Sur l'allure d'une fonction harmonique dans le voisinage d'un point exceptionnel

par

W. Stożek.

L'objet de cette Note est la généralisation des théorèmes de M. Picard (C. R. du 3 et du 16 avril 1923), concernant l'allure d'une fonction harmonique dans le voisinage d'un point exceptionnel[1]. La méthode s'applique dans l'espace comme dans le plan et n'implique pas que les surfaces équipotentielles soient fermées. Au contraire, cette propriété résulte des formules (3). Soit

$U(P)$ — une fonction des coordonnées du point P harmonique et uniforme en tout point intérieur à un domaine $\mathfrak{C}$, à deux ou à trois dimensions, sauf peut-être en un point exceptionnel O,

S — une sphère (ou un cercle) de centre O ayant une longueur donnée R $(R > 0)$ pour rayon.

Σ — une sphère (ou un cercle) concentrique à S, de rayon ϱ $(0 < \varrho < R)$

l — la longueur $\overline{OP}$.

Théorème. S'il existe une constante non négative d telle que les relations

$$0 < l \leqq R \tag{1}$$

entraînent

$$\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{d}{l} < U(P) & \text{(cas de l'espace),} \\ \text{ou} & \\ -d \log \dfrac{1}{l} < U(P) & \text{(cas du plan),} \end{array}\right. \tag{2}$$

---

[1]) Dans le même tome des C. R. (176), on trouve des Notes de MM. P Noaillon (p. 879), G. Bouligand (pp. 1037, 1200, 1366) et H. Lebesgue (pp. 1097, 1270) relatives au même sujet.

on[1]) a:

$$(3)\quad \begin{cases} U(P) = \dfrac{c}{l} + \text{fonction harmonique dans } \textit{tout} \text{ le domaine } \mathfrak{C} \\ \qquad \text{(cas de l'espace),} \\ \text{ou} \\ U(P) = c \,.\, \lg \dfrac{1}{l} + \text{fonction harmonique dans } \textit{tout} \text{ le domaine } \mathfrak{C} \\ \qquad \text{(cas du plan),} \end{cases}$$

où c est une constante; dans le cas particulier où, pour

$$0 < l \leqq R$$

la fonction U est bornée, la constante c est nulle, les formules (3) étant sûrement valables dans tout le domaine $\mathfrak{C}$, à moins que le point O ne soit un point de discontinuité de la fonction $U(P)$, cas où les formules (3) ne seraient plus valables au point O lui-même-tout en subsistant en tout autre point du domaine $\mathfrak{C}$ avec la valeur nulle de la constante c.

Pour établir le théorème[2]) précédent, considérons d'abord le cas de l'espace et, par rapport au domaine compris entre les sphè, res Σ et S, appliquons le théorème de Green aux fonctions $U(P)$ et

$$(4)\qquad \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{l}.$$

La seconde des deux fonctions précédentes s'annulant sur la sphère Σ, il viendra:

$$(5)\qquad + \frac{1}{\varrho^2} \int\limits_{(\Sigma)} u\, ds - \frac{1}{R^2} \int\limits_{(S)} u\, ds = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN} ds.$$

Pour établir la formule analogue relative au cas du plan, il suffira de remplacer la fonction (4) par

$$\log \frac{l}{\varrho},$$

[1]) On a évidemment un théorème tout à fait analogue, correspondant au cas où la constante d serait non positive et où le sens des inégalités (1) serait renversé.

[2]) Dans la démonstration qui va suivre, j'utilise une remarque de M. Zaremba, remarque qui m'a permis de simplifier celle que j'avais élaborée d'abord.

ce qui donnera:

$$(6) \qquad \frac{1}{\varrho}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds - \frac{1}{R}\int\limits_{(S)} u\,ds = \log\frac{R}{\varrho}\int\limits_{(S)} \frac{du}{dN}ds.$$

