I.

SOPRA ALCUNI CRITERI DI INSTABILITÀ [1]

« Ann. di Mat. », serie 3ª, t. V (1901), pp. 221-308.

Introduzione.

Le prime ricerche sistematiche sulla stabilità si devono a LAGRANGE, il quale nella *Mécanique analytique* espose il metodo delle piccole oscillazioni.

Spetta a DIRICHLET il merito di aver introdotto in questo genere di considerazioni il rigore matematico, mostrando come le condizioni, richieste per la stabilità dall'accennato procedimento, sono effettivamente sufficienti, allorchè si tratta di equilibrio sotto l'azione di forze conservative. Se tali condizioni sieno anche necessarie, e più generalmente fin dove arrivi nelle questioni di stabilità la portata del metodo, rimase a lungo inesplorato. Ma, quando le applicazioni andarono moltiplicandosi, la critica del principio si impose.

L'occasione fu offerta al sig. POINCARÉ dai suoi classici studi sulle curve definite da equazioni differenziali. Nel discutere i caratteri qualitativi delle curve integrali, egli ebbe in particolare ad occuparsi della loro stabilità. Con ciò si trovarono confermati, per i sistemi di secondo e terzo ordine, i criteri di instabilità offerti dal metodo delle piccole oscillazioni.

Poco dopo se ne ebbe conferma, anche per il caso generale, grazie ai lavori del sig. LIAPOUNOFF [2].

(¹) I risultati del presente lavoro si trovano riassunti in tre Note, presentate all'Accademia di Francia (cfr. « Comptes Rendus », 9, 16 e 23 Luglio 1900). [In queste « Opere » ved.: volume primo; XXVIII, p. 461; XXIX, p. 465; XXX, p. 469; N. d. R.].

(²) Cfr. in particolare « Journal de Mathématique », 1897.

Il sig. LIAPOUNOFF dedicò al problema generale della stabilità del movimento varie memorie, nonchè un intero volume, scritto disgraziatamente in lingua russa. Per quanto mi fu dato rilevare dalle brevi relazioni dell'« Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik », l'A. distingue la stabilità passata dalla futura e ottiene in quest'ordine di idee risultati di grande interesse. Rimangono fuor della cerchia dei casi discussi quelli, che io ho qui incominciato a studiare, e che, rispetto alle piccole oscillazioni, sarebbero a dirsi stabili, sì nel passato che nel futuro.

Le stesse ricerche di POINCARÉ mostrarono invece la insufficienza dell'ordinario criterio di stabilità. Ne risultò chiaramente, già nel caso più semplice dei sistemi

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

che non contengono t esplicitamente, come, mentre *la instabilità è carattere puramente qualitativo* (che condizioni di diseguaglianza bastano ad assicurare), *la stabilità è insieme carattere quantitativo*, che richiede cioè condizioni vincolanti la natura delle funzioni X, Y. L'instabilità — dice POINCARÉ — è la regola, la stabilità soltanto eccezione.

Tuttavia, se si suppone $X = \partial U/\partial y$, $Y = -\partial U/\partial x$, la condizione quantitativa è di per sè soddisfatta e i due caratteri di stabilità e di instabilità sono entrambi contraddistinti da condizioni qualitative. Lo stesso avviene (teoremi di DIRICHLET e di LIAPOUNOFF) per l'equilibrio dei sistemi materiali, soggetti a forze conservative.

Sarà ancora così quando dall'equilibrio si passa al movimento?

Quella certa fiducia nella regolarità dei fenomeni naturali, che è nello spirito della meccanica analitica, ci rende inclini a pensarlo.

E vi siamo confortati dagli esempi tutti, integrati finora (in particolare i moti permanenti), nei quali le cose stanno come nel caso dell'equilibrio.

Suggestiva è del pari una proprietà dei sistemi canonici, secondo cui essi godono necessariamente di una certa forma di stabilità, la stabilità alla POISSON [3].

All'incontro ragioni di analogia matematica (in base specialmente alle circostanze, segnalate dallo stesso sig. POINCARÉ per i sistemi (S), allorchè i secondi membri dipendono da t) fanno piuttosto ritenere il contrario.

Comunque, la questione riman dubbia a priori; potrebbe anzi apparire probabile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità assumesse un carattere meno eccezionale di quel che le compete in astratto.

L'esempio concreto, che sarà qui esposto, toglie, a mio credere, ogni speranza in proposito.

Ma, prima di venire a questo esempio, discorriamo brevemente delle considerazioni, che vi conducono e del metodo generale, che io propongo per trattare le questioni di stabilità.

Sia un sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

(3) POINCARÉ, *Mécanique céleste*, Tom. III, Cap. XXVI.

dove le X_i sono funzioni periodiche di t; Σ una sua soluzione periodica.

Si dimostra (Cap. III, § 1) che la Σ è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione puntuale Γ:

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

biunivoca e regolare nell'intorno dell'origine O, e per cui O è un punto unito. (Stabile è a dirsi una trasformazione puntuale Γ, quando, partando da un punto qualunque $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$, abbastanza vicino ad O, le iterazioni — positive o negative — di Σ non fanno mai uscire da un intorno prefissato di O, comunque piccolo).

Tutto si trova in tal modo ricondotto allo studio delle trasformazioni puntuali Γ. Ho considerato dapprima il caso generale, in cui non tutti i moltiplicatori [4] della Γ sono in valore assoluto eguali ad uno. Si riconosce facilmente che c'è instabilità. Questo risultato corrisponde al teorema di LIAPOUNOFF per i sistemi differenziali e fornisce una nuova dimostrazione del detto teorema.

Il caso, in cui tutti i moltiplicatori hanno modulo eguale ad uno, corrisponde alla stabilità nella prima approssimazione, ed è quello appunto, in cui doveva cimentarsi l'efficacia del metodo.

Trattandosi di un primo tentativo, mi son limitato al caso di $m = 2$.

Le trasformazioni da discutere si riducono all'uno o all'altro dei due tipi seguenti:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x_1 = x + \dots, \\ y_1 = y + x + \dots, \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x_1 = x \cos\vartheta - y \operatorname{sen}\vartheta + \dots, \\ y_1 = x \operatorname{sen}\vartheta + y \cos\vartheta + \dots, \end{cases}$$

i termini omessi essendo di dimensione superiore alla prima, rapporto ad x, y.

Ho assegnato un criterio generale di instabilità per il tipo (B); per il (C), che è il più importante, solo introducendo la restrizione che l'angolo ϑ sia commensurabile con 2π.

Comunque, tali criteri di instabilità non sono privi di conseguenze, nei riguardi dei sistemi differenziali.

Essi permettono di constatare la instabilità di certe categorie di soluzioni periodiche, che alla prima approssimazione appariscono stabili.

---

[4] Chiamo brevemente moltiplicatori le radici della equazione caratteristica spettante alla sostituzione lineare, che si ottiene da Γ, limitando le f_i alle loro parti di prim'ordine.

Questo trova a sua volta applicazione nel problema ristretto dei tre corpi. Ho potuto così dimostrare che le soluzioni periodiche, prossime a movimenti circolari uniformi, sono instabili. A vero dire la dimostrazione non abbraccia tutte assolutamente le soluzioni periodiche in discorso: quel che risulta da essa in modo indubbio si è che nel piano dei tre corpi esistono infinite zone di instabilità.

È pur significante che venga fatto di accertare la instabilità proprio in un caso, per il quale tutto sembrerebbe giustificare, dal punto di vista astronomico, la presunzione opposta.

Bisogna concluderne che la stabilità naturale va intesa in un senso meno restrittivo ([5]). Tale è precisamente il concetto, che informa le più recenti indagini del sig. POINCARÉ ([6]).

Dal punto di vista matematico, la questione della stabilità non è con ciò chiusa e nemmeno sprovvista ormai di interesse.

Sembrami infatti sotto ogni rapporto desiderabile che sia messo in evidenza il carattere generalmente instabile delle Γ, anche quando tutti i moltiplicatori sono in modulo eguali all'unità. Cominciando dal caso più semplice, si tratterà di discutere le trasformazioni (C), per ϑ qualunque. Si incontreranno probabilmente delle difficoltà, ma lo studio non pare addirittura inaccessibile, ond'è mio proposito di provarmici quanto prima.

Ben altrimenti difficile è la questione, che si presenta come fine ultimo di questo campo di ricerche, la questione cioè di assegnare le condizioni restrittive, che caratterizzano la assoluta stabilità. Non è però il caso di preoccuparsene troppo, dacchè, come abbiam visto, ciò non ha essenziale importanza per la meccanica celeste.

([5]) E ciò senza uscire dall'ambito della meccanica pura. Se poi si considera il movimento dei corpi celesti nei suoi rapporti cogli altri fenomei fisici, non basta modificare il concetto di stabilità, ma si rende addirittura inattendibile l'ipotesi di una qualsiasi forma di stabilità.

A questa conclusione arrivano, per vie diverse, Lord KELVIN e POINCARÉ. Cfr. W. THOMSON, *On the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Energy*, « Proceeding of the Royal Society of London », vol. L, 1891, pag. 85.

POINCARÉ, *Sur la stabilité du système solaire*, « Annuaire du Bureau des Longitudes », 1898.

([6]) *Mécanique céleste*, loc. cit.

A questo proposito è fondamentale una osservazione del sig. BOHLIN. Cfr. *Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme*, « Acta Mathematica », tom. X, 1887.

Capitolo I.

NOZIONE DI STABILITÀ PER LE TRASFORMAZIONI PUNTUALI

1. - Definizioni ed esempi.

Prendiamo a considerare una generica trasformazione reale

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{1}$$

in m variabili, dove le f_i sono a ritenersi funzioni analitiche [7], regolari nell'intorno del punto $x_i = 0$, o, come diremo brevemente dall'origine O. Supporremo che le f_i si annullino in O e di più che il loro determinante funzionale si mantenga in un certo intorno di O diverso da zero.

La trasformazione (1) è allora biunivoca e continua, almeno in un certo campo C, comprendente l'origine, al quale intenderemo costantemente di riferirci.

