IV.

SUI MOTI STAZIONARI DI UN CORPO RIGIDO NEL CASO DELLA KOWALEVSKY

NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1° sem. 1901), pp. 338-346 (*).

1. - Generalità

Le equazioni di EULERO, che reggono il movimento di un solido pesante fissato per un punto Ω, sono, colle notazioni abituali,

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + P(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2)\,, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + P(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)\,, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + P(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1)\,, \end{aligned}\right.$$

(l'asse fisso ζ intendendosi verticale e diretto verso il basso).

Nel caso integrato dalla KOWALEVSKY, $A = B = 2C$; inoltre $z_0 = 0$, cioè il baricentro O è situato nel piano equatoriale dell'ellissoide di inerzia. Essendo indifferente la scelta della coppia x, y in questo piano, si può supporre il semiasse positivo delle x diretto secondo la ΩO, talchè $y_0 = 0$, $x_0 > 0$ (e non $x_0 = 0$, intendendo così di escludere il caso di EULERO, in cui O coincide con Ω).

Rappresenterò con s^2 la frazione essenzialmente positiva Px_0/C. Questa costante s ha le dimensioni $[Px_0]^{1/2}/[C] = [ml^2t^{-2}]^{1/2}/[ml^2]^{1/2} = [t^{-1}]$ e risulta quindi omogenea a p, q, r.

Aggiungendo alle equazioni precedenti le formule di POISSON, relative ai tre coseni γ_1, γ_2, γ_3, si ha in definitiva il sistema differenziale

$$(\mathrm{K})\quad \left\{\begin{aligned} &2\frac{dp}{dt} = qr\,, \qquad 2\frac{dq}{dt} = -rp - s^2\gamma_3\,, \qquad \frac{dr}{dt} = s^2\gamma_2\,; \\ &\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q\,, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r\,, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p\,. \end{aligned}\right.$$

(*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 5 maggio 1901.

La forza viva del corpo vale $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = C(p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2)$, il potenziale, dovuto alla gravità, $Px_0\gamma_1 = Cs^2\gamma_1$.

La energia totale H è dunque espressa (sopprimendo il fattore costante C, che si può del resto sempre supporre eguale ad 1 con opportuna scelta dell'unità di massa) da

$$H = p^2 + q^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - s^2\gamma_1 .$$

Le (K) ammettono, oltre all'integrale delle forze vive $H=$ cost. e all'identità geometrica $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, i due integrali algebrici

$$(A)\quad \begin{cases} (1) & 2(\gamma_1 p + \gamma_2 q) + \gamma_3 r = \lambda s , \\ (2) & \{(p+iq)^2 + s^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\}\{(p-iq)^2 + s^2(\gamma_1 - i\gamma_2)\} = \\ & = (s^2\gamma_1 + p^2 - q^2)^2 + (s^2\gamma_2 + 2pq)^2 = \mu^4 s^4 \quad (i = \sqrt{-1}), \end{cases}$$

nei secondi membri dei quali sono posti in evidenza i fattori di omogeneità s, s^4, affinchè le costanti λ e μ si presentino come puri numeri. (È poi lecito, nel secondo membro della (2), scrivere μ^4, pur intendendo μ reale, poichè la forma del primo membro mostra che si tratta di quantità $\geqslant 0$).

La (1) è chiaramente l'integrale delle aree per i piani orizzontali; la (2) l'integrale scoperto dalla Kowalevsky. Essi sono tra loro in involuzione, in quanto, adottando per es. come variabili canoniche gli angoli ϑ, f, φ di Kirchhoff e le loro coniugate p_ϑ, p_f, p_φ, la (1) diviene $p_\varphi=$cost., come è ben noto, mentre p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3, e per conseguenza anche il primo membro della (2), rimangono indipendenti dall'angolo di precessione φ.

2. - Soluzioni particolari del sistema (K), per cui $r = 0$.