J'observe maintenant que, sans nuire à la généralité, on peut admettre que la constante d qui figure dans les inégalités (2) est nulle; pour le voir il suffit de changer $U(P)$ en

$$U(P) + \frac{d}{l} \text{ ou en } U(P) + d\log\frac{1}{l}$$

selon qu'il s'agit du cas de l'espace ou de celui du plan. Nous supposerons donc que les relations (1) entraînent la suivante:

$$(7) \qquad U(P) > 0.$$

Cela posé, reprenons le cas de l'espace et supposons que le point P ait une position arbitrairement donnée à l'intérieur de la sphère S, sans cependant coïncider avec le centre O de cette sphère. Donnons alors au rayon ϱ de la sphère Σ une valeur assez petite pour que le point P soit extérieur à la sphère Σ et désignons par $G(P, Q)$ la valeur eu un point Q de la fonction de Green de pôle P, relative au domaine extérieur à la sphère Σ. Une application facile du théorème de Green nous donnera la formule suivante:

$$(8) \qquad U(P) = \int\limits_{(\Sigma)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}ds + \int\limits_{(S)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}ds + \\ - \int\limits_{(S)} G(P,Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}ds.$$

Il nous faut maintenant passer à la limite pour $\varrho = 0$. En désignant par r la distance des points P et Q et en posant

$$(9) \qquad V(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} U\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{r}\right)ds - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} U\frac{ds}{r},$$

on trouve aisément:

$$(10) \qquad \lim_{\varrho\to 0}\left\{\int\limits_{(S)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}ds - \int\limits_{(S)} G(P,Q)\frac{d_Q U(Q)}{dN}ds\right\} = V(P)$$

où, évidemment, $V(P)$ est une fonction harmonique dans tout l'intérieur de la sphère S. Reste à déterminer la limite du premier terme du 2-ième membre de (8); dans l'intégrale qui le constitue, on a:

$$\frac{d_Q G(P, Q)}{dN} = \frac{l^2 - \varrho^2}{4\pi \varrho r^3}; \tag{11}$$

d'autre part, l'équation (5) donne:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} \int\limits_{(\Sigma)} u\, ds = \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN} ds. \tag{12}$$

En s'appuyant sur (7), on s'assure aisément, à l'aide des équations (11) et (12), que l'on a:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{(\Sigma)} U(Q) \frac{d_Q G(P, Q)}{dN} ds = \frac{1}{4\pi l} \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN} ds.$$

En s'appuyant sur cette équation ainsi que sur l'équation (10), on déduit de (8) la formule suivante

$$U(P) = \frac{c}{l} + V(P), \tag{13}$$

en posant,

$$c = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN} ds. \tag{14}$$

La formule (13) n'est valable que pour les positions du point P qui satisfont aux conditions

$$0 < l < R, \tag{15}$$

il y a donc encore quelques, mots à dire pour démontrer d'une façon complète la 1-ière partie de notre théorème en ce qui concerne le cas de l'espace. Désignons par $W(P)$ la fonction des coordonnées du point P définie comme il suit: au centre O de la sphère S on a

$$W(O) = V(O)$$

et, pour toute autre position du point P dans le domaine $\mathfrak{C}$, on a

$$W(P) = U(P) - \frac{c}{l}.$$

A l'intérieur de la sphère S, la fonction $W(P)$ se confondra avec la fonction $V(P)$ à cause de (13), d'où l'on déduit que la fonction $W(P)$ est une fonction harmonique dans *tout* l'intérieur du domaine $\mathfrak{T}$; d'autre part, il résulte de la définition de la fonction $W(P)$ que, pour *toute* position du point P à l'intérieur du domaine $\mathfrak{T}$ et sous la seule restriction d'avoir

$$l > 0, \tag{16}$$

on a

$$U(P) = \frac{c}{l} + W(P), \tag{17}$$

formule qui démontre la 1-ière partie de notre théorème pour le cas de l'espace; pour reconnaître, dans le même cas, l'exactitude de la 2-ième partie du théorème, il suffit de remarquer que, lorsque la fonction $U(P)$ est bornée, on a nécessairement