Interpretando le x_i e le $x_i^{(1)}$ come coordinate di due punti P e P_1 di uno stesso spazio rappresentativo, le (1) definiscono una corrispondenza Γ (biunivoca e regolare in C), per cui si passa da P a P_1.

Scriveremo brevemente

$$P_1 = \Gamma P . \tag{2}$$

La trasformazione inversa Γ^{-1} rimane definita dalle formule

$$x_i^{(-1)} = \bar{f}_i(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (i = 1, 2, ..., m), \tag{1'}$$

che si traggono risolvendo le (1) rapporto alle x_i (e sostituendo $x_i^{(-1)}$ ad x_i, x_i ad $x_i^{(1)}$). Le (1') si compendiano in

$$P_{-1} = \Gamma^{-1} P , \tag{2'}$$

P_{-1} designando il punto di coordinate $x_i^{(-1)}$.

Come da P si passa a P_1, così, se P_1 è contenuto in C, applicando nuovamente la trasformazione Γ, potremo passare a un nuovo punto P_2; se questo è in C, a P_3, e così di seguito. Convenendo di usare indiffe-

[7] Nel presente lavoro ho supposto dappertutto di aver a fare con funzioni analitiche; basterebbero per altro — lo si riconoscerà ovviamente — condizioni assai meno restrittive.

rentemente P o P_0, x_i od $x_i^{(0)}$, e ponendo in generale

$$P_n = \Gamma P_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

avremo, per definire le coordinate $x_i^{(n)}$ di P_n, il sistema ricorrente

$$(3) \qquad x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots . \end{pmatrix}.$$

In modo analogo le potenze negative della corrispondenza Γ conducono successivamente ai punti $P_{-1}, P_{-2}, \ldots$, le cui coordinate si hanno prendendo le iterazioni della (1′)

$$(3') \qquad x_i^{(-n)} = \bar{f}_i(x_1^{(-n+1)}, x_2^{(-n+1)}, \ldots, x_m^{(-n+1)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots . \end{pmatrix}.$$

La Γ e le sue potenze, positive e negative, ammettono l'origine O come punto unito. Se dunque P cade in O, anche ogni P_n coincide con O. La continuità di queste trasformazioni ci assicura che, *per ogni assegnato* n, si può prendere P abbastanza vicino ad O, affinchè P_1, P_{-1}, P_2, $P_{-2}, \ldots, P_n$, P_{-n} risultino pure vicini ad O, quanto ci piace.

Che cosa avviene quando n non è fisso, ma può crescere indefinitamente?

Non è più lecito ragionare nello stesso modo e conviene contemplare le due ipotesi possibili, cioè:

Scelto un numero ε positivo, arbitrariamente piccolo,

1) ne esiste un altro $\eta > 0$, così fatto che, per tutti i punti P, le cui coordinate x_i sono in valore assoluto minori di η, risulta

$$(4) \qquad |x_i^{(n)}| < \varepsilon , \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

qualunque sia il numero intero n positivo o negativo.

2) non esiste un numero η, dotato della detta proprietà, e quindi, non per tutti i punti P, abbastanza vicini all'origine, risultano soddisfatte le (4).

Nel primo caso la trasformazione (1) si dirà *stabile*, nel secondo *instabile*. Possiamo anche dire sotto forma più comoda:

Vi ha stabilità, ogniqualvolta, assegnato un intorno, comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H tale che, per tutti i punti P di H, ogni P_n rimane in E. Vi ha invece instabilità, ogniqualvolta, per quanto piccolo si prenda H, c'è sempre qualche punto P di H, per cui un P_n almeno non è contenuto in E.

È appena necessario osservare che i concetti di stabilità e di instabilità sono indipendenti dalle coordinate di riferimento. Se si fa un generico cambiamento di coordinate (di tipo (1)), sostituendo alle x_i nuove variabili y_i, la trasformazione, relativa alle y, è, insieme colla (1), stabile od instabile. Ciò è del resto messo direttamente in evidenza dalle ultime definizioni, che sono, anche nella forma, indipendenti dal sistema di riferimento.

Indichiamo qualche esempio.

a) Una sostituzione ortogonale

$$x_i^{(1)} = \sum_1^m{}_j \alpha_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

è stabile, poichè ogni P_n dista [8] dall'origine come P.

b) Una trasformazione omografica (reale, si intende)

$$x_i^{(1)} = \omega_i x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

è necessariamente instabile, a meno che non sia involutoria ($\omega_i = \pm 1$), o in particolare identica. Basta infatti che vi sia una delle ω diversa da ± 1, ω_1 per es., perchè $x_1^{(n)} = \omega_1^n x_1$, oppure $x_1^{(-n)} = (1/\omega_1^n) x_1$ crescano indefinitamente con n (per quanto si prenda il punto P vicino all'origine, colla sola avvertenza che la sua coordinata x_1 non sia nulla).

c) La trasformazione in due variabili

$$x_1 = x - y(x^2 + y^2),$$
$$y_1 = y + x(x^2 + y^2)$$

è instabile, pur essendo stabile la parte di prim'ordine, che si riduce all'identità. Per riconoscerlo, designiamo con r la distanza di P dall'origine, e in generale con r_n quella di P_n. Avremo manifestamente

$$r_1^2 = r^2(1 + r^4),$$
$$r_n^2 = r_{n-1}^2(1 + r_{n-1}^4), \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

[8] Chiamiamo, secondo la consuetudine, distanza di due punti x_i, y_i di una varietà astratta la funzione $\left|\sqrt{\sum_1^m{}_i (x_i - y_i)^2}\right|$.

donde apparisce che, per $r > 0$, le r_n costituiscono una successione positiva sempre crescente. Esiste quindi un limite, finito od infinito. Un limite finito l è da escludere, poichè questo l (> 0) dovrebbe verificare l'equazione

$$l^2 = l^2(1 + l^4)\,,$$

il che è impossibile. Ne viene che r_n cresce indefinitamente con n, comunque si prenda piccolo r, purchè diverso da zero. La trasformazione è per conseguenza instabile.

d) Dalla formula di addizione delle funzioni ellittiche si può trarre un elegante esempio di trasformazione stabile.

Riferiamoci alle notazioni di Weierstrass e ricordiamo che, quando gli invarianti g_2, g_3 sono reali e il discriminante $\varDelta = g_2^3 - 27g_3^2$ è positivo, la curva

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3) \tag{5}$$

consta di un ramo infinito e di un ovale (fig. 1), entrambi simmetri-

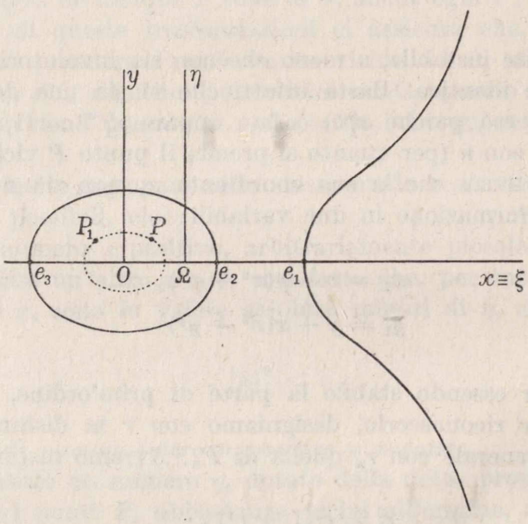

Fig. 1.

camente disposti rispetto all'asse delle ascisse. L'ovale taglia quest'ultimo nei due punti $\xi = e_2$, $\xi = e_3$.

Attribuiamo a g_2 un valore positivo fisso, riservandoci di far variare g_3.

L'ovale, definito dalla equazione (5), che possiamo scrivere [9]

$$\eta^2 = 4\left(\xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}}\right)^2\left(\xi - 2\sqrt{\frac{g_2}{12}}\right) + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3\,,$$

si riduce, per $g_3 = \sqrt{g_2^3/27}$, al punto O di coordinate $\xi = -\sqrt{g_2/12}$, $\eta = 0$. Facendo decrescere g_3, a partire dal detto valore, avremo una serie di ovali, che si inviluppano mutuamente e tali che ne passa uno per ogni punto appartenente a un certo intorno di O. Collochiamo l'origine in questo punto, sostituendo alle coordinate ξ, η,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}}\,, \\ y &= \eta\,. \end{aligned}\right.$$

La famiglia degli ovali è allora rappresentata dalla equazione

$$(5')\qquad y^2 + \sqrt{12 g_2}\,x^2 - 4x^3 = \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3\,.$$

Sia $P(x, y)$ un punto generico nell'intorno dell'origine e immaginiamo g_3 definito dalla (5'). In virtù delle (6) e (5'), avremo le identità

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= pu + \sqrt{\frac{g_2}{12}}\,, \\ y &= p'u\,. \end{aligned}\right.$$

Ciò premesso, ricorriamo alle formule di addizione

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left\{\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right\}^2 - pu - pv\,,$$

$$p'(u+v) = \frac{pu\,p'v - pv\,p'u - p(u+v)\{p'v - p'u\}}{pv - pu}\,,$$

e portiamovi per pu, $p'u$ i valori (7), per pv, $p'v$ una coppia arbitraria, i cui elementi sieno legati dalla relazione

$$\overline{p'v}^2 = 4\overline{pv}^3 - g_2 pv - g_3\,,$$

[9] I radicali si intenderanno tutti presi positivamente.

dove, bene inteso, g_3 ha il valore (5'). Così operando, si passa dal punto P ad un nuovo punto P_1 di coordinate

$$
(8) \qquad \begin{cases} x_1 = p(u+v) + \sqrt{\dfrac{g_2}{12}}\,, \\ y_1 = p'(u+v)\,, \end{cases}
$$

che soddisfanno, come le x, y, alla equazione (5'). Il punto P_1 apparterrà ancora all'ovale, passante per P, se, come noi vogliamo supporre, l'argomento v si sceglie reale. (Infatti $u+v$ risulta allora, come u, del tipo $\omega_3 +$ una quantità reale.)

