendiamo la (12) e deriviamola rispetto a $|\zeta|$, sostituendo per $dq/d|\zeta|$ il suo valore (17). Si ha

$$\frac{d^2}{d\xi\, d|\zeta|}\left(p + \frac{m}{r_1}\right) = -\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}(m\eta\varphi) ,$$

donde, integrando rapporto a ξ,

$$\frac{d}{d|\zeta|}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)=-\frac{d}{d\eta}(m\eta\varphi)+\chi$$

con χ funzione (necessariamente armonica e nulla per $|\zeta|=\infty$, poichè lo sono ad un tempo $p+m/r_1$ ed $\eta\varphi$) delle sole η, $|\zeta|$.

Per determinare χ, basta tener conto della (15) e derivarla rispetto a $|\zeta|$. Si trova così

$$\frac{d^2}{d\eta\, d|\zeta|}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)=\frac{d^2}{d\eta\, d|\zeta|}\left(\frac{m}{r_1}\right)-h\frac{d^2q}{d|\zeta|^2}+\frac{d^2q}{d\xi\, d|\zeta|},$$

e sostituendo, per $(d/d|\zeta|)(p+m/r_1)$, $-(d/d\eta)(m\eta\varphi)+\chi$, per $dq/d|\zeta|$ il suo valore (17), risulta, in causa di $\Delta_2(m\eta\varphi)=0$,

$$\frac{d\chi}{d\eta}=\frac{d^2}{d\eta\, d|\zeta|}\left(\frac{m}{r_1}\right)-h\frac{d^2}{d|\zeta|\, d\xi}(m\eta\varphi)-\frac{d^2}{d|\zeta|^2}(m\eta\varphi).$$

Il secondo membro si annulla, in virtù della (18). La χ è dunque funzione della sola $|\zeta|$; ma, in causa della precedente relazione,

$$\frac{d}{d|\zeta|}\left(p+\frac{m}{r_1}\right)=-\frac{d}{d\eta}(m\eta\varphi)+\chi,$$

essa, come si è detto, è armonica e nulla per $|\zeta|=\infty$. Ne viene che χ è identicamente zero, e per conseguenza

$$\frac{dp}{d|\zeta|}=-\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{m}{r_1}\right)-\frac{d}{d\eta}(m\eta\varphi). \tag{19}$$

18. - Espressioni delle forze elettromagnetiche.

Abbiamo ormai quanto occorre per formare (entro i limiti di approssimazione convenuti) le espressioni delle forze elettromagnetiche.

Forza magnetica. – Si consideri in primo luogo la forza magnetica proveniente dalle correnti indotte sul piano conduttore $\zeta=0$.

Avendosi, a meno di termini d'ordine superiore al primo,

$$U_1 = ap, \qquad V_1 = aq,$$

le (V) danno

$$(\mathrm{V}') \qquad \begin{cases} L_1 = a\dfrac{dq}{d\zeta}, \\[2ex] M_1 = -a\dfrac{dp}{d\zeta}, \\[2ex] N_1 = a\left\{\dfrac{dp}{d\eta} - \dfrac{dq}{d\xi}\right\}. \end{cases}$$

Ora $d|\zeta| = \pm d\zeta$ secondochè $\zeta \gtrless 0$ (secondochè carica e punto potenziato sono o no dalla stessa banda del piano conduttore).

Abbiamo perciò dalle (17), (19) e (15)

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\zeta} = \pm \dfrac{d}{d\xi}(m\eta\varphi), \\[2ex] \dfrac{dp}{d\zeta} = -\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{m}{r_1}\right) \mp \dfrac{d}{d\eta}(m\eta\varphi), \\[2ex] \dfrac{dp}{d\eta} - \dfrac{dq}{d\xi} = -h\dfrac{d}{d\xi}(m\eta\varphi), \end{cases}$$

i segni superiori riferendosi ai punti $\zeta > 0$. Ricordando la (18), si può anche attribuire a $dp/d\eta - dq/d\xi$ il valore

$$-\frac{d}{d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right) \pm \frac{d}{d\zeta}(m\eta\varphi).$$

In definitiva, portando questi valori nelle (V′), e le risultanti espressioni di L_1, M_1, N_1 nelle (III), ove si tenga presente che, trascurando a^2, Δ coincide con r (distanza della carica dal punto potenziato) si conclude:

$$(\mathrm{III}') \qquad \begin{cases} L = \pm\, ma\dfrac{d}{d\xi}(\eta\varphi), \\[2ex] M = ma\left\{-\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right) \pm \dfrac{d}{d\eta}(\eta\varphi)\right\}, \\[2ex] N = ma\left\{\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right) \pm \dfrac{d}{d\zeta}(\eta\varphi)\right\}, \end{cases}$$

dove, ripetiamolo, vanno presi i segni superiori dalla parte della carica ($\zeta > 0$), gli inferiori dalla parte opposta.