Supponendo $r = 0$, la $dr/dt = s^2\gamma_2$ mostra che anche γ_2 è identicamente nulla; inoltre, da $2dp/dt = qr$, segue $p =$ cost. La equazione $d\gamma_2/dt = \gamma_3 p - \gamma_1 r$ si riduce a $\gamma_3 p = 0$, il che porta $\gamma_3 = 0$, ovvero $p = 0$. Nel primo caso, dovrà essere $\gamma_1 = \pm 1$, e quindi, in causa della $d\gamma_3/dt = \gamma_1 q = -\gamma_2 p$, $q = 0$, con che le (K) rimangono tutte soddisfatte. Si tratta evidentemente ($q = r = 0$, $p =$ cost.) di rotazioni uniformi attorno all'asse baricentrico ΩO, diretto verticalmente ($\gamma_1 = \pm 1$).

Se invece $p = 0$, le (K) divengono

$$r = \gamma_2 = p = 0; \qquad 2\frac{dq}{dt} = -s^2\gamma_3 , \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = -\gamma_3 q , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q .$$

Le soluzioni che ne rimangono definite corrispondono, per essere $r=p=0$, a rotazioni attorno all'asse y, necessariamente fisso anche nello spazio e orizzontale ($\gamma_2 = 0$).

È chiaro che il corpo si comporta in tale movimento come un pendolo composto. Possiamo del resto verificarlo sulle nostre equazioni. Le ultime tre, ponendovi $\gamma_1 = \cos u$, $\gamma_3 = \operatorname{sen} u$, con che u rappresenta la deviazione dalla verticale dell'asse baricentrico (contata positivamente in verso opportuno), si riassumono nella equazione tipica del moto pendolare

$$2\,\frac{d^2u}{dt^2} = -\,s^2 \operatorname{sen} u\,.$$

3. - Moti stazionari e loro distinzione in tre categorie.

Il nostro problema possiede ∞^4 soluzioni stazionarie Σ, che corrispondono ai due integrali (A) e si caratterizzano ([1]) eliminando da H due variabili a mezzo delle (A) e ponendo eguale a zero il differenziale $d\boldsymbol{H}$ dell'espressione ridotta $\boldsymbol{H}$ di H.

Tra queste Σ sono evidentemente comprese le due sottoclassi di ∞^3 soluzioni, che corrispondono a ciascuno dei due integrali (1) e (2), isolatamente considerati. Infatti porre eguale a zero il differenziale di H, dopo aver tenuto conto della sola (1), ovvero della sola (2), implica pur sempre $d\boldsymbol{H} = 0$.

Giova tuttavia, come apparirà dallo studio del caso generale, considerare a parte tali soluzioni. Comincerò pertanto da esse.

4. - Moti stazionari, che provengono dall'integrale delle aree.

Data la forma semplicissima che assume l'integrale delle aree (1) in variabili canoniche ϑ, f, φ; p_ϑ, p_f, p_φ, ci sarà comodo usufruirne.

In generale si ha

$$\gamma_1 = \operatorname{sen}\vartheta \cos f\,, \quad \gamma_2 = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} f\,, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta\,, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} Ap &= \operatorname{sen} f\, p_\vartheta + \cos f\,\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\,p_f + \frac{\cos f}{\operatorname{sen}\vartheta}\,p_\varphi\,,\\ Bq &= -\cos f\, p_\vartheta + \operatorname{sen} f\,\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\,p_f + \frac{\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}\vartheta}\,p_\varphi\,,\\ Cr &= \qquad\qquad\quad -p_f\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

([1]) Il lettore voglia riferirsi alla regola enunciata nella Nota: *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi*, § 5, in questi « Rendiconti », 3 marzo 1901, fasc. 5°; [in questo vol.: III, pp. 101-106].

donde

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = p_\varphi ,$$

e, dovendosi ora porre $A = B = 2$, $C = 1$,

$$H = p^2 + q^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - s^2\gamma_1 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(p_\vartheta^2 + \frac{\cos^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\,p_f^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\,p_\varphi^2 + 2\,\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\,p_f p_\varphi\right) + \frac{1}{2}\,p_f^2 - s^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos f ,$$

$$p_\varphi = s\lambda . \tag{1'}$$

Portiamo in H il valore (1′), e sostituiamo in pari tempo a p_f una variabile ε, definita come segue:

$$\varepsilon = \frac{(1 + \operatorname{sen}^2\vartheta)p_f + s\lambda\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\vartheta}} . \tag{5}$$