In queste condizioni la trasformazione, per cui si passa da x, y ad x_1, y_1, è stabile, poichè le sue iterazioni (positive o negative) non fanno mai uscire dall'ovale della famiglia (5'), passante per P. Assegnato quindi un intorno arbitrariamente piccolo E dell'origine, si ha il corrispondente H della definizione generale di stabilità, nell'area racchiusa da un qualsiasi ovale (5'), tutto contenuto in E.

Possiamo costruire esplicitamente le formule di trasformazione, eseguendo le indicate sostituzioni.

Diamo a pv un valore costante $a - \sqrt{g_2/12} > e_1$. Siccome, per $g_3 = \sqrt{g_2^3/27}$, è $e_1 = 2\sqrt{g_2/12}$, ed e_1 decresce con g_3, così basterà supporre $a > 3\sqrt{g_2/12}$, ossia $4a > \sqrt{12 g_2}$, per essere certi che pv supera e_1. La equazione

$$
\overline{p'v}^2 = 4\overline{pv}^3 - g_2 pv - g_3
$$

diventa

$$
\overline{p'v}^2 = (4a - \sqrt{12g_2})a^2 + y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3\,,
$$

donde, per essere $4a - \sqrt{12g_2} > 0$,

$$
\pm\, p'v = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}}\left\{1 + \frac{y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})}\right\}^{1/2},
$$

che è una funzione regolare di x, y nell'intorno dell'origine.

Adottiamo per es. il segno $+$ (il che vuol dire v compreso fra 0 ed ω_1) e facciamo per brevità

$$
(9) \qquad \begin{cases} f = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}}\left\{1 + \dfrac{y^2 + \sqrt{12g_2}\,x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})}\right\}^{1/2} \\ \quad = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}}\left\{1 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{y^2 + \sqrt{12g_2}x^2}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})} + \dots\right\}. \end{cases}
$$

Avuto riguardo alle (7), (8) e alle

$$pv = a - \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \qquad p'v = f,$$

le formule di addizione si scriveranno

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{f-y}{a-x}\right\}^2 - x - a + 3\sqrt{\dfrac{g_2}{12}}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\left[\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{f-y}{a-x}\right\}^2 - x - a + 3\sqrt{\dfrac{g_2}{12}}\right](y-f) + xf - ay}{a-x}. \end{cases}$$

I secondi membri risultano effettivamente funzioni olomorfe di x, y (per valori abbastanza piccoli di queste variabili) e si annullano in O.

È forse superfluo aggiungere che si potrebbe verificare con calcolo diretto che la trasformazione (10) lascia invariante ogni curva della famiglia (5′), constatando che dalle (10) segue identicamente

$$y_1^2 + \sqrt{12g_2}\,x_1^2 - 4x_1^3 = y^2 + \sqrt{12g_2}\,x^2 - 4x^3,$$

donde la stabilità della trasformazione.

2. - Instabilità delle trasformazioni, che ammettono almeno un moltiplicatore di modulo diverso da uno.

La trasformazione (1), mettendone in evidenza i termini di primo ordine, può essere scritta

$$x_i^{(1)} = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{im}x_m + f'_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le f'_i cominciano con termini di secondo grado nelle x_i.

Moltiplicatori della trasformazione si chiameranno le radici della equazione

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11}-\omega & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-\omega & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Potremmo addirittura supporre le variabili scelte in modo che la parte di prim'ordine possegga la sua forma canonica.

Ma, per lo scopo nostro, ci basterà richiamare [10] dalla teoria delle sostituzioni lineari che le variabili si possono sempre (e in infiniti modi) scegliere in guisa che ogni c_{ij} $(i > j)$ si annulli. La equazione $D(\omega) = 0$ si riduce allora a

$$(c_{11} - \omega)(c_{22} - \omega) \dots (c_{mm} - \omega) = 0 \, ,$$

donde apparisce che le c_{ii} coincidono coi moltiplicatori ω della sostituzione. Nessuno di essi può essere eguale a zero, poichè altrimenti si annullerebbe in O il determinante funzionale delle $x_i^{(1)}$ rapporto alle x_i, il che è stato escluso.

Immaginando eseguito il cambiamento di variabili, per cui la parte di prim'ordine assume la forma anzidetta ($c_{ij} = 0$, per $i < j$), la trasformazione si presenta sotto l'aspetto

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \omega_1 x_1 + f_1' \, , \\ x_2^{(1)} = c_{21} x_1 + \omega_2 x_2 + f_2' \, , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m^{(1)} = c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \dots + \omega_m x_m + f_m' \, . \end{array} \right.$$

Le ω si intenderanno ordinate in guisa che $|\omega_1| \geqslant |\omega_2| \geqslant \dots \geqslant |\omega_m|$. Potrò poi supporre (intendendo di riferirmi al caso generale, in cui non tutti i moltiplicatori hanno modulo eguale ad 1) $|\omega_1| > 1$, poichè, qualora tutte le $|\omega|$ fossero $\leqslant 1$, sarebbe necessariamente < 1 il loro minimo modulo $|\omega_m|$ e allora prenderei invece a considerare la trasformazione inversa Γ^{-1}, che ha per moltiplicatori le $1/\omega_i$.

1) *Moltiplicatori reali.* – Facciamo dapprima l'ipotesi che le ω_i sieno tutte reali. La trasformazione assegnata (1) si riduce allora alla forma (11) mediante un cambiamento di variabile *reale*. Reale è dunque la trasformazione (11) e si tratta di provarne la instabilità.

Cominciamo perciò dall'osservare che, le f_i' essendo almeno di secondo grado nelle x_i, se si pone

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \, ,$$

si può assegnare un numero positivo M tale che, per tutti i valori delle x_i,

---

[10] Cfr. p. es. E. PICARD, *Traité d'analyse*, t. III, pag. 259-260.

che appartengono al campo C (di regolarità delle (1)), si abbia

$$|f'_i| \leqslant MR^2 \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Scegliendo poi M abbastanza grande, risulterà altresì

$$|c_{ij}| < M \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ j < i).$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili definito dalle formule

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda^{i-1} x_i , \\ y_i^{(1)} &= \lambda^{i-1} x_i^{(1)}, \end{aligned}$$

dove λ rappresenta un numero positivo < 1, del cui valore ci riserviamo di disporre più innanzi.

Ponendo per brevità

$$\begin{aligned} L_1 &= 0 , \\ L_2 &= c_{21} y_1 , \\ L_3 &= c_{31} \lambda y_1 + c_{32} y_2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m &= c_{m1} \lambda^{m-2} y_1 + c_{m2} \lambda^{m-3} y_2 + \ldots + c_{mm-1} y_{m-1} \end{aligned}$$

e designando con f''_i ciò che diviene la funzione f'_i, quando si sostituiscono le y alle x, le (11) assumono l'aspetto

$$y_i^{(1)} = \omega_i y_i + \lambda L_i + \lambda^{i-1} f''_i \qquad (i = 1, 2, ..., m). \tag{12}$$

Se si rappresenta con r^2 la somma dei quadrati delle y, si ha chiaramente, in virtù delle formule di trasformazione,

$$R^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^{2m-2}} r^2 ;$$

osservando le $|f'_i| \leqslant MR^2$, si traggono le disuguaglianze

$$|f''_i| \leqslant \frac{M}{\lambda^{2m-2}} r^2 \qquad (i = 1, 2, ..., m), \tag{13}$$

per tutti i valori delle y appartenenti al campo C.

Dalle $|c_{ij}| < M$, $|y_i| \leqslant r$ segue inoltre

$$|L_1| = 0 \leqslant \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_2| \leqslant |c_{21}|\,|y_1| \leqslant Mr \leqslant \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_3| \leqslant \lambda |c_{31}|\,|y_1| + |c_{32}|\,|y_2| \leqslant M_r(\lambda + 1) \leqslant Mr\,\frac{Mr}{1-\lambda},$$

. . . .

. . . .

$$|L_m| \leqslant \lambda^{m-2}|c_{m1}|\,|y_1| + \lambda^{m-3}|c_{m2}|\,|y_2| + \ldots + |c_{mm-1}|\,|y_{m-1}| \leqslant$$
$$\leqslant Mr(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \ldots + 1) \leqslant \frac{Mr}{1-\lambda},$$

le quali si riassumono in

$$(14) \qquad |L_i| \leqslant \frac{Mr}{1-\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ciò posto, distribuiamo le variabili y_i in due gruppi, attribuendo al primo gruppo y_1 e tutte quelle y (se ve n'ha) d'indice $i > 1$, per cui la ω_i corrispondente fosse, in valore assoluto, eguale ad ω_1. Avendosi per es.

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \ldots = |\omega_\mu| > |\omega_{\mu+1}|,$$

apparterranno al primo gruppo

$$y_1, y_2, \ldots, y_\mu;$$

al secondo

$$y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m.$$

Poniamo

$$\varrho^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\mu^2.$$

Dico che, per r abbastanza piccolo, se le y sono tali che

$$\frac{\varrho^2}{r^2} > \frac{1}{2},$$

risulta ancora, in seguito alla trasformazione (12),

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} > \frac{1}{2},$$

il significato di r_1, ϱ_1 (e in generale di r_n, ϱ_n) essendo manifesto.

