VI.

SULLA FORMA DELLO SVILUPPO DELLA FUNZIONE PERTURBATRICE

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LX (1901). pp. 653-661.

I caratteri analitici, che competono allo sviluppo della funzione perturbatrice, si sogliono ricavare a posteriori, dopo aver effettivamente eseguito, o almeno indicato nelle sue linee generali, il calcolo, che conduce alla valutazione dei coefficienti (¹).

Se ci si accontenta di riconoscere le proprietà qualitative dello sviluppo, si può — cosa facilmente prevedibile — evitare ogni calcolo, raggiungendo assai presto lo scopo.

Ho seguito questo criterio nelle lezioni di Meccanica superiore, tenute quest'anno nella R. Università di Padova. Lo svolgimento non mi sembra del tutto privo di interesse dal punto di vista didattico, ond'io mi permetto di farne oggetto della presente comunicazione.

1. – Poniamo

(1) $$e \cos \tilde{\omega} = \xi , \qquad e \operatorname{sen} \tilde{\omega} = \eta ,$$

$$\begin{cases} \zeta = \lambda - \tilde{\omega} , \\ u = \zeta + \delta = \lambda - \tilde{\omega} + \delta , \end{cases}$$

dove si designa al solito con e la *eccentricità*, con $\tilde{\omega}$ la *longitudine del perielio*, con ζ la *anomalia media*, con u la *anomalia eccentrica*; λ rappresenta allora la *longitudine media*.

La equazione di Kepler

$$u - e \operatorname{sen} u = \zeta ,$$

(¹) Cfr. per es. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, cap. XVIII.

sostituendovi per ζ ed u i valori testè scritti e usufruendo delle (1), assume l'aspetto

$$\delta - \xi \operatorname{sen}(\lambda + \delta) + \eta \cos(\lambda + \delta) = 0 .$$

Questa equazione è atta a definire la $\delta = u - \zeta = e \operatorname{sen} u$ come funzione dei tre argomenti λ, ξ, η (periodica rispetto a λ). Infatti la derivata del suo primo membro, rapporto a δ, è eguale all'unità per $\xi = \eta = 0$. Si ha poi

$$e \cos u = \xi \cos(\lambda + \delta) + \eta \operatorname{sen}(\lambda + \delta) ,$$

talchè $u - \zeta$, $e \operatorname{sen} u$, $e \cos u$ si presentano tutte come funzioni dei tre argomenti λ, ξ, η, regolari nell'intorno del valore zero di ξ, η, e periodiche rispetto a λ (di periodo 2π).

Lo stesso può affermarsi per le funzioni trigonometriche

$$\operatorname{sen}(w - u) , \qquad \cos(w - u) ,$$

rappresentando w la *anomalia vera*.

Infatti, dalle formule

$$\cos w = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} ,$$

$$\operatorname{sen} w = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u} ,$$

si trae

$$\operatorname{sen}(w - u) = \frac{e \operatorname{sen} u - (1 - \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{sen} u \cos u}{1 - e \cos u} ,$$

$$\cos(w - u) = \frac{1 - e \cos u - (1 - \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{sen}^2 u}{1 - e \cos u} .$$

Il denominatore $1 - e \cos u$ non si annulla nell'intorno considerato, poichè, per $\xi = \eta = 0$, anche $e = 0$, e quindi esso si riduce all'unità. D'altra parte la differenza $1 - \sqrt{1 - e^2}$ è una funzione regolare di e^2 (per $|e^2| < 1$), che contiene e^2 a fattore. Più precisamente si può porre

$$1 - \sqrt{1 - e^2} = \tfrac{1}{2} e^2 \{1 + e^2 P(e^2)\} ,$$

designando P una funzione regolare del suo argomento, nell'intorno del valore zero.

Dacchè, per le (1),

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2 ,$$

la P risulta anche funzione regolare di ξ, η, nell'intorno di $\xi = \eta = 0$.

Le precedenti espressioni di $\operatorname{sen}(w - u)$, $\cos(w - u)$ divengono

$$\operatorname{sen}(w - u) = \frac{e \operatorname{sen} u}{1 - \cos u} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e \cos u \left[1 + (\xi^2 + \eta^2) P \right] \right\} ,$$

$$\cos(w - u) = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 u}{1 - e \cos u} \left[1 + (\xi^2 + \eta^2) P \right] ,$$

con che, per quanto s'è osservato circa $e \operatorname{sen} u$, $e \cos u$, rimane giustificato l'asserto.