La H diventa una funzione di p_ϑ, ε, ϑ, f e precisamente

$$H = \tfrac{1}{4}(p_\vartheta^2 + \varepsilon^2) + \tfrac{1}{2}s^2\left(\frac{\lambda^2}{1 + \operatorname{sen}^2\vartheta} - 2\operatorname{sen}\vartheta\cos f\right).$$

È bene osservare che il cambiamento di variabili (3), (4), (5) può essere eseguito senza timore di lasciar sfuggire alcuna soluzione particolare. Infatti la trasformazione, definita dalle (3), (4), (5), è biunivoca e regolare per tutti i valori finiti delle variabili, eccettuato soltanto il valore $\operatorname{sen}\vartheta = 0$, cioè $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Ora il sistema (K) non ammette alcuna soluzione particolare, per la quale possano annullarsi ad un tempo (qualunque sia t) γ_1 e γ_2 (²).

Secondo la regola generale, le soluzioni stazionarie, di cui andiamo in cerca, debbono soddisfare alla equazione $dH = 0$, cioè

$$\frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \tfrac{1}{2}p_\vartheta = 0 , \qquad \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \tfrac{1}{2}\varepsilon = 0 ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 , \qquad \frac{\partial H}{\partial f} = s^2\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f = 0 .$$

(²) Supponendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (e quindi $\gamma_3 = \pm 1$, dalle $d\gamma_1/dt = \gamma_2 r - \gamma_3 q$, $d\gamma_2/dt = \gamma_3 p - \gamma_1 r$, risulta $q = 0$, $p = 0$, nè può quindi essere soddisfatta la $2dq/dt = -rp - s^2\gamma_2$, che è pure una delle equazioni (K).

Ne deduciamo (dovendosi escludere, come s'è detto or ora, che sen ϑ si annulli per tutti i valori di t)

$$p_\vartheta = 0\,, \qquad \varepsilon = 0\,, \qquad \operatorname{sen} f = 0\,,$$

mentre ϑ soddisferà alla equazione $\partial \boldsymbol{H}/\partial\vartheta = 0$, ossia (ponendovi oramai $\cos f = \pm 1$) alla

$$\left(\frac{\lambda^2 \operatorname{sen}\vartheta}{(1+\operatorname{sen}^2\vartheta)^2} \pm 1\right)\cos\vartheta = 0\,. \tag{6}$$

Si vede che p_ϑ, ε, f, ϑ assumono tutte valori costanti; costante rimane pure p_f, in virtù della (5), e, per conseguenza $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; p, q, r. Si tratta dunque di *rotazioni uniformi*.

Da $p_\vartheta = 0$, $\operatorname{sen} f = 0$ segue che γ_2 e q si annullano, cioè che l'asse y è orizzontale ($\gamma_2 = 0$) e che l'asse di rotazione appartiene al piano meridiano contenente il baricentro ($q = 0$). Combinando queste due circostanze, risulta che l'asse di rotazione è, rispetto allo spazio, necessariamente orientato secondo la verticale; lo si può del resto anche desumere dalla formula $\gamma_3 p - \gamma_1 r = 0$, che è diretta conseguenza di $\gamma_2 = 0$.

Per fissare la posizione dell'asse di rotazione nel corpo, bisogna ricorrere alla (6), distinguendo le due eventualità

$$\cos\vartheta = 0\,, \tag{6$_a$}$$

$$\frac{\lambda^2 \operatorname{sen}\vartheta}{(1+\operatorname{sen}^2\vartheta)^2} = \mp 1\,. \tag{6$_b$}$$

a) Se si annulla $\cos\vartheta$, cioè γ_3, la (5), facendovi $\varepsilon = 0$, porge $p_f = 0$; quindi anche $r = 0$ e siamo ricondotti alle rotazioni intorno all'asse baricentrico. I valori costanti degli argomenti p_ϑ, ε, ϑ, ed f, da cui dipende $\boldsymbol{H}$, sono in questo caso 0, 0, $\pi/2$, e 0 ovvero π, secondochè $\cos f = \pm 1$, secondochè cioè il baricentro O cade al disotto o al disopra del punto di sospensione Ω. Risguardando come variabili indipendenti p_ϑ, ε e $\gamma_3 = \cos\vartheta$, $\varepsilon' = \operatorname{sen} f$, dovremo di conformità porre in $\boldsymbol{H}$

$$\operatorname{sen}\vartheta = |1-\gamma_3^2|^{1/2}, \qquad \cos f = \pm\, |1-\varepsilon'^2|^{1/2}.$$

