III.

SUI MOTI STAZIONARI DEI SISTEMI OLONOMI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1° sem. 1901),
pp. 137-143 (*).

La regola per la determinazione di moti stazionari dei sistemi olonomi (a legami indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative), che ho avuto l'onore di comunicare a codesta Accademia poche settimane or sono [1], è enunciata nella ipotesi che le variabili di riferimento sieno canoniche. La stessa regola vale però in generale, comunque si scelgano le variabili. È questo un risultato pressochè ovvio, che mi permetto tuttavia di formulare esplicitamente, perchè può far comodo nelle applicazioni particolari. Pensiamo per es. alla dinamica dei sistemi rigidi. Si sa bene quanto più perspicue riescono le formule, allorchè si usano direttamente le caratteristiche u, v, w; p, q, r e i coseni direttori. La osservazione accennata permette di profittarne anche per lo studio dei moti stazionari. Ne darò prossimamente un esempio, esaminando il caso trattato dalla signora KOVALEVSKY.

Prima di abbandonare il campo generale, mi sembra a proposito un po' di critica del concetto di stazionarietà.

Se si piglia la definizione del sig. ROUTH [2] nel suo aspetto puramente formale, si arriva subito alla conclusione (§ 6) che qualsiasi soluzione particolare delle equazioni del moto si può risguardare come stazionaria, purchè soltanto si fissino le variabili in modo opportuno.

Dovremo inferirne che la nozione di stazionarietà è destituita di ogni fondamento reale? La intuizione fisica ce lo vieta assolutamente. Essa ci mostra che certe forme di movimento, per es. le traslazioni e rotazioni uniformi di un solido, hanno peculiari caratteri di semplicità e di rego-

---

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 3 marzo 1901.

(1) Sedute del 6 e 20 gennaio u. s. [in questo vol.: II, pp. 87-100].

(2) *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, « Advanced Part », § 111. Questa definizione trovasi riportata nella seconda delle Note citate, a pag. 95.

larità, che le distinguono in modo netto da altri moti, possibili nelle stesse condizioni. D'altra parte gli esempi tutti addotti dal sig. ROUTH (e così quelli della Nota precedente) fanno fede che, in certi casi almeno, la sua definizione discrimina veramente i moti stazionari (nel senso fisico della parola) da quelli che non lo sono. Quale è la circostanza, che interviene in tali casi ad assicurare la validità di un criterio per se stesso insignificante?

Questa semplicemente che gli integrali, o relazioni invarianti, (A), generatrici, per dir così, delle soluzioni stazionarie, senza essere soggette ad alcuna condizione quantitativa, sono però sempre *uniformi*, nel senso di POINCARÉ.

Cerchiamo di rendercene conto, richiamandoci al contenuto sperimentale del concetto di stazionarietà. Come ha rilevato il sig. ROUTH, la proprietà fisica che caratterizza il comportamento stazionario di un determinato movimento Σ, è la seguente:

Modificando egualmente le condizioni del moto in due istanti qualisivogliono t', t'', i moti perturbati che ne conseguono, Σ', Σ'' diciamo, presentano tali relazioni da potersi, sotto un certo rapporto, considerare come equivalenti (3).

Un tale enunciato si può in verità ricavare come conseguenza logica della semplice definizione formale, ma bisogna essenzialmente avvertire che le relazioni, di cui si tratta, hanno interesse solo allorquando corrispondono a circostanze fisicamente afferrabili. Ora *una condizione analitica non uniforme* (nel senso predetto, e quindi ∞-forme) *non ha alcun valore fisico*, perchè, mentre essa dovrebbe vincolare i valori di un qualche parametro angolare (di un azimut per es.), non dà luogo invece ad alcuna restrizione apparente, in quanto viene soddisfatta da valori del parametro costituenti un insieme condensato rispetto a tutti i valori possibili.