Le (12) porgono

$$\varrho_1^2 = \omega_1^2\varrho^2 + \lambda \sum_1^{\mu}{}_i (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) + \sum_1^{\mu}{}_i (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i''),$$

$$r_1^2 = \omega_1^2\varrho^2 + \sum_{\mu+1}^{m}{}_i \omega_i^2 y_i^2 + \lambda \sum_1^{m}{}_i (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) +$$

$$+ \sum_1^{m}{}_i (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'').$$

Avendo riguardo alle (13) e (14), otteniamo agevolmente

$$\left| \sum_1^{m}{}_i (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) \right| \leqslant m \left\{ \frac{2|\omega_1| M}{1-\lambda} + \frac{M^2\lambda}{(1-\lambda)^2} \right\} r^2,$$

$$\left| \sum_1^{m}{}_i (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'') \right| \leqslant$$

$$\leqslant m \left\{ \frac{M^2}{\lambda^{4m-4}} r + 2|\omega_1| \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} \right\} r^3.$$

Siccome, supponendo $\lambda < 1/2$ ed $r < 1$, si ha (m essendo almeno uguale ad 1)

$$\frac{1}{1-\lambda} < 2, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1, \quad r\lambda^3 < \frac{1}{8}, \quad 2\lambda^{2m+1} < \frac{1}{4}, \quad \frac{2\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{2|\omega_1| M}{1-\lambda} + \frac{M^2\lambda}{(1-\lambda)^2} < 4|\omega_1| M + 2M^2,$$

$$\frac{M^2}{\lambda^{4m-4}} r + 2|\omega_1| \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ M^2 r \lambda^3 + 2|\omega_1| M \lambda^{2m+1} + 2M^2 \frac{\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} \right\} <$$

$$< \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ \frac{1}{4} |\omega_1| M + \frac{5}{8} M^2 \right\} < \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \{4|\omega_1| M + 2M^2\},$$

così, designando con $\omega_1^2 N$ la costante (indipendente da λ) $m\{4\,|\omega_1|\,M+2M^2\}$, potremo ritenere

$$\left|\sum_1^m{}_i\,(2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2)\right| \leqslant \omega_1^2 N r^2\,,$$

$$\left|\sum_1^m{}_i\,(\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'')\right| \leqslant \frac{\omega_1^2 N r^3}{\lambda^{4m-1}}\,.$$

Lo stesso procedimento mostra che si ha a fortiori

$$\left|\sum_1^\mu{}_i\,(2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2)\right| \leqslant \omega_i^2 N r^2\,,$$

$$\left|\sum_1^\mu{}_i\,(\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'')\right| \leqslant \frac{\omega_1^2 N r^3}{\lambda^{4m-1}}\,.$$

Ne deduciamo

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} \geqslant \frac{\omega_1^2\varrho^2 - \omega_1^2 N\lambda\left(1+\dfrac{r}{\lambda^{4m}}\right)r^2}{\omega_1^2\varrho^2 + \sum\limits_{\mu+1}^m{}_i\,\omega_i^2 y_i^2 + \omega_1^2 N\lambda\left(1+\dfrac{r}{\lambda^{4m}}\right)r^2}\,.$$

Ma, dall'essere $\omega_{\mu+1}^2 \geqslant \omega_{\mu+2}^2 \geqslant \ldots \geqslant \omega_m^2$, ricordando la ipotesi $\varrho^2/r^2 > 1/2$, si trae evidentemente

$$\sum_{\mu+1}^m{}_i\,\omega_i^2 y_i^2 \leqslant \omega_{\mu+1}^2\,(y_{\mu+1}^2 + y_{\mu+2}^2 + \ldots + y_m^2) = \omega_{\mu+1}^2(r^2 - \varrho^2) \leqslant \omega_{\mu+1}^2\varrho^2\,,$$

e perciò, dividendo per $\omega_1^2 r^2$ sopra e sotto,

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} \geqslant \frac{\dfrac{\varrho^2}{r^2} - N\lambda\left(1+\dfrac{r}{\lambda^{4m}}\right)}{(2-\sigma)\dfrac{\varrho^2}{r^2} + N\lambda\left(1+\dfrac{r}{\lambda^{4m}}\right)}\,,$$

dove, per brevità, si è scritto σ al posto di $1 - \omega_{\mu+1}^2/\omega_1^2$, che è, teniamolo presente, una frazione propria essenzialmente maggiore di zero ([11]).

Attribuiamo a λ un valore determinato inferiore ad $1/2$, a $\sigma/12N$,

([11]) Questa osservazione, e quindi il successivo ragionamento, cadrebbero in difetto, qualora, per essere ogni $|\omega_i|$ eguale ad $|\omega_1|$, venissero a mancare le variabili del secondo gruppo. Ma in tal caso ϱ coincide con r e quindi senz'altro $\varrho_1^2/r_1^2 = 1 > 1/2$.

e tale che

$$\omega_1^2(1 - 2N\lambda) = \tau$$

risulti maggiore dell'unità (la qual cosa, per essere $\omega_1^2 > 1$, è certo possibile, purchè si prenda λ abbastanza piccolo).

Supposto $r < \lambda^{4m}$, sarà soddisfatta la disuguaglianza

$$N\lambda\left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right) < \frac{\sigma}{12}\cdot 2 < \frac{\sigma}{3}\,\frac{\varrho^2}{r^2},$$

talchè

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} > \frac{\dfrac{\varrho^2}{r^2}\left(1 - \dfrac{\sigma}{3}\right)}{\dfrac{\varrho^2}{r^2}\,2\left(1 - \dfrac{\sigma}{3}\right)} > \frac{1}{2},$$

c. d. d.

Appoggiandosi sopra questo lemma, si dimostra subito la instabilità della nostra trasformazione.

Dalla espressione di ϱ_1^2 e dalle precedenti disuguaglianze segue

$$\varrho_1^2 \geqslant \omega_1^2\varrho^2 - \omega_1^2 r^2 N\lambda\left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right).$$

Dacchè $r^2 < 2\varrho^2$ e la differenza $\omega_1^2(1 - 2N\lambda)$ s'è chiamata τ (> 1), avremo ancora

$$\varrho_1^2 \geqslant \tau\varrho^2 - \frac{\sqrt{8}N\omega_1^2}{\lambda^{4m-1}}\,\varrho^3.$$

Delimitiamo un intorno E dell'origine, contenuto, si intende, in C, per cui sia ad un tempo

$$r < 1,$$
$$r < \lambda^{4m},$$
$$r < \frac{\lambda^{4m-1}}{\sqrt{8}N\omega_1^2}(\tau - \tau'),$$

τ' designando un numero positivo minore di τ, ma maggiore dell'unità.

Se, si parte da un punto P di E, tale che $\varrho^2/r^2 > 1/2$, ma del resto vicino ad O quanto si vuole, la iterazione della (11) fa necessariamente uscire da E. Si ha infatti

$$\varrho_1^2 \geqslant \varrho^2 \left(\tau - \frac{\sqrt{8} N \omega_1^2 \varrho}{\lambda^{4m-1}}\right) \geqslant \varrho^2 \left(\tau - \frac{\sqrt{8} N \omega_1^2 r}{\lambda^{4m-1}}\right),$$

ma $\tau - (\sqrt{8} N \omega_1^2 r / \lambda^{4m-1}) > \tau'$, dunque (il segno di eguaglianza rimanendo escluso, perchè si suppone r, e quindi ϱ, > 0)

$$\varrho_1^2 > \tau' \varrho^2 .$$

Qualora ogni P_n appartenesse ad E, sarebbe altresì, per il lemma testè dimostrato,

$$\varrho_n^2 > \tau' \varrho_{n-1}^2 , \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

donde

$$\varrho_n^2 > \tau'^n \varrho^2 ,$$

e quindi ϱ_n crescerebbe indefinitamente con n, il che implica contraddizione.

Moltiplicatori qualunque. – Partiamoci ancora dalle formule (11), operando però in guisa da far sparire gli elementi immaginari.

Per ipotesi, le (11) stesse provengono da una trasformazione (1) essenzialmente reale; i moltiplicatori ω complessi sono dunque due a due coniugati. Li supporremo ordinati in guisa che, pur essendo rispettate le disuguaglianze

$$|\omega_1| \geqslant |\omega_2| \geqslant \ldots \geqslant |\omega_m| ,$$

due moltiplicatori coniugati occupino posti contigui. Essendo ω_q, ω_{q+1} una tal coppia di moltiplicatori coniugati, $|\omega_q|$ il modulo, ϑ_q l'argomento di ω_q, avremo

$$\omega_q = |\omega_q| (\cos \vartheta_q + i \operatorname{sen} \vartheta_q) ,$$
$$\omega_{q+1} = |\omega_q| (\cos \vartheta_q - i \operatorname{sen} \vartheta_q) .$$

Al campo reale della trasformazione (1) originariamente proposta corrispondono, nella (11), valori complessi coniugati per ogni coppia di variabili x_q, x_{q+1} (e così $x_q^{(1)}$, $x_{q+1}^{(1)}$); valori reali per le altre variabili $x_p (x_p^{(1)})$ [12].

[12] È facile rendersene conto, pensando alle relazioni tra le radici della equazione caratteristica $D(\omega) = 0$ e i sistemi di variabili, atti ad attribuire alla (1) la forma (11).

Se dunque si pone

$$x_q = \xi_q + i\xi_{q+1}\,,$$
$$x_{q+1} = \xi_q - i\xi_{q+1}\,,$$

per ogni coppia di indici q, $q+1$, riferentisi a moltiplicatori complessi,

$$x_p = \xi_p\,,$$

per ogni valore dell'indice p spettante ad un moltiplicatore reale; ed analogamente

$$x_q^{(1)} = \xi_q^{(1)} + i\xi_{q+1}^{(1)}\,,$$
$$x_{q+1}^{(1)} = \xi_q^{(1)} - i\xi_{q+1}^{(1)};\,,$$
$$x_p^{(1)} = \xi_p^{(1)}\,,$$

la trasformazione (11) fra le x_i e le $x_i^{(1)}$ darà luogo ad una trasformazione *essenzialmente reale* fra le ξ_i e le $\xi_i^{(1)}$ definita da formule dei tipi seguenti

$$(11')\left\{\begin{array}{ll} (11'_a) & \xi_p^{(1)} = \bar{c}_{p1}\xi_1 + \bar{c}_{p2}\xi_2 + \dots + \omega_p\xi_p + \bar{f}_p\,, \\ (11'_b) & \left\{\begin{array}{l} \xi_q^{(1)} = \bar{c}_{q1}\xi_1 + \bar{c}_{q2}\xi_2 + \dots + \bar{c}_{q\,q-1}\xi_{q-1} + \\ \qquad + |\omega_q|(\xi_q \cos\vartheta_q - \xi_{q+1}\operatorname{sen}\vartheta_q) + \bar{f}_q\,, \\ \xi_{q+1}^{(1)} = \bar{c}_{q+1\,1}\xi_1 + \bar{c}_{q+1\,2}\xi_2 + \dots + \bar{c}_{q+1\,q-1}\xi_{q-1} + \\ \qquad + |\omega_q|(\xi_q \operatorname{sen}\vartheta_q + \xi_{q+1}\cos\vartheta_q) + \bar{f}_{q+1}\ (^{13})\,, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

designando le $\bar{c}$ costanti reali e le $\bar{f}$ funzioni pure reali delle ξ, di secondo ordine almeno nelle ξ stesse.