Formiamo la $d^2\boldsymbol{H}$ relativa ai valori $p_\vartheta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, o, ciò che torna lo stesso, sviluppiamo $\boldsymbol{H}$ in serie di Mac-Laurin, lasciando i termini d'ordine superiore al secondo. Avremo

$$\boldsymbol{H} = \tfrac{1}{2}s^2\left(\frac{\lambda^2}{2} \mp 2\right) + \tfrac{1}{4}\left\{p_\vartheta^2 + \varepsilon^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2} \mp 2\right)s^2\gamma_3^2 \pm 2s^2\varepsilon'^2\right\} + \ldots\,.$$

I termini in parentesi costituiscono una forma definita, quando si adottano i segni superiori, e in questo caso soltanto (O sotto Ω). È la ben nota condizione di stabilità.

b) Se ϑ soddisfa alla (6_b), siccome l'angolo ϑ è, per sua definizione, compreso fra 0 e π e quindi $\operatorname{sen}\vartheta > 0$, deve intanto anche il secondo membro essere positivo, talchè $f = \pi$ (e non $f = 0$). Ciò posto, già lo sviluppo di H in funzione degli argomenti p_ϑ, ε, $\varepsilon' = \operatorname{sen} f$ (trattando ϑ come un parametro) mostra che c'è instabilità. Si ha infatti, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in ε',

$$H = \tfrac{1}{2}s^2\left(\frac{\lambda^2}{1+\operatorname{sen}^2\vartheta} + 2\operatorname{sen}\vartheta\right) + \tfrac{1}{4}(p_\vartheta^2 + \varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}s^2\operatorname{sen}\vartheta\cdot\varepsilon'^2\,,$$

e la parte di secondo ordine non è una quadrica definita.

5. - Moti stazionari, che provengono dall'integrale della Kowalevsky.

Introducendo una variabile ausiliaria ε, si può evidentemente sostituire alla (2) il sistema equivalente

$$(2') \qquad s^2\gamma_1 = \mu^2 s^2\cos\varepsilon - p^2 + q^2\,,$$

$$(2'') \qquad s^2\gamma_2 = \mu^2 s^2\operatorname{sen}\varepsilon - 2pq\,.$$

Ci converrà, in questa ricerca, risguardare come parametri indipendenti, atti a fissare lo stato di moto del sistema (oltre l'angolo di precessione φ, che non interviene esplicitamente nelle formule) p, q, r, γ_1 ed ε, rimanendo γ_2 definita dalla ($2''$), e, si intende, γ_3 dalla identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Rispetto a queste variabili (la cui sostituzione alle primitive è senza riserve legittima, data la forma lineare delle ($2''$) sì rapporto a γ_2 che a $\operatorname{sen}\varepsilon$) l'integrale (2) della Kowalevsky è sostituito dalla ($2'$). Per trovare i moti stazionari corrispondenti, cominceremo coll'eliminare γ_1 da H a mezzo della ($2'$), ciò che porge

$$H = 2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - \mu^2 s^2\cos\varepsilon\,.$$

Ponendo eguale a zero il differenziale di questa funzione H, si ha

$$p = 0\,, \qquad r = 0\,, \qquad \operatorname{sen}\varepsilon = 0\,.$$

Dacchè si annullano insieme p ed r, si tratta di rotazioni attorno all'asse y, le quali avvengono (§ 2) come se il detto asse fosse tenuto fisso in posizione orizzontale.

Per la stabilità si richiede che d^2H equivalga ad una quadrica definita in quattro argomenti ($2(n-m)$, dice la regola). La funzione H dipende da tre variabili soltanto, p, r, ε; d^2H equivale per conseguenza ad una forma irriducibile con tre argomenti al più. Dovremmo dedurne che c'è instabilità.

Effettivamente non si può concludere in modo diverso, se si vuol proprio aver riguardo alla completa (³) stabilità. Giova tuttavia osservare in generale che quando, come nel caso presente, si tratta di una funzione H, che dipende da meno di $2(n-m)$ parametri, quelli che mancano assumono sostanzialmente il carattere di coordinate ignorate. Ha allora interesse, per i corrispondenti moti stazionari, la questione della stabilità, anche se, o meglio anzi, in quanto la si restringa ai soli parametri da cui H effettivamente dipende.