Sarà pertanto necessario che le relazioni fra due generici moti perturbati Σ', Σ'', le quali contraddistinguono la stazionarietà, sieno uniformi; e così dovrà intendersi completata la definizione del sig. ROUTH.

Tra queste relazioni sono evidentemente comprese quelle espresse dalle (A) (dagli integrali cioè o equazioni invarianti generatrici della soluzione Σ, che si considera). D'altra parte, si potrebbe riconoscere senza difficoltà che le relazioni tutte fra Σ' e Σ'' riescono uniformi, quando ciò avviene per le (A). La condizione che le (A) sieno uniformi è dunque insieme necessaria e sufficiente.

Ciò posto, possiamo domandarci quale sia la portata della regola

(3) Nel caso tipico della ignorazione di talune coordinate, l'andamento dei due moti Σ', Σ'' è identico, per quanto concerne le velocità tutte e le coordinate *palesi*. In istanti corrispondenti $t'+t$, $t''+t$, possono differire, dall'uno all'altro di essi, soltanto i valori delle coordinate *ignorate*.

costruttiva, di cui sopra. Meno grande di quello, che la sua generalità formale potrebbe lasciar supporre. Infatti, volendo conseguire moti assolutamente ([4]) stazionari, bisognerà partire da integrali *uniformi*; e i problemi più importanti della meccanica posseggono i soli integrali classici, dotati di tale proprietà ([5]).

Di qua si ricava per es. il seguente enunciato negativo: Il problema degli n corpi non comporta altre forme di moti assolutamente stazionari, oltre le soluzioni particolari di LAPLACE, in cui gli n corpi ruotano uniformemente, mantenendo una configurazione (piana o rettilinea) invariabile.

1. – Richiamerò, per maggior chiarezza, il procedimento esposto nella prima delle Note citate.

Sia $H(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la energia totale di un sistema olonomo, a legami indipendenti dal tempo e soggetto a forze conservative; p_i, x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ designando variabili canoniche.

Siano

$$F_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{A}$$

m relazioni invarianti (ovvero integrali, nel qual caso le costanti si intendono incluse nelle F) pel moto del sistema, indipendenti dal tempo, in involuzione, e risolubili rispetto ad altrettante p; $p_1, p_2, \ldots p_m$ per es.

Rappresentando con $\boldsymbol{H}$ ciò che diviene H, quando ogni p_s $(s=1, 2, \ldots, m)$ si sostituisce col suo valore (A), per definire le soluzioni particolari Σ si deve porre

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} = 0\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = m+1, \ldots, n); \tag{B}$$

e queste equazioni invarianti traggono le

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, .., m)$$

come necessaria conseguenza.

Si ha pertanto, sopra ogni Σ, $d\boldsymbol{H} = 0$.

2. – Ciò posto, si immagini di sostituire alle variabili p, x un sistema qualunque di $2n$ parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$, atti a definire lo stato di moto del sistema, almeno in un intorno Γ di un qualche insieme di valori $p_i^{(0)}$, $x_i^{(0)}$

([4]) POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. I, cap. V.

([5]) Del pari, per moti stazionari in senso relativo, converrà ricorrere a relazioni invarianti pure uniformi.

delle p, x, soddisfacenti alle (A), (B). Intendendo di riferirsi a un tale intorno Γ, si potrà asserire:

1) Le (A), espresse per le ε, sono atte a definirne m, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, poniamo, in funzione delle rimanenti.

2) Tenendo conto delle (A), si ha una trasformazione biunivoca fra i due sistemi di $2(n-m)+m$ variabili $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{2n}$.

3) La funzione $\boldsymbol{H}^*$ $(\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{2n})$, che si ottiene dalle energia totale H^* (espressa per le ε), sostituendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ coi valori definiti dalle (A), coincide con $\boldsymbol{H}$, cioè ne differisce soltanto per la trasformazione suddetta.