Forza elettrica. – Passiamo ora alla forza elettrica.

Le (11) e (10) mostrano intanto che aU_1 e aV_1 sono di secondo ordine, e che F_1 differisce da $-m/r_1$ pure per termini di second'ordine.

Si ha così dalle (VI), coll'approssimazione richiesta,

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r_1}\right), \\ Y_1 &= \frac{d}{d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right), \\ Z_1 &= \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{r_1}\right), \end{aligned}\right.$$

e, per conseguenza, dalle (IV),

$$\left\{\begin{aligned} X &= -m\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right), \\ Y &= -m\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right), \\ Z &= -m\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right). \end{aligned}\right.$$

La forza elettrica deriva dunque dal potenziale.

$$m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right). \tag{VI'}$$

19. - Caratteri salienti del campo.

La (VI') mostra che, in un istante generico, l'influenza dello schermo sul campo elettrico della nostra carica mobile m si valuta come in elettrostatica (come cioè si trattasse di una carica immobile, nella posizione, che essa occupa nell'istante considerato). In particolare, *nei punti* $\zeta < 0$, *cioè al di là del piano conduttore*, $r_1 = r$, e quindi *la forza elettrica è nulla*.

Il conduttore costituisce adunque un diaframma perfetto delle azioni elettriche, dovute a cariche in convezione. E ciò giustifica l'uso di una lastra metallica, nelle esperienze di convezione, per proteggere da perturbazioni elettriche gli apparati, destinati a rivelare e a misurare il campo magnetico.

Nel caso nostro esso è definito dalle (III'), ma, come si vede, per le applicazioni, importa sopratutto esaminarne il comportamento al di là del piano conduttore, e confrontarlo con quello, che si avrebbe se il piano conduttore non ci fosse, mettendo così in evidenza le modificazioni quantitative dovute allo schermo.

Per $\zeta < 0$, le (III') danno

$$
(\mathrm{III}'') \qquad \left\{
\begin{aligned}
L &= -\,ma\,\frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}\,,\\
M &= -\,ma\,\frac{d(\eta\varphi)}{d\eta}\,,\\
N &= -\,ma\,\frac{d(\eta\varphi)}{d\zeta}\,;
\end{aligned}
\right.
$$

ossia (sempre, si intende bene, a meno di termini in a^2) *la forza magnetica al di là dello schermo deriva dal potenziale*

$$ma\eta\varphi\,,$$

essendo, per la (16) (in cui si deve ora porre $r_1 = r$, $|\zeta| = -\zeta$)

$$\varphi = \frac{1}{r\{\sqrt{1 + h^2}r + h\xi - \zeta + d\}}\,.$$

Quando non c'è lo schermo, si ha invece dalle (III) ponendo $\Delta = r$, $L_1 = M_1 = N_1 = 0$)

$$
(\mathrm{III}''') \qquad \left\{
\begin{aligned}
L &= 0\\
M &= -\,ma\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}\right),\\
N &= \,ma\,\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il confronto di queste colle (III'') mostra che la forza magnetica è modificata dall'interposizione del conduttore. L'ordine di grandezza rimane però il medesimo (quello di a).

Per farci un'idea della variazione di intensità, consideriamo in particolare i punti immediatamente al disotto della carica mobile (v. la figura a pag. 173), cioè i punti $Q(0, 0, \zeta < 0)$ situati sul prolungamento della $m\Omega$.

Avendosi, per questi punti Q, $\eta = 0$, sarà intanto [formule (III″) e (III‴)]

$$L = N = 0\,,$$

siavi o no il piano conduttore.