$$c = 0.$$

Passons maintenant au cas du plan. La formule (8) peut-être regardée comme se rapportant à ce cas-là: il suffit pour cela de regarder les symboles Σ et S comme représentant des cercles et l'expression $G(P, Q)$ comme celle de la fonction de Green de pôle P, relative au domaine extérieur par rapport au cercle Σ. Plaçons-nous donc à ce point de vue et passons à la limite pour $\varrho = 0$. A cet effet, désignons par r la distance des points P et Q et par r_1 la distance du point Q au conjugné harmonique P_1 du point P par rapport aux points d'intersection du cercle Σ avec la droite passant par le centre O du cercle Σ et par le point P. Avec ces notations la formule (8) pourra s'écrire comme il suit:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Sigma)} U \frac{l^2 - \varrho^2}{\varrho r^2}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} U\left\{\frac{1}{r_1}\frac{d_Q r_1}{dN} - \frac{1}{r}\frac{d_Q r}{dN}\right\} ds + \\ - \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN}\left\{\log\frac{r_1}{\varrho} - \log r - \log\frac{1}{l}\right\} ds. \tag{18}$$

La formule (6) donne

$$\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{(\Sigma)} u\, ds = 0. \tag{19}$$

Cela étant, il résulte de (7) que, pour $\varrho = 0$, la limite du second membre de (18) se confond avec celle de l'expression suivante:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{l^2-\varrho^2}{\varrho l^2}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)} U\left\{\frac{-1}{R}-\frac{1}{r}\frac{d_0 r}{dN}\right\}ds+$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{du}{dN}\left\{\log\frac{R}{\varrho}-\log r-\log\frac{1}{l}\right\}ds,$$

expression qui, à cause de (6), est égale à la suivante

(20)
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{l^2}{\varrho}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds+V(P)+c\log\frac{1}{l}$$

où l'on a posé

(21)
$$V(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\left\{\frac{du}{dN}\log r-u\frac{1}{r}\frac{d_\varrho r}{dN}\right\}ds$$

et

(22)
$$c=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{du}{dN}ds.$$

Or, à cause de (19), la limite de l'expression (20) pour $\varrho=0$ est égale à

$$V(P)+c\log\frac{1}{l}.$$

Par conséquent, la formule (18) donne, par le passage à la limite pour $\varrho=0$, la suivante

23)
$$U(P)=c\log\frac{1}{l}+V(P),$$

formule valable sous la condition (15) et dans laquelle, comme cela résulte de (21), la fonction $V(P)$ répresente une fonction harmonique dans tout l'intérieur du cercle Σ. Cela posé, la démonstration s'achève comme dans le cas de l'espace. En définitive notre théorème est complètement démontré.

Remarque [1]). Sans avoir rien à changer dans la thése du théorème qui vient d'être démontré, on peut adopter l'hypothèse un peu moins restrictive que voici: il existe une suite infinie $\{\varrho_n\}$ à termes positifs et ayant zéro pour limite à laquelle correspond un nombre positif d tel que l'existence de l'une ou de l'autre des inégalités (2) ne soit assurée à l'avance que pour

$$l=\varrho_n\quad(n=1,2,3\ldots).$$

[1]) Je dois cette remarque à M. Steinhaus.

Pour s'assurer de l'exactitude de cette remarque, il suffit de considérer que rien n'empêche de remplacer, dans la démonstration exposée plus haut, ϱ par ϱ_n et de passer à la limite pour $\frac{1}{n}=0$.

Pour terminer, complétons l'étude précédente par l'examen du cas suivant: la fonction $U(P)$, harmonique et uniforme en tout point intérieur au domaine $\mathfrak{C}$ sauf peut-être en O n'est pas de la forme considérée dans la thèse de notre théorème. Je dis que, dans ce cas, le point A est un point-limite des zéros de la fonction $U(P)$. Pour le reconnaître, il suffit de considérer que, en vertu de la remarque faite il y a un instant on a la proposition suivante; si l'on désigne par $\{l_n\}$ une suite infinie à termes positifs ayant zéro pour limite et, lorsque P varie de façon à satisfaire à la condition

$$l=l_n,$$

par m_n et M_n respectivement le minimum et le maximum de l'expression

$$l\,.\,U(P)$$

ou de l'expression

$$\frac{U(P)}{\log\frac{1}{l}}$$

selon que l'on considére le cas de l'espace ou celui du plan, les termes de la suite

$$m_1,\ m_2,\ m_3\ldots$$

n'auront pas de borne inférieure finie, et ceux de la suite

$$M_1,\ M_2,\ M_3\ldots$$

n'auront pas de borne supérieure finie.