NOTA II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1° sem. 1901), pp. 429-434 (*).

7. - Soluzioni, per cui Δ non si annulla identicamente [1]. Rappresentazione geometrica del movimento. Condizioni di stabilità.

Per $\Delta \gtrless 0$, le (12) equivalgono a

$$(12_a) \qquad p = -\nu s\,, \qquad q = 0\,.$$

Essendo inoltre

$$(11) \qquad \nu r = s\gamma_3\,,$$

si ottiene dalle (K) il sistema ridotto

$$(\mathrm{K}_a) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{s}{\nu}\gamma_2\gamma_3\,, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = -\frac{s}{\nu}\gamma_1\gamma_3 - \nu s\gamma_3\,, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \nu s\gamma_2\,,$$

il quale ammette, oltre al solito $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, un secondo integrale

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\nu^2\gamma_1 = \text{cost.}$$

ed è quindi integrabile per funzioni ellittiche.

(*) Presentata dal Corrispondente G. Ricci nella seduta del 1° giugno 1901.

(1) Queste ∞^4 soluzioni sono già state segnalate dal sig. S. Stekloff. Egli ha in pari tempo osservato che esse convengono anche a solidi con una distribuzione di massa alquanto più generale di quella supposta dalla Kowalevsky. Cfr. l'« Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik », 1895, pag. 838. Rimane naturalmente estraneo al punto di vista dell'A. quel che risulta invece dal nostro, e cioè:

1) il comportamento stazionario, che le soluzioni in parola hanno nel caso della Kowalevsky, *e non in generale negli altri*. (Faranno probabilmente eccezione i casi del sig. R. Liouville, in cui le equazioni del movimento ammettono, oltre l'integrale delle aree e quello delle forze vive, un ulteriore integrale algebrico. Quanto agli altri casi, manca un corrispondente integrale uniforme ed esistono quindi soltanto le ∞^2 soluzioni stazionarie, che provengono dall'integrale delle aree);

2) le condizioni di stabilità.

Si può osservare che quest'ultimo integrale non è altro che quello della KOWALEVSKY, ridotto a mezzo delle (12_a), cioè

$$(2_a) \qquad (\gamma_1 + \nu^2)^2 + \gamma_2^2 = \mu^4 .$$

La equazione $q = 0$ mostra che il cono di polodia si riduce al piano meridiano baricentrico.

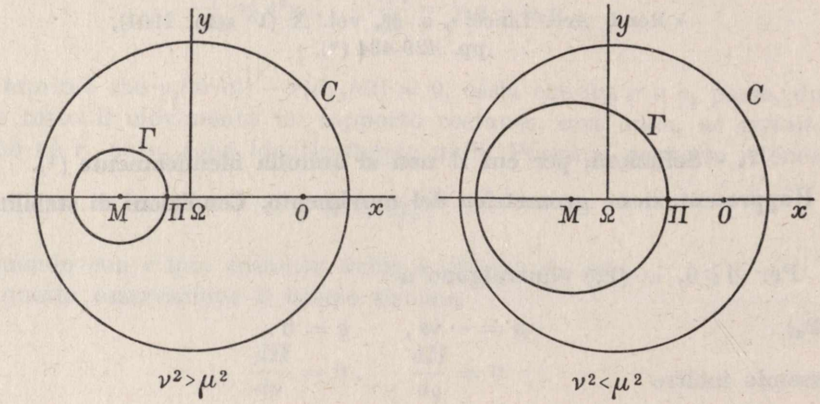

Fig. 1. $(\mu^2 + \nu^2 < 1)$

La verticale di Ω descrive, rispetto al corpo, un cono di quart'ordine V, che si ottiene proiettando da Ω la intersezione del cilindro circolare retto

$$(x + \nu^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

Per riconoscerlo, basta notare che γ_1, γ_2 sono le coordinate x, y di quel punto della verticale, che si trova alla distanza 1 da Ω, e aver riguardo alla (2_a).

Ciascuna falda di V (per es. quella corrispondente alla direzione positiva della verticale) consta di due nappe distinte oppure di una nappa unica, secondochè il cerchio Γ, di centro $M(-\nu^2, 0)$, e raggio μ^2,

$$(x + \nu^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

rimane o no tutto interno [6] al cerchio C di centro Ω e raggio 1, secon-

[6] Dobbiamo evidentemente escludere che il cerchio Γ rimanga tutto al difuori di C, poichè la (2_a) non sarebbe in tal caso soddisfatta da alcun sistema di valori di γ_1, γ_2 inferiori all'unità.

dochè cioè $\mu^2 + \nu^2 < 1$, ovvero $\mu^2 + \nu^2 > 1$ (figg. 1 e 2). Nel caso intermedio $\mu^2 + \nu^2 = 1$ (Γ tangente a C) le due nappe si saldano, e il cono ha l'asse baricentrico per generatrice doppia.