Se si bada che il *raggio vettore* r, *la longitudine vera* v e i coseni direttori α, β, γ del raggio vettore sono definiti dalle equazioni

$$r = a(1 - \cos u);$$

$$v = w + \tilde{\omega} = w + \lambda - \zeta = (w - u) + (u - \zeta) + \lambda;$$

$$\alpha = \cos(v - \vartheta) \cos \vartheta - \operatorname{sen}(v - \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi ,$$

$$\beta = \cos(v - \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta + \operatorname{sen}(v - \vartheta) \cos \vartheta \cos \varphi ,$$

$$\gamma = \operatorname{sen}(v - \vartheta) \operatorname{sen} \varphi ,$$

risulta anche:

r, $\operatorname{sen} v$, $\cos v$, α, β, γ sono tutte funzioni periodiche di λ, regolari rispetto a ξ, η nell'intorno di $\xi = 0$, $\eta = 0$. Vi appariscono inoltre gli elementi a (*semiasse maggiore*), ϑ (*longitudine del nodo*), φ (*inclinazione*).

Come, a mezzo delle (1), abbiamo sostituito ai due elementi e, $\tilde{\omega}$ le combinazioni ξ, η, che si annullano con e, così sarà ora opportuno introdurre al posto di ϑ e σ due altri argomenti

$$(2) \qquad p = \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi \cos \vartheta , \qquad q = \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \vartheta ,$$

che si annullano entrambi per $\varphi = 0$.

Si noti che

$$\cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varphi} = \{1 - (p^2 + q^2)\}^{1\,2}$$

riesce funzione regolare di questi nuovi argomenti nell'intorno del valore zero. Così pure α, β, γ, dacchè

$$\alpha = \cos(v-\vartheta)\cos\vartheta - \operatorname{sen}(v-\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}(v-\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\,(1-\cos\varphi)$$
$$= \cos v + 2q(p \operatorname{sen} v - q\cos v),$$

$$\beta = \cos(v-\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}(v-\vartheta)\cos\vartheta - \operatorname{sen}(v-\vartheta)\cos\vartheta(1-\cos\varphi)$$
$$= \operatorname{sen} v - 2p(p\operatorname{sen} v - q\cos v),$$

$$\gamma = \operatorname{sen}(v-\vartheta)\operatorname{sen}\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi(p\operatorname{sen} v - q\cos v) =$$
$$= 2\{1-(p^2+q^2)\}^{1/2}(p\operatorname{sen} v - q\cos v).$$

In definitiva è lecito ritenere:

Le coordinate eliocentriche x, y, z (eguali rispettivamente ad $r\alpha$, $r\beta$, $r\gamma$), *considerate come funzioni dei sei argomenti λ, ξ, η, p, q, a sono periodiche rapporto a λ e regolari nell'intorno di $\xi=\eta=p=q=0$; dipendono da a, in quanto lo contengono semplicemente a fattore.*

2. – Se si considera un generico altro corpo P', contraddistinguendo con apici le lettere, che ad esso si riferiscono, potremo dire altrettanto di x', y', z' rispetto agli argomenti λ', ξ', η', p', q', a', e quindi della funzione

$$\varDelta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

rispetto agli uni e agli altri, colla sola differenza, nei riguardi di a e di a', che risulta omogenea di secondo grado.

Per $a \gtrless a'$ (supponendo beninteso che a ed a' abbiano valori reali), la funzione $\varDelta^2$ non si annulla, quando vi si fa

$$\xi=\eta=p=q=\xi'=\eta'=p'=q'=0\,.$$

Infatti, per le (1), (2), ciò equivale a supporre nulle le eccentricità e le inclinazioni; $\varDelta^2$ rappresenta allora il quadrato della distanza di due punti P, P' appartenenti a circonferenze concentriche, situate in un medesimo piano e di differente raggio; nè può quindi annullarsi.

Abbiamo di conseguenza:

L'inversa della distanza, $1/\varDelta$, è una funzione dei dodici argomenti

$$\begin{matrix} \lambda, & \xi, & \eta, & p, & q, & a, \\ \lambda', & \xi', & \eta', & p', & q', & a', \end{matrix}$$

periodica rispetto a λ, λ' *e regolare in un certo intorno dei valori*

$$\xi = \eta = p = q = \xi' = \eta' = p' = q' = 0\,,$$

qualunque sieno a ed a' (purchè si intende reali e non coincidenti), *rispetto ai quali essa è inoltre omogenea di grado* -1.