Inoltre

$$d - \zeta = r, \qquad \varphi = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}}\,\frac{1}{r^2}\,,$$

e quindi, quando c'è lo schermo,

$$M = -\,ma\,\frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} = -\,ma\varphi = -\,\frac{ma}{1 + \sqrt{1 + h^2}}\,\frac{1}{r^2};$$

mentre, per il campo naturale,

$$M = -\,ma\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}\right) = ma\,\frac{\zeta - d}{r^3} = -\,ma\frac{1}{r^2}\,.$$

La forza magnetica nei punti Q è dunque (siavi o no conduttore) *inversamente proporzionale al quadrato della distanza $\overline{Qm}$, ed è diretta* (per essere $L = N = 0$, $M < 0$) *conformemente alla regola di Ampère rispetto alla traiettoria della carica mobile. La interposizione del conduttore riduce l'intensità nel rapporto di* 1 *a*

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \qquad \left(h = \frac{2\pi a}{k}\right).$$

La riduzione è dunque di una metà almeno ($h = 0$) ed è tanto maggiore, quanto più piccola è la resistenza dello schermo.

Nel caso limite di una conduttività infinita ($k = 0$, $h = \infty$), la forza magnetica sarebbe addirittura zero, al di là del piano conduttore, come lo è la forza elettrica. Il conduttore sarebbe allora uno schermo elettromagnetico perfetto.

20. - Caso di una carica, che si muove colla stessa velocità della luce.

Quantunque non sieno qui state riportate le espressioni rigorose dei potenziali ritardati F_1, U_1, V_1, valide per qualsiasi valore di $a < 1$, parmi valga la pena di accennare (rimandando per la dimostrazione alla memoria francese) che, se nelle dette espressioni, si fa convergere a verso 1, si trova al limite

$$F_1 = U_1 = V_1 = 0 \ (^8),$$

cioè a dire:

Nel caso limite di una velocità di convezione eguale a quella della luce, la presenza del piano conduttore non modifica affatto il campo elettromagnetico.

21. - Osservazione.

Il campo magnetico, dovuto ad un sistema qualunque di correnti *costanti*, non è alterato dalla presenza di un piano conduttore (o più generalmente di conduttori di natura qualsiasi).

È questo un fatto sperimentale ben noto, che si deve naturalmente poter ritrovare in base alle nostre formule.

Limitiamoci per semplicità a considerare il caso del piano indefinito, e torniamo a riferirci agli assi fissi x, y, z.

Sieno F', U', V', W' i potenziali ritardati, corrispondenti al sistema dato di correnti. Queste funzioni saranno indipendenti da t, dacchè supponiamo le correnti costanti.

Sieno d'altra parte F_1, U_1, V_1 ($W_1 = 0$) i potenziali incogniti, corrispondenti alla distribuzione e alle correnti indotte sul piano $z = 0$. Evidentemente saranno anch'essi indipendenti da t e quindi, in causa delle (9), funzioni armoniche.

Per determinare queste funzioni armoniche si hanno le equazioni [(5) del capitolo I, e (6) di questo capitolo]:

$$A\frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0, \qquad X = Aku_1, \qquad Y = Akv_1 .$$

Tenendo conto che $F = F' + F_1$, $U = U' + U_1$, ecc., che $u_1 = -(1/2\pi)(dU_1/d|z|)$, $v_1 = -(1/2\pi)(dV_1/d|z|)$, che tutto è indipendente da t, che F', U', V', W' già soddisfanno alla prima equazione, e sostituendo X, Y coi loro valori (II), le tre equazioni si trasformano in

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} = 0, \qquad \frac{d}{dx}(F' + F_1) = \frac{Ak}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|}, \qquad \frac{d}{dy}(F' + F_1) = \frac{Ak}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|},$$

---

(8) Si può anche (quantunque con minor rigore) rendersi conto di questo risultato, supponendo addirittura $a = 1$ nel sistema differenziale (4), (8), (9) (pag. 202). Quando si abbia riguardo alle solite condizioni, se ne trae necessariamente $F_1 = U_1 = V_1 = 0$.

di cui, beninteso, le ultime due devono essere verificate soltanto per $z = 0$.

Le solite considerazioni mostrano che l'unico modo di soddisfare a queste condizioni con funzioni U_1, V_1, F_1, armoniche, regolari, e nulle all'infinito, è di prendere

$$U_1 = V_1 = 0 \,,$$

e, per F_1, la funzione armonica, che, sul piano $z = 0$, coincide con $-F'$, comportandosi regolarmente in tutti gli altri punti dello spazio.

Il conduttore non esercita dunque alcuna perturbazione magnetica sul campo, dovuto a correnti costanti.

L'influenza sulla forza elettrica si valuta come in elettrostatica, risultato facilmente prevedibile, poichè si tratta di un regime permanente e quindi la distribuzione dell'elettricità è sempre la stessa, come se le cariche fossero immobili.