Ciò posto, nell'esempio attuale, saranno da considerare i soli parametri p, r, ε.

Come si rileva immediatamente dalla espressione di H, si ha stabilità od instabilità secondochè ε ha il valore 0, oppure ha il valore π (nel caso generale, in cui la costante μ non è zero) (⁴).

Per interpretare questo risultato, ricorriamo alla (2′), la quale, per le soluzioni in questione, si riduce a

$$s^2\gamma_1 = \pm \mu^2 s^2 + q^2 .$$

Supponendo $\varepsilon = 0$, bisogna prendere nel secondo membro il segno $+$, e allora γ_1 rimane costantemente positivo: se invece $\varepsilon = \pi$, allora γ_1 assume anche valori negativi. Infatti, ponendo, come a § 2, $\gamma_1 = \cos u$, la (2′) diviene

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = s^2(\mu^2 + \cos u) .$$

Qualora $\cos u$ rimanesse costantemente positivo, non potrebbe u variare sempre nello stesso senso e dovrebbe quindi annullarsi du/dt, ossia $\mu^2 + \cos u$, il che implica contraddizione.

In definitiva dunque queste rotazioni attorno ad un asse orizzontale riescono stabili od instabili, secondochè il baricentro O rimane o non rimane costantemente al disotto dell'asse di rotazione.

(³) Per quanto, si intende bene *relativa* (agli integrali, o relazioni invarianti generatrici).

(⁴) Per $\mu = 0$, anche il parametro ε sparisce dall'espressione di H, la quale si riduce a $2p^2 + r^2/2$. Dovendosi aver riguardo a questi soli parametri, le corrispondenti soluzioni sono stabili.

6. - Relazioni invarianti, che caratterizzano gli ∞^4 moti stazionari Σ del caso generale.

Dobbiamo eliminare da H due variabili a mezzo delle (A). In primo luogo ci è lecito ritenere γ_3 non identicamente nulla, poichè, per $\gamma_3 = 0$, la (1) non contiene r (la (2) ne è sempre indipendente), e quindi, rimanendo escluso che sia r tra quei parametri che si eliminano da H a mezzo delle (A), si dovrebbe avere, per le conseguenti soluzioni stazionarie, $\partial \boldsymbol{H}/\partial r = \partial H/\partial r = r = 0$; e si ricadrebbe quindi, rammentando il § 2, in uno dei due casi già considerati.

Ciò posto, adotteremo come variabili indipendenti p, q, ε (e il solito angolo di precessione φ) intendendo di eliminare, da H, γ_1 a mezzo della (2′), ed r a mezzo della (1), il che appunto può farsi per essere γ_3 non identicamente nulla. Va da sè che, nella (1) stessa, γ_1 e γ_2 sono da ritenersi definite dalle (2′), (2″) e $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Avremo così

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_1}{\partial p} = -\frac{2}{s^2}\,p, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} = \frac{2}{s^2}\,q, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} = -\mu^2 \operatorname{sen} \varepsilon = -\frac{1}{s^2}\,(s^2\gamma_2 + 2pq),\\
&\frac{\partial \gamma_2}{\partial p} = -\frac{2}{s^2}\,q, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} = -\frac{2}{s^2}\,p, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} = \mu^2 \cos \varepsilon = \frac{1}{s^2}\,(s^2\gamma_1 + p^2 - q^2),\\
&\frac{\partial \gamma_3}{\partial p} = -\frac{1}{\gamma_3}\left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial p}\right) = \frac{2}{s^2\gamma_3}\,(\gamma_1 p + \gamma_2 q),\\
&\frac{\partial \gamma_3}{\partial q} = -\frac{1}{\gamma_3}\left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial q}\right) = -\frac{2}{s^2\gamma_3}\,(\gamma_1 q - \gamma_2 p),\\
&\frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\gamma_3}\left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{2\mu^2}{\gamma_3}\,(\gamma_1 \operatorname{sen} \varepsilon - \gamma_2 \cos \varepsilon) =\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{s^2\gamma_3}\left\{2\gamma_1 pq - \gamma_2(p^2 - q^2)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