Sarà dunque $1/\Delta$ sviluppabile in serie trigonometrica di λ e λ' e in serie di potenze degli otto argomenti ξ, η, ..., q', per valori abbastanza piccoli di questi argomenti. È evidente, che, sostituendo agli argomenti ξ, η, ..., q',

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \xi + i\eta\,, & \bar{\eta} &= \xi - i\eta\,,\\ \bar{p} &= p + iq\,, & \bar{q} &= p - iq\,, \quad \text{ecc.}\end{aligned} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

la funzione $1/\Delta$ conserva i medesimi caratteri. Più generalmente ciò avviene per qualsiasi trasformazione, che faccia passare, dagli otto argomenti ξ, η, ..., q', ad altri otto annullantisi tutti per $\xi = \eta = ... = q = 0$, e sia biunivoca e regolare nell'intorno di questi valori. La osservazione è importante perchè si applica tra l'altro alle combinazioni

$$\begin{aligned}&\beta^{1/2}a^{1/4}\{1 + (\xi^2 + \eta^2)P\}^{1/2}\xi\,, && -\beta^{1/2}a^{1/4}\{1 + (\xi^2 + \eta^2)P\}^{1/2}\eta\,,\\ &2\beta^{1/2}a^{1/4}\{1 - (\xi^2 + \eta^2)\}^{1/4}p\,, && 2\beta^{1/2}a^{1/4}\{1 - (\xi^2 + \eta^2)\}^{1/4}q\,,\end{aligned}$$

che costituiscono, assieme a $\sqrt{a}$, λ una sestupla canonica (²); (β rappresenta una costante, che dipende soltanto dalle masse, e P la funzione, così designata al n. 1).

3. – Partiamoci dallo sviluppo di $1/\Delta$ relativo alle variabili $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, ..., $\bar{q}'$, cioè

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{0}^{\infty}{}_{mn...\nu'}\, A\bar{\xi}^m\bar{\eta}^n\bar{p}^\mu\bar{q}^\nu\bar{\xi}'^{m'}\bar{\eta}'^{n'}\bar{p}'^{\mu'}\bar{q}'^{\nu'}\,, \tag{3}$$

in cui i coefficienti A dipendono ancora da λ, λ', a, a', essendo periodici rispetto a λ, λ', omogenei di grado -1 rispetto ad a, a'.

Riponendo per $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, ..., $\bar{q}'$ i valori

$$eE^{i\tilde{\omega}},\ eE^{-i\tilde{\omega}},\ ...,\ \text{sen}\,\frac{1}{2}\varphi' E^{-i\vartheta'}\ (^3)\,,$$

(²) Cfr. per. es. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. I, n. 12.

(³) Per evitare ambiguità, designiamo con E la base dei logaritmi naturali.

che loro spettano, a tenore delle (1), (2), si ha

$$\frac{1}{\varDelta} = \sum_{0}^{\infty}{}_{mn\ldots\nu'} \left\{ A\, e^{m+n} e'^{m'+n'} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\right)^{\mu+\nu} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi'\right)^{\mu'+\nu'} \times \right.$$
$$\left. \times\, E^{i\{(m-n)\tilde{\omega}+(m'-n')\tilde{\omega}'+(\mu-\nu)\vartheta+(\mu'-\nu')\vartheta'\}} \right\}.$$

In un termine generico l'esponente $m+n$ di e è evidentemente eguale, per $m > n$, a $|m-n| + 2n$; per $m < n$, a $|m-n| + 2m$. Esso supera, dunque il valore assoluto del coefficiente $m-n$ di $\tilde{\omega}$ per un numero pari, positivo o nullo. Lo stesso per gli esponenti di e', sen $\frac{1}{2}\varphi$, sen $\frac{1}{2}\varphi'$, rispetto ai coefficienti di $\tilde{\omega}'$, ϑ, ϑ'.

Immaginando anche i coefficienti A sviluppati in serie trigometrica degli argomenti λ e λ', si riconosce immediatamente che un termine qualunque dello sviluppo di $1/\varDelta$ rientra nel tipo

$$\frac{B}{a'}\, e^{\boldsymbol{K}} e'^{\boldsymbol{K}'} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\right)^{\boldsymbol{J}} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi'\right)^{\boldsymbol{J}'} \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix} \{h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta'\}\,,$$

dove B dipende soltanto dal rapporto a/a'; $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$, ..., $\boldsymbol{J}'$ sono numeri interi, e si ha $\boldsymbol{K} = |k| +$ un numero pari, positivo o nullo, colle altre analoghe per $\boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}'$.

Dacchè tutti gli sviluppi considerati sono assolutamente convergenti, è lecito operare come con le somme. In particolare per es. si potranno pensare raggruppati tutti i termini del medesimo ordine ([4]), ovvero tutti quelli, cui compete un medesimo fattore trigonometrico.