Questa trasformazione (11′) equivale evidentemente (a meno di un cambiamento lineare reale di variabili) alla primitiva (1). Per dimostrarne la instabilità, basterà porre

$$\eta_p = \lambda^{p-1}\xi_p; \qquad \eta_q = \lambda^q\xi_q; \qquad \eta_{q+1} = \lambda^q\xi_{q+1}$$

(e corrispondentemente

$$\eta_p^{(1)} = \lambda^{p-1}\xi_p^{(1)}; \qquad \eta_q^{(1)} = \lambda^q\xi_q^{(1)}; \qquad \eta_{q+1}^{(1)} = \lambda^q\xi_{q+1}^{(1)})\,,$$

(13) Le $(11'_b)$ seguono da:

$$x_q^{(1)} = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + \omega_q x_q + f'_q\,,$$

separando la parte reale dalla immaginaria.

procedendo poi in modo perfettamente analogo a quello tenuto nel caso dei moltiplicatori tutti reali.

Rimane così dimostrata la proposizione generale: *Le trasformazioni puntuali sono certamente instabili, allorchè non tutti i moltiplicatori hanno moduli eguali all'unità.*

Vedremo tra poco che anche quest'ultima circostanza è ben lungi dall'assicurare la stabilità.

Capitolo II.

TRASFORMAZIONI BINARIE A MOLTIPLICATORI EGUALI ALL'UNITÀ

1. - Tipi non contemplati nel precedente capitolo di trasformazioni a due variabili.

Suppongasi $m = 2$. I due moltiplicatori ω_1, ω_2 hanno entrambi modulo eguale all'unità nei seguenti casi:

$$\omega_1 = \pm 1 , \qquad \omega_2 = \mp 1 ,$$
$$\omega_1 = \pm 1 , \qquad \omega_2 = \pm 1 ,$$
$$\omega_1 = e^{i\vartheta} , \qquad \omega_2 = e^{-i\vartheta} ,$$

designando ϑ un argomento reale.

Nel primo caso le formule corrispondenti alle (11) del precedente capitolo

$$x_1^{(1)} = \omega_1 x_1 + f_1'(x_1, x_2) ,$$
$$x_2^{(1)} = c_{21} x_1 + \omega_2 x_2 + f_2'(x_1, x_2) ,$$

iterate una volta, danno

$$x_1^{(2)} = \omega_1 x_1^{(1)} + f_1'(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1 + f(x_1, x_2) ,$$
$$x_2^{(2)} = c_{21} x_1^{(1)} + \omega_2 x_2^{(1)} + f_2'(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = c_{21}(\omega_1 + \omega_2) x_1 + x_2 + g(x_1, x_2) =$$
$$= x_2 + g(x_1, x_2) ,$$

f e g essendo, si intende, d'ordine superiore al primo. Questa trasformazione a moltiplicatori unità, ponendo per maggior comodo x, y in luogo di x_1, x_2; x_1, y_1 in luogo di $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, si scriverà

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y)\,, \\ y_1 = y + g(x, y)\,. \end{cases}$$

Alle stesse formule si perviene nel secondo caso, quando $c_{21} = 0$. Ma se $c_{21} \gtrless 0$, allora ponendo

$$x_1 = \frac{x}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}\,, \qquad x_2 = y\,;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{x_1}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}\,, \qquad x_2^{(2)} = y_1\,,$$

si è invece condotti al tipo

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y)\,, \\ y_1 = y + x + g(x, y)\,. \end{cases}$$

Nel caso dei moltiplicatori complessi le $(11_b')$ del precedente capitolo, con semplice scambio di notazioni, danno

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x_1 = x \cos\vartheta - y \operatorname{sen}\vartheta + f(x, y)\,, \\ y_1 = x \operatorname{sen}\vartheta + y \cos\vartheta + g(x, y)\,. \end{cases}$$

La (A) vi rientra come caso particolare, per $\vartheta = 0$. Giova tuttavia considerarla a parte, perchè essa si può trattare con procedimenti, che non mi è finora riescito di estendere alla (C).

Vien qui a proposito di osservare che, oltre al caso $\vartheta = 0$, anche per ogni valore di ϑ commensurabile con 2π, lo studio della stabilità della (C) si riconduce all'identica questione per una trasformazione di tipo (A). Supposto infatti $\vartheta = 2h\pi/k$ (h e k numeri interi primi tra loro) e detta Γ la corrispondente trasformazione (C), si riconosce immediatamente che la potenza Γ^k di Γ rientra nel tipo (A). Ora Γ e Γ^k sono insieme stabili od instabili.

2. - Forma ridotta del tipo (A). Caratteri invariantivi. Interpretazione proiettiva.

Le trasformazioni

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y) \,, \\ y_1 = y + g(x, y) \,, \end{cases}$$

conservano evidentemente il medesimo aspetto comunque si cambino le variabili.

Consideriamo in particolare le sostituzioni lineari

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \,, \\ \eta = \gamma x + \delta y \,, \end{cases}$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \xi_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 \,, \\ \eta_1 = \gamma x_1 + \delta y_1 \,, \end{cases}$$

e serviamocene per far assumere una forma opportuna alle parti di secondo grado φ e ψ di f e g.

Posto

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma \,,$$

la risoluzione delle (1) e (2) porge

$$\text{(1')} \qquad \begin{cases} Dx = \delta\xi - \beta\eta \,, \\ Dy = -\gamma\xi + \alpha\eta \,, \end{cases}$$

$$\text{(2')} \qquad \begin{cases} Dx_1 = \delta\xi_1 - \beta\eta_1 \,, \\ Dy_1 = -\gamma\xi_1 + \alpha\eta_1 \,, \end{cases}$$

e la (A) nelle nuove variabili si scriverà

$$\xi_1 = \xi + \frac{\alpha}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\beta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \dots,$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{\gamma}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\delta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \dots,$$

i termini omessi essendo di dimensione superiore alla seconda.

Disponiamo dei coefficienti γ, δ in modo che la parte di secondo grado nella espressione di η_1

$$\frac{\gamma}{D^2}\varphi(\delta\xi-\beta\eta, -\gamma\xi+\alpha\eta)+\frac{\delta}{D^2}\psi(\delta\xi-\beta\eta, -\gamma\xi+\alpha\eta)$$

contenga η a fattore. Basterà rendere nullo il coefficiente di ξ^2, ossia

$$\gamma\varphi(\delta, -\gamma)+\delta\psi(\delta, -\gamma)=0\,. \tag{3}$$

Questa relazione ci fornisce per il rapporto γ/δ *almeno un valore reale.* Designiamolo con γ'/δ' e poniamo

$$\gamma=\lambda\gamma',$$
$$\delta=\lambda\delta',$$

lasciando per un momento indeterminato il moltiplicatore λ (non nullo). Prendiamo ancora

$$\alpha=\lambda\alpha',$$
$$\beta=\lambda\beta',$$

dove α' e β' sono arbitrari colla sola condizione che il determinante

$$D'=\alpha'\delta'-\beta'\gamma'$$

sia diverso da zero.

La nostra trasformazione diverrà, se riscriviamo x, y; x_1, y_1 al posto di ξ, η; ξ_1, η_1,

$$\text{(A}'\text{)}\qquad\left\{\begin{aligned} x_1&=x+\frac{1}{\lambda}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)+\ldots,\\ y_1&=y+\frac{y}{\lambda}(2b_{12}x+b_{22}y)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

dove le a e le b hanno valori numerici perfettamente determinati. La (A′) è a risguardarsi come una *forma ridotta* della nostra trasformazione.

In generale a_{11} sarà diverso da zero. Si può allora prendere $\lambda=a_{11}$ e, col porre

$$\frac{2a_{12}}{a_{11}}=a\,,\qquad \frac{a_{22}}{a_{11}}=b\,,\qquad \frac{2b_{12}}{a_{11}}=c\,,\qquad \frac{b_{22}}{a_{11}}=d\,,$$

la (A′) assume l'aspetto

$$(\mathrm{A}_1') \qquad \begin{cases} x_1 = x + x^2 + y(ax + by) + \dots\,, \\ y_1 = y + y(cx + dy) + \dots \end{cases}$$

A questo tipo è riducibile ogni trasformazione (A), *per cui le due forme quadratiche* φ *e* ψ (parti di secondo grado in f e g) *non hanno fattori comuni* [14]. Per convincersene basta osservare che non può in tale ipotesi annullarsi l'a_{11} della corrispondente ridotta (A′), poichè allora le due combinazioni $(\alpha\varphi + \beta\psi)/D^2$, $(\gamma\varphi + \delta\psi)/D^2$, che compaiono (salvo la notazione) in (A′), ammetterebbero un fattore comune, e lo stesso dovrebbe aver luogo per φ e ψ.

Rispetto alle possibili riduzioni di una generica trasformazione (A), è bene rilevare che le proprietà proiettive del sistema delle due forme binarie φ e ψ (o, se si vuole, della involuzione quadratica $\psi - \mu\varphi = 0$) hanno carattere invariantivo di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili biunivoco nell'intorno dell'origine.

Infatti, per le sostituzioni lineari, ciò risulta dalla osservazione fatta che φ e ψ vengono rimpiazzate dalle due forme $(\alpha\varphi+\beta\psi)/D^2$, $(\gamma\varphi+\delta\psi)/D^2$, che appartengono pure alla involuzione $\psi - \mu\varphi = 0$; per cambiamenti

$$\xi = x + \mathfrak{P}(x, y)\,,$$
$$\eta = y + \mathfrak{Q}(x, y)\,,$$

(con $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ di second'ordine almeno), la cosa è pure evidente, poichè le parti di secondo grado φ e ψ rimangono addirittura inalterate. Ora ogni altro cambiamento di variabili si ottiene componendone due di questi. L'asserto è dunque provato.