D'altra parte, a norma della (1),

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dr}{dp} &= \frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial p},\\
\frac{dr}{dq} &= \frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial q},\\
\frac{dr}{d\varepsilon} &= \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon},
\end{aligned}
\right.
$$

dalle quali, essendo

$$\frac{\partial r}{\partial p} = -\frac{2\gamma_1}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} = -\frac{2p}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} = -\frac{2q}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} = -\frac{r}{\gamma_3},$$

segue immediatamente

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dp} &= \frac{2}{s^2\gamma_3^2}\left\{-s^2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_3(p^2+q^2) - r(\gamma_1 p + \gamma_2 q)\right\}, \\ \frac{dr}{dq} &= \frac{2}{s^2\gamma_3^2}\left\{-s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p)\right\}, \\ \frac{dr}{d\varepsilon} &= \frac{2}{s^2\gamma_3^2}\left\{-s^2\gamma_3(\gamma_1 q - \gamma_2 p) + \gamma_3 q(p^2+q^2) - \right. \\ &\qquad \left. -\gamma_1 pqr + \tfrac{1}{2}\gamma_2(p^2-q^2)r\right\}. \end{aligned} \right.$$

Siamo ora in grado di calcolare le derivate di $\boldsymbol{H}(p, q, \varepsilon)$. Infatti, sostituendo nella H, a $s^2\gamma_1$, il suo valore (2′) e seguitando a ritenere r definita dalla (1), si può scrivere

$$\boldsymbol{H} = 2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - \mu^2 s^2 \cos\varepsilon\,,$$

donde

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{H}}{dp} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial r}\frac{dr}{dp} = 4p + \frac{2r}{s^2\gamma_3^2}\left\{-s^2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_3(p^2+q^2) - r(\gamma_1 p + \gamma_2 q)\right\}, \\ \frac{d\boldsymbol{H}}{dq} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial r}\frac{dr}{dq} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2}\left\{-s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p)\right\}, \\ \frac{d\boldsymbol{H}}{d\varepsilon} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial r}\frac{dr}{d\varepsilon} = \mu^2 s^2 \operatorname{sen}\varepsilon + r\frac{dr}{d\varepsilon} = s^2\gamma_2 + 2pq + r\frac{dr}{d\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

ed è facile verificare che sussiste la identità

$$(10) \qquad \frac{d\boldsymbol{H}}{d\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\left\{ q\frac{d\boldsymbol{H}}{dp} - \left(p + \frac{s^2\gamma_3}{r}\right)\frac{d\boldsymbol{H}}{dq}\right\}.$$

Le soluzioni stazionarie sono contraddistinte dalle condizioni

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dp} = 0\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{H}}{dq} = 0\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{H}}{d\varepsilon} = 0,$$

le quali, in causa della (10), si riducono alle prime due (numero appunto conforme alla regola).

Dacchè, come già abbiamo notato, è da escludersi che si annulli r, la $d\boldsymbol{H}/dq = 0$ equivale a

$$-s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) = 0 .$$

Questa equazione ha un significato semplicissimo. Essendo per le (K)

$$\frac{dr}{dt} = s^2\gamma_2 , \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p ,$$

essa esprime che $\gamma_3(dr/dt) - r(d\gamma_3/dt) = 0$, ossia che fra r e γ_3 passa, durante tutto il movimento un rapporto costante, *non nullo, nè infinito*, perchè nè r, nè γ_3 sono identicamente nulli. Potremo pertanto ritenere

$$\nu r = s\gamma_3 , \tag{11}$$

designando con ν una costante finita e diversa da zero.
Con questa osservazione il nostro sistema

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dp} = 0 , \qquad \frac{d\boldsymbol{H}}{dq} = 0$$

diventa

$$\left\{ \begin{aligned} &(2\nu p - s\gamma_1)(p + \nu s) + (2\nu q - s\gamma_2)q = 0 , \\ &\quad -\gamma_2 \ \ (p + \nu s) + \qquad\qquad \gamma_1 \, q = 0 . \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Le soluzioni stazionarie corrispondenti hanno caratteri diversi, secondochè per esse il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\nu p - s\gamma_1 & 2\nu q - s\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 2\nu(\gamma_1 p + \gamma_2 q) - s(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

è, o no, diverso da zero.