La successione delle posizioni occupate dal corpo (se non la legge, con cui esse vengono percorse al variare del tempo) rimane individuata in modo assai semplice. Basta portare l'una dopo l'altra le generatrici

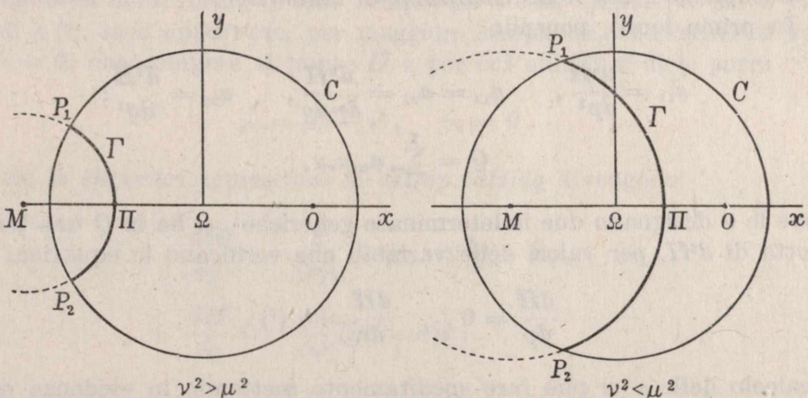

Fig. 2. $(\mu^2 + \nu^2 > 1)$

di V in posizione verticale mediante rotazioni elementari attorno a rette del piano meridiano baricentrico (cono di polodia). A partire da una data posizione di V, la rotazione elementare deve dunque avvenire intorno alla intersezione del detto piano meridiano col piano normale a V, condotto per la generatrice verticale.

Lo studio completo dei caratteri del movimento, e in particolare la determinazione dei nove coseni direttori in funzione ellittica del tempo ci porterebbe troppo in lungo. Mi limiterò ad una indicazione, circa il modo di variare di γ_1, γ_2, γ_3, che si desume immediatamente dalle (K_a).

Sia P_t il punto della circonferenza Γ, che, in un generico istante t, rappresenta (colle sue coordinate x, y) i valori di γ_1, γ_2. Il quadrato della velocità, con cui P_t descrive la curva Γ è dato da

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 = \frac{s^2}{\nu^2}\left\{\gamma_2^2 + (\gamma_1 + \nu^2)^2\right\}\gamma_3^2\,,$$

ossia, in causa della (2_a), da $(s^2\mu^4/\nu^2)\gamma_3^2$. Esso non si annulla, se non con γ_3, cioè nei punti in cui Γ incontra C.

Quando Γ è tutta interna a C (fig. 1), il moto non può cambiare di senso; P_t descrive dunque periodicamente l'intera circonferenza.

Se invece Γ non resta tutta entro C, allora le intersezioni P_1 e P_2 (fig. 2) sono effettivamente punti di regresso per il movimento di P_t, il quale risulta per conseguenza oscillatorio e periodico.

Di qua segue tra altro che P_t raggiunge in qualsiasi eventualità la posizione Π (punto di Γ più vicino ad Ω); si ha cioè, per qualche valore di t, $\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2$, $\gamma_2 = 0$, quindi, a tenore delle (2′), (2″) e (12_a), $\varepsilon = 0$.

Occupiamoci ora delle condizioni di stabilità.

In primo luogo, ponendo

$$a_{11} = \frac{d^2H}{dp^2}, \qquad a_{12} = a_{21} = \frac{d^2H}{dp\,dq}, \qquad a_{22} = \frac{d^2H}{dq^2};$$

$$Q = \sum_{rs}{}_1^2 \, a_{rs} u_r u_s$$

(dove le u designano due indeterminate generiche), si ha in Q una forma ridotta di d^2H, per valori delle variabili che verificano le equazioni

$$\frac{dH}{dp} = 0, \qquad \frac{dH}{dr} = 0 \text{ (7)}.$$

Il calcolo delle a si può fare speditamente mettendo in evidenza nelle espressioni (9) di dH/dp, dH/dq i fattori $rp + s^2\gamma_3$, q (che, per le (11) e (12_a) hanno valore nullo).