Appare di qua che la equazione

$$\text{(B*)} \qquad d\boldsymbol{H}^* = 0$$

equivale a $d\boldsymbol{H} = 0$, ossia alle (B), e può quindi servire (assieme alle (A), espresse per le ε) a caratterizzare le soluzioni particolari Σ, direttamente in variabili ε.

3. – Nella Nota del 20 gennaio ho mostrato come il criterio di stabilità delle Σ si desuma dalla forma quadratica $d^2\boldsymbol{H}$. Essa è certamente riducibile ad una forma Q in $2(n-m)$ argomenti: secondochè questa Q è o no definita, le Σ sono stabili od instabili. A vero dire, ho ivi considerato soltanto il caso generale, in cui le (B) si suppongono univocamente risolubili rispetto alle p_i, x_i $(i = m+1, \ldots, n)$, e quindi la forma Q non è ulteriormente riducibile. L'enunciato criterio di stabilità vale però in ogni caso [6] (semprechè, bene inteso, le (B) sieno compatibili e si abbiano quindi effettivamente soluzioni Σ). Lo si dimostra senza difficoltà, riprendendo per un momento le variabili P, X, adoperate in quella occasione, e la corrispondente espressione $\boldsymbol{H}'$ di $\boldsymbol{H}$.

Infatti dire che le (B) (pur essendo compatibili) non sono risolubili rispetto alle p_i, x_i equivale a dire che le equazioni

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial P_i} = 0\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = m+1, \ldots, n),$$

non sono indipendenti (pur ammettendo soluzioni comuni). Ne viene che il determinante funzionale delle (B′) si annulla per i valori che verificano le equazioni stesse.

---

[6] Rimangono soltanto escluse le soluzioni multiple, corrispondenti (con ovvio linguaggio geometrico) a punti non ordinari della varietà definita dalle (B). Per questi casi singolari, non basta evidentemente la forma $d^2\boldsymbol{H}$ a decidere la questione della stabilità, ma bisognerebbe ricorrere ai differenziali d'ordine superiore.

Ma questo determinante funzionale è il discriminante della forma $d^2\boldsymbol{H}'$; e il suo annullarsi esclude che la forma stessa sia definita. Le soluzioni Σ sono dunque tutte instabili.

Ora la quadrica $d^2\boldsymbol{H}$ equivale pur sempre alla $d^2\boldsymbol{H}'$, e si potrà perciò in questo caso far dipendere da meno di $2(n-m)$ argomenti. In altri termini le forme ridotte Q (a $2(n-m)$ argomenti) della $d^2\boldsymbol{H}$ sono a lor volta riducibili e quindi non definite. *c.d.d.*

4. – Dalle ipotesi del § 2 segue immediatamente che la quadrica $d^2\boldsymbol{H}^*$ equivale alla $d^2\boldsymbol{H}$ (si passa dall'una all'altra mediante la trasformazione, di cui sub 2), estesa ai differenziali dei due sistemi di variabili). Ne viene che $d^2\boldsymbol{H}^*$ è riducibile e ogni sua ridotta Q^* (in $2(n-m)$ argomenti) serve, al pari di Q, a decidere la questione della stabilità.

I coefficienti della forma $d^2\boldsymbol{H}^*$ dipenderanno in generale da alcune delle variabili $\varepsilon_{m+1}, ..., \varepsilon_{2n}$ (quelle — e ve ne ha m almeno — che non rimangono vincolate dalle (B*)). Possiamo per altro star certi che i caratteri algebrici della forma $d^2\boldsymbol{H}^*$, e quindi anche d'una sua ridotta Q^*, non dipendono dai valori particolari attribuiti a queste ε.

Due sono infatti i casi possibili: o le (B*) si possono risolvere rispetto a $2(n-m)$ delle ε; o il numero delle (B*) indipendenti è più piccolo di $2(n-m)$. Si vede subito, ritornando anche una volta alle variabili P, X, che ci troveremo nell'uno o nell'altro dei due casi, secondochè le (B') sono o meno indipendenti. Nella prima ipotesi, ogni Q^* equivale sempre, qualunque sieno i valori delle $m\varepsilon$, che possono apparire nei coefficienti, alla medesima quadrica $d^2\boldsymbol{H}'$, a coefficienti costanti. Nella seconda ipotesi, ogni Q^* è riducibile, indipendentemente dai valori delle ε.