Possiamo fare un passo più innanzi in quest'ordine di idee, notando che gli invarianti (in senso geometrico) del sistema delle due involuzioni proiettive

$$(\mathrm{I}_1) \qquad y - \mu x = 0\,,$$
$$(\mathrm{I}_2) \qquad \psi - \mu\varphi = 0\,,$$

sono tutti invarianti assoluti della trasformazione (A).

Ciò risulta dal fatto che, quando si cambian le variabili, le parti di primo e quelle di secondo ordine subiscono, a meno del fattore $1/D^2$, la stessa sostituzione lineare.

---

[14] Per la discussione del paragrafo seguente non si avrebbe alcun sostanziale vantaggio particolarizzando ulteriormente la scelta delle variabili.

Tra gli infiniti elementi della involuzione (I_1) ve ne ha tre, che coincidono con uno dei due della coppia corrispondente (I_2); essi corrispondono alle radici della forma cubica

$$x\psi - y\varphi = 0 \,,$$

e i rispettivi parametri $\mu = y/x$ rimangono definiti dalla equazione

$$\psi(1, \mu) - \mu\varphi(1, \mu) = 0 \,, \tag{3'}$$

che è la (3), in cui si sia posto $-\gamma/\delta = \mu$.

Cambiare variabili in (A) significa, rispetto alle nostre involuzioni proiettive (I_1), (I_2), cambiare i punti fondamentali. Quando si mutan questi, mutano in generale i parametri degli elementi uniti, dunque la equazione (3′), o, ciò che è lo stesso, la (3), non è di per se stessa invariante. (Così per es. la particolarità della forma ridotta (A′) consiste, possiam dire, in ciò che la corrispondente equazione (3′) ammette la radice $\mu = 0$.) *Rimangono però invarianti, qualunque sieno le variabili* (reali), *nelle quali si presenta una trasformazione* (A), *i caratteri di molteplicità e di realità delle radici delle corrispondenti* (3′); in quanto esprimono proprietà proiettive degli elementi uniti. Lo stesso è a dirsi evidentemente per la equazione (3) nel rapporto $-\gamma/\delta = \mu$.

3. - Instabilità del caso generale.

Ogni trasformazione (A), per cui le parti di secondo ordine sono prive di fattori comuni, è riducibile, come abbiamo visto alla forma

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y) \,, \\ y_1 &= y + y(cx + dy) + V(x, y) \,, \end{aligned} \right. \tag{A-}$$

raccogliendosi in U e V i termini di ordine superiore al secondo. Si noti che deve ritenersi

$$d^2 - c(ad - bc) \gtrless 0 \,, \tag{4}$$

altrimenti le due forme $x^2 + y(ax + by)$, $y(cx + dy)$ ammetterebbero il fattore comune $cx + dy$.

Vogliamo dimostrare che queste trasformazioni sono necessariamente instabili.

È opportuno distinguere tre casi: $c < 1$, $c > 1$, $c = 1$.

1) ($c < 1$).

Se $V(x, y)$ non è divisibile per y, sia γx^p ($p > 2$) il termine di dimensione minima, che non contiene y a fattore.

È lecito supporre $y > 0$, poichè si è sempre ricondotti a questo caso, scambiando all'occorrenza y e y_1 in $-y$, $-y_1$ (ciò, che non altera il coefficiente c).

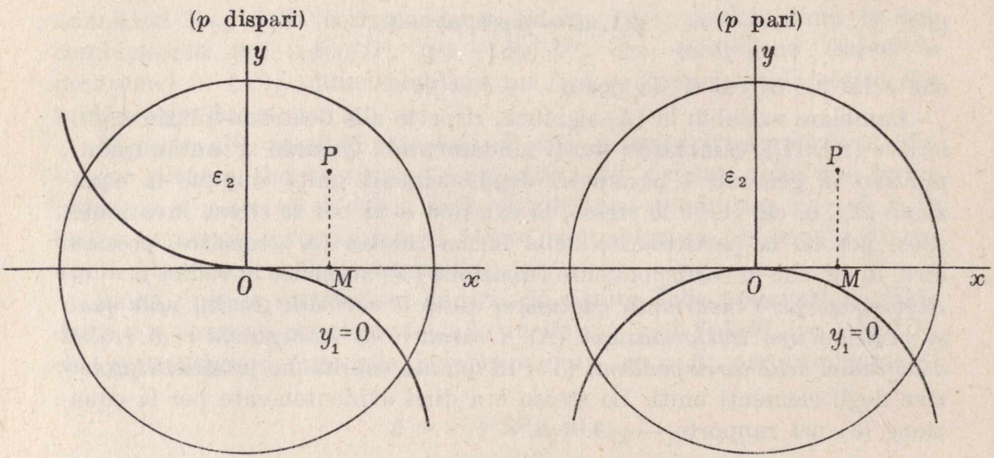

Fig. 2.

La curva (fig. 2)

$$y_1 = y(1 + cx + dy) + V(x, y) = 0\,,$$

che è tangente nell'origine all'asse delle ascisse, rimane per x positivo e abbastanza piccolo, al disotto di quest'asse.

Infatti le derivate della funzione y di x (definita dalla precedente equazione), d'ordine inferiore a p, si annullano in O e la derivata p^{esima} vale $-p\,!\gamma$; lo sviluppo dell'ordinata dei punti della curva in funzione dell'ascissa comincia quindi col termine $-\gamma x^p$.
La y è dunque negativa, per x positivo e non superiore a un certo limite ε_1. In modo analogo, dacchè lo sviluppo di $V(x, 0)$ comincia col termine γx^p, sarà $V(x, 0) \geqslant 0$ per $x \geqslant 0$ e $\leqslant$ ad un certo ε_2, che posso sempre supporre $\leqslant \varepsilon_1$.

Per tutti i punti, appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro O e raggio ε_2, risulta necessariamente

$$(5) \qquad y_1 \geqslant 0\,.$$

(Qualora infatti in un punto P del quadrante fosse $y_1 < 0$, la perpendicolare PM, abbassata da P sull'asse delle ascisse, dovrebbe incontrare la curva $y_1 = 0$. Questo è impossibile, poichè nel quadrante non vi sono punti della curva.)

Se poi $V(x, y) = yV'(x, y)$ (con $V'(x, y)$ funzione regolare di secondo ordine almeno in x, y), il coefficiente di y in y_1, cioè $1 + cx + dy + V'(x, y)$, è essenzialmente positivo per x, y abbastanza piccoli, e la (5) risulta, come sopra, soddisfatta per tutti i punti del primo quadrante di un cerchio di raggio conveniente, che designeremo ancora con ε_2.

Poniamo

$$y = xz .$$

Le due funzioni $U(x, z)$, $V(x, z)$, espresse per x e z, conterranno x^3 a fattore e si potrà scrivere

$$U(x, y) = x^3 U_1(x, z) ,$$

$$V(x, y) = x^3 V_1(x, z) ,$$

U_1 e V_1 mantenendosi finite per x, z abbastanza piccoli, inferiori per es. in valore assoluto ad $\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2$ e $\operatorname{tg} \alpha_1$ rispettivamente.

Intenderemo questi limiti fissati in modo che risulti ulteriormente

$$|az + bz^2 + xU_1(x, z)| < \frac{1}{2} ,$$

il che implica

$$|y(ax + by) + U(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} x^2 ,$$

e per conseguenza

$$x_1 \geqslant x + \frac{1}{2} x^2 , \tag{6}$$

per tutti i punti del settore (terminato inferiormente all'asse delle ascisse) di raggio ε_3 e ampiezza α_1.

Dividendo membro a membro le (A_1'), si ha

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y(1 + cx + dy) + V(x, y)}{x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y)} = \frac{z(1 + cx + dxz) + x^2 V_1(x, z)}{1 + x + xz(a + bz) + x^2 U_1(x, z)} =$$

$$= \{ z(1 + cx + dxz) + x^2 V_1(x, z)\} \{1 + x(1 + az + bz^2) + x^2 U_1(x, z)\}^{-1} ,$$

donde evidentemente (per x inferiore in valore assoluto ad un nuovo limite $\varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_3$)

$$\frac{y_1}{x_1} = z - (1-c)xz + \{(d-a)z - bz^2\}xz + x^2 W(x, z) \tag{7}$$

con $W(x, z)$ funzione finita nel settore $(\varepsilon_4, \alpha_1)$. (Il significato di questa notazione è ovvio).

Dacchè $c < 1$, la differenza $1-c$ ha valore essenzialmente positivo, e basterà prendere z abbastanza piccolo perchè risulti

$$(d-a)z - bz^2 < \frac{1-c}{2}\,. \tag{8}$$

Designo con α, che ho cura di scegliere non superiore ad α_1, un arco tale che, per $0 \leqslant z \leqslant \operatorname{tg}\alpha$, la (8) rimanga soddisfatta.

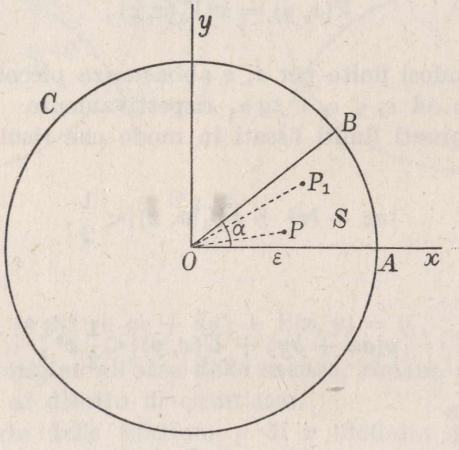

Fig. 3.

Detto M un numero positivo, maggiore di uno qualunque dei valori assunti da $W(x, z)$ in (ε_4, α), prendo infine un numero positivo ε, inferiore ad un tempo ad ε_4, a $(1-c)\operatorname{tg}\alpha/2M$ e a $2/(1-c)$, e considero il settore (ε, α), che designerò con S (fig. 3).