Con questo criterio le (9) si scrivono

$$\frac{dH}{dp} = \frac{2}{s^2\gamma_3^2}\{(2\gamma_3 p - \gamma_1 r)(rp + s^2\gamma_3) + (2\gamma_3 q - \gamma_2 r)q\},$$

$$\frac{dH}{dq} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2}\{-\gamma_2(rp + s^2\gamma_3) + \gamma_1 rq\}.$$

---

(7) Quando infatti sussiste una equazione, come la (10), del tipo

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = c_1 \frac{dH}{dp} + c_2 \frac{dH}{dq}$$

(dove le c designano funzioni regolari per i valori considerati), derivando rapporto a p e a q e tenendo conto delle $dH/dp = 0$, $dH/dq = 0$, si deduce

$$\frac{d^2H}{d\varepsilon\,dp} = a_{11}c_1 + a_{12}c_2, \qquad \frac{d^2H}{d\varepsilon\,dq} = a_{21}c_1 + a_{22}c_2;$$

derivando invece rapporto ad ε,

$$\frac{d^2H}{d\varepsilon^2} = c_1 \frac{d^2H}{d\varepsilon\,dp} + c_2 \frac{d^2H}{d\varepsilon\,dq} = a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2.$$

La d^2H può così essere scritta

$$a_{11}(dp + c_1\,d\varepsilon)^2 + 2a_{12}(dp + c_1\,d\varepsilon)(dq + c_2\,d\varepsilon) + a_{22}(dq + c_2\,d\varepsilon)^2$$

e coincide precisamente, salvo la designazione delle indeterminate, colla forma binaria Q.

Dobbiamo derivare queste formule, rapporto a p e a q, attribuendo alle lettere (a derivazione eseguita) i valori che loro competono sopra le nostre soluzioni stazionarie.

Ne viene che i coefficienti di $rp+s^2\gamma_3$ e di q si possono trattare come costanti aventi addirittura i valori corrispondenti alle (11) e (12_a); anzi, siccome (conformemente alla regola generale più volte ricordata) i caratteri algebrici della forma Q sono sempre gli stessi, qualunque sia il valore di ε (8), sarà opportuno, per maggiore semplicità, di riferirsi al valore $\varepsilon = 0$, che compete al punto Π e per cui quindi si deve porre

$$\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2 , \qquad \gamma_2 = 0 .$$

Con ciò le superiori espressioni di $d\boldsymbol{H}/dp$, $d\boldsymbol{H}/dq$ divengono

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{H}}{dp} &= -\frac{2}{\nu s\gamma_3}(\mu^2+\nu^2)(rp+s^2\gamma_3) , \\ \frac{d\boldsymbol{H}}{dq} &= \quad \frac{2}{\nu^2}(\mu^2-\nu^2)q . \end{aligned}$$

Dalle (7) e (8), introducendovi i valori attuali, abbiamo

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial p} = -\frac{2\nu}{s\gamma_3}(\mu^2-\nu^2) , \quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial q} = 0 ,$$
$$\frac{dr}{dp} = \quad \frac{4}{\gamma_3}\nu^2 , \qquad \frac{dr}{dq} = 0 :$$

quindi

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{d^2\boldsymbol{H}}{dp^2} = -\frac{2}{\nu^2\gamma_3^2}(\mu^2+\nu^2)(1-\mu^4-3\nu^4) , \\ a_{12} &= \frac{d^2\boldsymbol{H}}{dp\,dq} = 0 , \\ a_{22} &= \frac{d^2\boldsymbol{H}}{dq^2} = \frac{2}{\nu^2}(\mu^2-\nu^2) . \end{aligned}$$

(8) Bisogna soltanto accertare che si tratta di un valore del parametro effettivamente assunto lungo la particolare soluzione che si considera. Non si può infatti escludere a priori che l'insieme di tutti i valori del parametro rimanga distinto in più intervalli discreti, corrispondenti a soluzioni diverse, e quindi eventualmente a diversi caratteri della forma Q. Nel caso attuale si tratta proprio di un valore del parametro effettivamente raggiunto, per quanto abbiamo osservato più innanzi.

Ne concludiamo (limitandoci al caso generale, in cui il discriminante della forma Q non si annulla) (9) che la condizione di stabilità è espressa dalla disuguaglianza

$$(\nu^2-\mu^2)(1-\mu^4-3\nu^4)>0\,. \tag{13}$$

Se $1-\mu^4-3\nu^4>0$, la (13) si riduce a $\nu^2>\mu^2$. Vi ha dunque stabilità allorchè Ω resta fuori di Γ.

L'opposto avviene per $1-\mu^4-3\nu^4<0$. La condizione di stabilità è allora che Ω cada entro Γ.

---

(9) Il discriminante di Q si annulla per $\nu^2-\mu^2=0$, ovvero $1-\mu^4-3\nu^4=0$. Per decidere se le corrispondenti soluzioni sono o no stabili, bisognerebbe prendere in esame i differenziali di H d'ordine superiore al secondo, ciò che qui omettiamo per brevità. Si noti che si tratta necessariamente in tali casi di soluzioni multiple (delle equazioni invarianti caratteristiche). Potremmo anche dire, con ovvia estensione di un appellativo introdotto dal sig. POINCARÉ (« Acta Mathematica », t. VII, 1885), *soluzioni di biforcazione*. La condizione (13) è appunto conforme al *principio dello scambio delle stabilità*.