5. – Riassumendo, abbiamo la regola seguente:

La costruzione delle soluzioni particolari Σ si può effettuare direttamente, rispetto a qualisivogliano parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2n}$, atti a definire lo stato di moto del sistema.

Si eliminano dapprima, a mezzo degli m integrali o relazioni invarianti conosciute (supposte, bene inteso, in involuzione), *altrettante variabili ε dalla espressione della energia totale H^*.*

Detto poi $\boldsymbol{H}^*$ il risultato della eliminazione, si pone

$$\text{(B*)} \qquad d\boldsymbol{H}^* = 0\,,$$

il che porta altre relazioni invarianti (in numero di $2(n-m)$ al più) *tra le ε.*

Tenendo conto di tutte queste relazioni, si riducono le equazioni del movimento, e si completa, in base ad esse, la determinazione delle Σ.

Non è però necessaria alcuna integrazione per decidere se le Σ stesse *sono o non sono stabili. Basta ricorrere alla forma* $d^2\mathbf{H}^*$, *intendendo nei coefficienti le* ε *legate dalle* (B*), *e attribuendo a quelle, che restano indipendenti, valori numerici arbitrari. Questa forma è certamente riducibile ad una* Q^* *con* $2(n-m)$ *argomenti al più. L'essere, o meno,* Q^* *forma definita, in* $2(n-m)$ *argomenti, non dipende dai valori attribuiti alle* ε, *e costituisce appunto il criterio di stabilità, o rispettivamente di instabilità, per le soluzioni* Σ.

6. – È sempre lecito, immaginando scelte le variabili in modo opportuno, di supporre che una assegnata soluzione particolare Σ di un generico sistema canonico

$$\text{(C)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sia definita dalle equazioni

$$p_1 = 0, \quad x_1 = \varphi(t); \qquad p_i = x_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

essendo per es. $x_1 = 0$ per $t = 0$, e tutto intendendosi regolare in un intorno, comunque piccolo del resto, dei valori $p_i = x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Si avrà, sopra Σ, $\partial H/\partial x_1 = \partial H/\partial x_i = \partial H/\partial p_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, $\partial H/\partial p_1 \gtrless 0$.

Posto $p_i = \partial W/\partial x_i$, la disuguaglianza $\partial H/\partial p_1 \gtrless 0$ ci assicura che esiste un integrale W della equazione $H = P_1$, regolare nell'intorno considerato, il quale, per $x_1 = 0$, si riduce a $x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n$, le P avendo ufficio di costanti. Le equazioni

$$(1) \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad X_k = \frac{\partial W}{\partial P_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

definiscono una trasformazione fra le due coppie di serie di variabili p, x; P, X, biunivoca nel detto intorno, perchè il determinante $\| \partial^2 W/\partial x_i \partial P_k \|$ si riduce, per $p_i = x_i = 0$, a $1/(\partial H/\partial p_i)$, ed è quindi diverso da zero.

D'altra parte le stesse (1) rappresentano, in base al metodo di integrazione di Jacobi, quando vi si faccia $X_1 = t - t_0$, l'integrale generale del sistema (C); le P, t_0, X_2, X_3, ..., X_n sono allora le costanti di integrazione.

Ciò posto, eseguendo la trasformazione (1), le equazioni del moto divengono

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dX_1}{dt} = 1; \qquad \frac{dP_i}{dt} = \frac{dX_i}{dt} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Ogni loro soluzione si potrebbe evidentemente dire stazionaria, prendendo alla lettera la definizione del sig. Routh. In particolare dunque la soluzione Σ, donde abbiamo preso le mosse.