Per ogni punto P di S varranno evidentemente le (5), (6), (7), (8),

$$xW < \frac{1-c}{2}\operatorname{tg}\alpha\,, \tag{9}$$

e

$$1 - \frac{1-c}{2} x > 0 . \tag{10}$$

Dalla (7), considerando che x e z sono in S positivi (o nulli) e avendo riguardo alle (8), (9), si trae

$$\frac{y_1}{x_1} \leqslant z - (1-c)xz + \frac{1-c}{2} xz + x \frac{1-c}{2} \operatorname{tg} \alpha ,$$

che può anche essere scritta

$$\frac{y_1}{x_1} \leqslant \operatorname{tg} \alpha - \left(1 - \frac{1-c}{2} x\right)(\operatorname{tg} \alpha - z) .$$

In causa della (10), ne viene

$$\frac{y_1}{x_1} \leqslant \operatorname{tg} \alpha . \tag{11}$$

Siccome, per le (5) e (6), sappiamo già che il punto $P_1(x_1, y_1)$ appartiene al primo quadrante, la (11) ci mostra che esso è interno all'angolo al centro $\widehat{AOB}$ del settore S. Il settore gode dunque della proprietà che, applicando ai suoi punti la trasformazione (A_1'), non si esce mai attraverso ai lati; o si rimane entro S, o si va addirittura fuori del cerchio C, cui il settore stesso appartiene.

Ciò posto, è assai facile dimostrare la instabilità della trasformazione (A_1') (per il caso $c < 1$, qui contemplato).

Infatti, se vi fosse stabilità, prendendo P in S abbastanza vicino all'origine, dovrebbero tutti i P_n rimanere indefinitamente entro C, e quindi in S. Assieme alla (6), sarebbero allora soddisfatte le disuguaglianze

$$x_n \geqslant x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1}^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

la successione (mai decrescente) x_n ammetterebbe un limite finito l (> 0, per P diverso da O), e si arriverebbe alla contraddizione

$$l \geqslant l + \frac{1}{2} l^2 .$$

2) $(c > 1)$.

Dalla risoluzione delle (A_1'), raccogliendo in $\overline{U}$ e $\overline{V}$ i termini d'ordine superiore al secondo e cambiando anche la designazione delle variabili, otteniamo

$$(12) \qquad \begin{cases} x_{-1} = x - x^2 - y(ax + by) + \overline{U}(x, y), \\ y_{-1} = y - y(cx + dy) + \overline{V}(x, y), \end{cases}$$

le quali ci definiscono la trasformazione inversa [15].

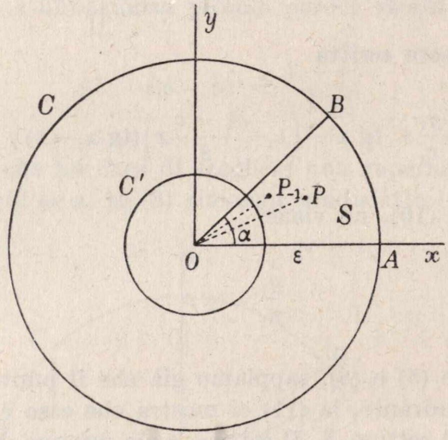

Fig. 4.

Possiamo, come nel caso precedente, scambiando al bisogno y e y_{-1} in $-y$, $-y_{-1}$ (ciò, che non altera c) ritenere

$$(5') \qquad y_{-1} \geqslant 0,$$

per tutti i punti appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro O e raggio abbastanza piccolo.

Ragionando nello stesso modo, potremo definire un nuovo settore S (fig. 4) di raggio ε e apertura α abbastanza piccoli, perchè si abbia ad

---

(15) A giustificazione di queste formule, si noti in generale che, se si hanno i due gruppi equivalenti:

$$\begin{cases} x_1 = x + \mathfrak{P}(x, y), \\ y_1 = y + \mathfrak{Q}(x, y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + \overline{\mathfrak{P}}(x_1, y_1), \\ y = y_1 + \overline{\mathfrak{Q}}(x_1, y_1), \end{cases}$$

(con $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ e quindi $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathfrak{Q}}$ di grado superiore al primo in x, y), le parti di secondo ordine $\mathfrak{P}_2$, un tempo per tutti i suoi punti

$$x < \frac{2}{3},$$

$$|-y(ax+by)+\overline{U}(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}x^2,$$

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z-(c-1)zx+\{(a-d)z+bz^2\}xz+x^2\overline{W}(x,z) \tag{7'}$$

($\overline{W}(x,z)$ designando una funzione finita),

$$(a-d)z+bz^2 < \frac{c-1}{2}, \tag{8'}$$

$$x\overline{W} < \frac{c-1}{2}\operatorname{tg}\alpha, \tag{9'}$$

$$1-\frac{c-1}{2}x > 0. \tag{10'}$$

Avendo riguardo alle prime due di queste disuguaglianze, la prima delle (12) mostra che

$$x_{-1} \leqslant x-\frac{1}{2}x^2 \leqslant x, \tag{6'}$$

$$x_{-1} \geqslant x-\frac{3}{2}x^2 \geqslant 0. \tag{13}$$

La (7′) ci dà subito, tenendo conto delle (8′) e (9′),

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqslant \operatorname{tg}\alpha-\left(1-\frac{c-1}{2}x\right)(\operatorname{tg}\alpha-z),$$

donde, per la (10′),

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqslant \operatorname{tg}\alpha. \tag{11'}$$

$\mathfrak{Q}_2$; $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\overline{\mathfrak{Q}}_2$ sono legate dalle relazioni:

$$\overline{\mathfrak{P}}_2(x,y) = -\mathfrak{P}_2(x,y),$$
$$\overline{\mathfrak{Q}}_2(x,y) = -\mathfrak{Q}_2(x,y).$$

Infatti le formule del secondo gruppo devono cambiarsi in identità, quando si sostituiscono nel secondo membro $x+\mathfrak{P}(x,y)$, $y+\mathfrak{Q}(x,y)$ al posto di x_1, y_1. Ne viene:

$$x \equiv x+\mathfrak{P}(x,y)+\overline{\mathfrak{P}}\{x+\mathfrak{P}(x,y),\ y+\mathfrak{Q}(x,y)\},$$
$$y \equiv y+\mathfrak{Q}(x,y)+\overline{\mathfrak{Q}}\{x+\mathfrak{P}(x,y),\ y+\mathfrak{Q}(x,y)\},$$

e il confronto dei termini quadratici fornisce in particolare le relazioni indicate.

Ogni punto P di S si cambia, per effetto della trasformazione, in un punto P_{-1}, che appartiene ancora ad S. Infatti, per le (5′) e (13), il punto P_{-1} è situato nel primo quadrante; sotto tale condizione, la (11′) implica che il punto sia interno all'angolo $\widehat{AOB}$. Ma, per la (6′), esso cade a sinistra della parallela all'asse delle ordinate, condotta per P; dunque P_{-1} è ancora in S.

Lo stesso sarà a dirsi dei punti P_{-2}, P_{-3}, ..., che si ottengono successivamente per iterazione della (12).

Avremo in generale, per $n = 2, 3, ...$,

$$x_{-n} \geqslant 0 ,$$

$$x_{-n} \leqslant x_{-n+1} - \frac{1}{2} x^2_{-n+1} \leqslant x_{-n+1} ,$$

donde apparisce che le x_{-n} costituiscono una successione positiva mai crescente. Esiste pertanto un limite l finito; ma esso deve soddisfare alla disuguaglianza

$$l \leqslant l - \frac{1}{2} l^2 ,$$

dunque $l = 0$.

Siccome poi

$$\frac{y_{-n}}{x_{-n}} \leqslant \operatorname{tg} \alpha ,$$

anche le ordinate convergono a zero, e i punti P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, ... si avvicinano indefinitamente all'origine.

Sia C' un qualunque cerchio fisso di centro O e raggio $< \varepsilon$, P un punto di S compreso fra C e C'.

Per quanto s'è detto, i punti P_{-n} convergono ad O. La trasformazione proposta (A_1'), ripetuta n volte, fa passare da P_{-n} a P. In altri termini, per iterazione di (A_1'), si finisce necessariamente coll'uscire da C' qualunque sia il punto della successione P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, ..., da cui si parte. Ma di questi punti ve n'ha vicini all'origine quanto si vuole. L'instabilità è dunque manifesta.

3) $(c = 1)$.

L'equazione (3′) diviene in questo caso

$$(d - a)\mu^2 - b\mu^3 = 0$$

ed ammette per conseguenza $\mu = 0$ come radice doppia.

La terza radice $(d-a)/b$ è dunque reale e diversa da zero, a meno che non sia $d=a$, nel qual caso la equazione (3') ammette tre radici coincidenti.

Prescindiamo per un momento da questa eventualità ed eseguiamo una sostituzione lineare di variabili (1), (2), prendendo per $-\gamma/\delta$ il valore μ non nullo.

Procedendo come a § 1, veniamo a determinare una seconda ridotta reale della (A_1'), per la quale $\eta=\gamma x+\delta y=0$ è l'elemento unito *semplice* delle due involuzioni proiettive (I_1), (I_2).

Il nuovo coefficiente c risulta allora $\gtrless 1$ (perchè il valore $c=1$ implica una radice multipla della (3'), cioè un elemento unito *multiplo* della accennata corrispondenza). Possiamo quindi riportarci, per la dimostrazione della instabilità, ad uno dei due casi precedentemente discussi.

Rimane da vedere ciò che avviene per $d=a$. La (A_1') è in questo caso

$$x_1=x+x(x+ay)+by^2+U(x,y)\,,$$
$$y_1=y+y(x+ay)+V(x,y)\,.$$

In causa della (4), $b\gtrless 0$ (senza di che le parti di secondo grado ammetterebbero il fattore comune $x+ay$).

Se $b>0$, la dimostrazione della instabilità si fa in modo análogo a quello tenuto per $c<1$.