Adottiamo questo secondo criterio e poniamo per brevità

$$h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta' = D\,.$$

Lo sviluppo di $1/\varDelta$ si presenta sotto la forma

$$\frac{1}{\varDelta} = \sum (C \cos D + \varGamma \operatorname{sen} D)\,,$$

ma si può inoltre mostrare che ogni coefficiente $\varGamma$ è identicamente nullo.

Infatti lo scambio simultaneo di λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, ϑ, ϑ' in $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\tilde{\omega}$, $-\omega'$, $-\vartheta$, $-\vartheta'$, (e quindi di ogni D in $-D$) non altera $1/\varDelta$ ([5]), talchè

([4]) Per ordine di un termine di intende la somma $K + K' + J + J'$.

([5]) Basta osservare che la distanza PP' non cambia, se si fanno ruotare di 180° gli assi y, z attorno all'asse x (si invertono cioè sopra entrambi le direzioni positive); e nemmeno, se si conviene di contare in senso opposto gli angoli nei piani delle due orbite, definite, rispetto al primitivo sistema, dai valori a, e, ..., ϑ', che si considerano. Con queste varianti λ, $\tilde{\omega}$, ϑ; λ', $\tilde{\omega}'$, ϑ', si cambiano rispettivamente in $-\lambda$, $-\tilde{\omega}$, $-\vartheta$; $-\lambda'$, $-\tilde{\omega}'$, $-\vartheta'$, tutto il resto rimanendo invariato.

deve essere identicamente

$$\sum (C \cos D + \Gamma \operatorname{sen} D) = \sum (C \cos D - \Gamma \operatorname{sen} D)\,,$$

donde appunto $\Gamma = 0$.

Ancora nella

$$\frac{1}{\Delta} = \sum C \cos D \tag{4}$$

compariscono soltanto termini, per cui la somma

$$s = h + h' + k + k' + j + j'$$

si annulla. Per dimostrarlo, esprimiamo che $1/\Delta$ non dipende dalla orientazione della coppia coordinata x, y nel proprio piano. Quando la si fa ruotare di un angolo arbitrario χ, gli argomenti λ, $\tilde{\omega}$, ϑ, λ', $\tilde{\omega}'$, ϑ' (ed essi soltanto) aumentano di $-\chi$; deve perciò essere identicamente

$$\frac{1}{\Delta} = \sum C \cos D = \sum C \cos (D - s\chi) = \sum C (\cos D \cos s\chi + \operatorname{sen} D \operatorname{sen} s\chi)\,,$$

donde

$$C \cos s\chi = C\,, \qquad C \operatorname{sen} s\chi = 0\,.$$

Per quei termini, che compariscono effettivamente nello sviluppo, C non è nullo, talchè deve annullarsi $s\chi$, per qualunque χ, ossia appunto $s = 0$, giusta l'asserto.

Lo sviluppo (3), da cui siamo partiti, vale per valori abbastanza piccoli di $|\bar{\xi}|$, $|\bar{\eta}|$, ..., $|\bar{q}'|$. In causa delle (1), (2), questa condizione rimane soddisfatta (per qualsiasi valore reale di $\tilde{\omega}$, ϑ, $\tilde{\omega}'$, ϑ') purchè sieno abbastanza piccoli

$$|e|, \qquad |e'|, \qquad \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\right|, \qquad \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi'\right|.$$

Ne viene: *Lo sviluppo* (4) *della funzione* $1/\Delta$ *è certamente valido* (cioè convergente assolutamente e uniformemente) *per valori abbastanza piccoli delle eccentricità e delle inclinazioni. In ogni termine l'argomento D ha la forma*

$$h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta',$$

dove i numeri interi h, h', ..., j' verificano la relazione

$$h + h' + \dots + j' = 0;$$

il coefficiente C possiede il fattore

$$e^{|k|}e'^{|k'|}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\right)^{|j|}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi'\right)^{|j'|};$$

risulta cioè dal prodotto di questo fattore per una funzione di e, e', sen $\frac{1}{2}\varphi$, sen $\frac{1}{2}\varphi'$; a, a', *regolare per valori abbastanza piccoli dei primi quattro argomenti, omogenea di grado* -1 *in* a, a'.

4. – Rammentando la composizione della funzione perturbatrice nel problema generale degli n corpi, e come la parte complementare di essa possa risguardarsi proveniente, per duplice derivazione rispetto ad argomenti di tipo λ, da trinomi della forma $xx' + yy' + zz'$ (6), possiamo infine concludere:

Tutte le forme di sviluppo, qui indicate, sono senz'altro valide per la funzione perturbatrice, dovendosi soltanto considerare tante serie di sei argomenti, quanti sono i corpi del sistema oltre il centrale.

---

(6) POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, « Bulletin Astronomique », t. XIV, 1897; oppure « Acta Mathematica », t. 12, 1897.