Osservato che lo scambio di y, y_1 in $-y$, $-y_1$ non altera il valore di b, si vede subito potersi assegnare un settore S (limitato, si intende, inferiormente dall'asse x) di raggio ε e ampiezza α abbastanza piccoli, perchè si abbia in ogni suo punto

(5'') $$y_1\geqslant 0\,,$$

(6'') $$x_1\geqslant x+\frac{1}{2}x^2\,,$$

(7'') $$\frac{y_1}{x_1}=z-bxz^3+x^2W(x,z),$$

(9'') $$xW<b\operatorname{tg}^3\alpha\,,$$

(10'') $$1-3bx\operatorname{tg}^2\alpha>0\,.$$

La (7''), confrontata colla (9''), dà luogo alla disuguaglianza

$$\frac{y_1}{x_1}\leqslant z-bxz^3+bx\operatorname{tg}^3\alpha,$$

la quale può anche scriversi

$$\frac{y_1}{x_1} \leqslant \operatorname{tg}\alpha - (\operatorname{tg}\alpha - z)\{1 - bx(\operatorname{tg}^2\alpha + z\operatorname{tg}\alpha + z^2)\}\,.$$

Siccome evidentemente

$$z \leqslant \operatorname{tg}\alpha\,,$$
$$1 - bx(\operatorname{tg}^2\alpha + z\operatorname{tg}\alpha + z^2) \geqslant 1 - 3bx\operatorname{tg}^2\alpha\,,$$

e quest'ultima, per la (10″), è una quantità positiva, così ne concludiamo

$$\frac{y_1}{x_1} \leqslant \operatorname{tg}\alpha; \tag{11″}$$

dopodichè la dimostrazione si completa come sub 1).

Se $b < 0$, si procede in sostanza come sub 2), delimitando un settore S, in cui

$$y_{-1} \geqslant 0\,, \tag{5‴}$$

$$x_{-1} \leqslant x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant x\,, \tag{6‴}$$

$$x_{-1} \geqslant x - \frac{3}{2}x^2 \geqslant 0\,, \tag{13′}$$

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z + bxz^3 + x^2W(x, z)\,, \tag{7‴}$$

$$xW < -b\operatorname{tg}^3\alpha\,, \tag{9‴}$$

$$1 + 3bx\operatorname{tg}^2\alpha > 0\,; \tag{10‴}$$

e per conseguenza

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqslant \operatorname{tg}\alpha\,.$$

A questo punto si ripetono identicamente le considerazioni del caso indicato.

4. - Proprietà delle trasformazioni (B). Caso generale. Instabilità.

Sia la trasformazione

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y)\,, \\ y_1 = y + x + g(x, y)\,; \end{cases}$$

$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ l'insieme dei termini di secondo grado in $f(x, y)$.

Mi propongo di far vedere che il coefficiente a_{22} è un invariante della (B), di fronte a un generico cambiamento di variabili

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \xi = x + \mathfrak{P}(x, y)\,, \\ \eta = y + \mathfrak{Q}(x, y)\,, \end{cases}$$

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \xi_1 = x_1 + \mathfrak{P}(x_1, y_1)\,, \\ \eta_1 = y_1 + \mathfrak{Q}(x_1, y_1)\,, \end{cases}$$

regolare nell'intorno dell'origine e per il quale la parte di prim'ordine si riduce all'identità. (Sono questi d'altronde gli unici cambiamenti che importi considerare, possedendo già la parte lineare di (B) forma canonica).

Le (14) e (15), risolute rapporto alle antiche variabili, danno

$$\text{(14')} \qquad \begin{cases} x = \xi + \overline{\mathfrak{P}}(\xi, \eta)\,, \\ y = \eta + \overline{\mathfrak{Q}}(\xi, \eta)\,, \end{cases}$$

$$\text{(15')} \qquad \begin{cases} x_1 = \xi_1 + \overline{\mathfrak{P}}(\xi_1, \eta_1)\,, \\ y_1 = \eta_1 + \overline{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \eta_1)\,, \end{cases}$$

le parti di second'ordine $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\overline{\mathfrak{Q}}_2$ essendo legate a $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$ (cfr. la nota a pag. 30) dalle relazioni

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{P}}_2(x, y) = -\mathfrak{P}_2(x, y)\,, \\ \overline{\mathfrak{Q}}_2(x, y) = -\mathfrak{Q}_2(x, y)\,. \end{cases}$$

Per avere la forma delle (B), relativamente alle nuove variabili, partiamoci dalle (15), sostituendo successivamente nei secondi membri i valori (B) e (14').

Otteniamo dopo la prima operazione

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi_1 = x + f(x, y) + \mathfrak{P}\{x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\}\,, \\ \eta_1 = y + x + g(x, y) + \mathfrak{Q}\{x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\}\,. \end{cases}$$

Dalle (14′) e (16) segue evidentemente

$$x = \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \dots$$

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \eta) + \dots\,,$$

$$\mathfrak{P}\{x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\} = \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \dots\,,$$

i termini omessi essendo di terz'ordine almeno in ξ, η.

Con ciò la prima delle (17) porge

$$\xi_1 = \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta) + \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \dots\,.$$

Siccome la differenza $\mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta)$ non contiene termine in η^2, così il coefficiente di η^2 è ancora a_{22}. C. d. d.

Disponendo opportunamente delle due funzioni indeterminate $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ (di ordine non inferiore al secondo), che compaiono nelle (14), (15), possiamo attribuire alla trasformazione (B) una forma più semplice. Prendiamo per ciò

$$\mathfrak{P}(x, y) = g(x, y)\,,$$

$$\mathfrak{Q}(x, y) = 0\,.$$

Le (17), avuto riguardo alle (14), danno

$$\xi_1 = \xi + f'(\xi, \eta)\,,$$

$$\eta_1 = \eta + \xi\,,$$

dove $f'(\xi, \eta)$ non è che

$$-g(x, y) + f(x, y) + g\{x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\}\,,$$

espressa per ξ, η.

Ogni trasformazione (B) è dunque suscettibile di una forma ridotta

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y)\,, \\ y_1 = y + x\,, \end{cases}$$

per la quale la funzione g della seconda formula è identicamente nulla.

Usufruendo di questo tipo, *potremo facilmente accertare l'instabilità della* (B), *almeno per il caso generale, in cui il coefficiente* a_{22} (del quale si è testè riconosciuto il carattere invariantivo) *sia diverso da zero.*

In primo luogo è lecito supporre $a_{22} > 0$, poichè l'ipotesi opposta si riconduce a questa cambiando il segno delle variabili x, y (e conseguentemente x_1, y_1).

Ciò posto (veggasi il precedente paragrafo), si potrà tracciare un cerchio C, col centro nell'origine, di raggio ε abbastanza piccolo perchè, in ogni punto del primo quadrante Q di C, risulti

$$x_1 = x + f(x, y) \geqslant 0 ,$$

essendo inoltre

$$f(0, y) > 0 ,$$

per $y > 0$ e $\leqslant \varepsilon$.

Evidentemente la (B′) fa corrispondere ai punti di Q punti del primo quadrante.

Proviamoci a supporre che vi sia stabilità. Partendo dai punti P di Q, abbastanza vicini all'origine, tutti i P_n rimangono indefinitamente entro Q. Avendosi in generale

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) , \\ y_n &= y_{n-1} + x_{n-1} , \end{aligned}\right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots) ,$$

e le x_n essendo positive (purchè soltanto si intenda la posizione iniziale P diversa da O), ogni y_n risulta $> y_{n-1}$. Siccome nessuna y supera ε, la successione y_n ammette un limite $l \leqslant \varepsilon$ e > 0.

Dalla

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$$

segue, passando al limite,

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0 .$$

Con ciò la

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) ,$$

passando pure al limite, porge

$$f(0, l) = 0 ,$$

dove l non è zero, nè supera ε.

Ma questo contraddice alla definizione del cerchio C. È dunque inammissibile l'ipotesi della stabilità; e ciò dimostra l'asserto.

5. - Considerazioni relative al caso d'eccezione. Sottocasi possibili.

Venendo al caso escluso $a_{22} = 0$, sia per la forma ridotta (B'), γy^p il termine (indipendente da x) di dimensione minima contenuto in $f(x, y)$. *Se p è pari, o se, p essendo dispari, $\gamma > 0$, lo stesso ragionamento, che ci ha servito testè, prova la instabilità della trasformazione.*

Per p dispari e γ negativo, la cosa non è così semplice. Le difficoltà, che si incontrano nella discussione, sono analoghe a quelle, che presenta il tipo (C), ond'io ho qui lasciato d'occuparmene, riservandomi di farne insieme lo studio in altra occasione. Tali difficoltà provengono, a mio credere, essenzialmente dal fatto che non si può — come or ora e come s'è visto esser possibile pel tipo (A) — delimitare un conveniente angolo col vertice in O, tale che, per ogni suo punto P abbastanza vicino ad O, il corrispondente P_1 rimanga ancora compreso in quell'angolo.

Ma torniamo alla classificazione delle trasformazioni (B).

Tra le eventualità possibili c'è anche la ipotesi, non contemplata finora ($p = \infty$, si potrebbe dire), che la funzione $f(x, y)$ contenga x a fattore:

$$f(x, y) = x f_1(x, y) \,.$$

Qui è di nuovo assai facile constatare la instabilità.

Se $f_1(0, y)$ non si annulla identicamente, sia γy^p il termine di dimensione minima. Giova mostrare in primo luogo che è sempre lecito supporre $\gamma > 0$, cambiando eventualmente segno alle variabili o ricorrendo alla trasformazione inversa.

Sia infatti proposta una trasformazione, per cui $\gamma < 0$. Per p dispari, basta cambiare ordinatamente $x, y; x_1, y_1$ in $-\xi, -\eta; -\xi_1, -\eta_1$ e ci si trova ricondotti al caso del coefficiente positivo.

Se invece p è pari, allora si prende a considerare la trasformazione inversa.

Essendo

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x\{1 + f_1(x, y)\} \,, \\ y_1 &= y + x \,, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

la (B') proposta, la inversa si potrà rappresentare mediante le formule

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\} \,, \\ y &= y_1 - x = y_1 - x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\} \,, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

dove $\bar{f}_1$ è, al pari di f_1, una funzione regolare (nulla nell'origine).

Importa determinare il termine di grado minimo in $\bar{f}_1(0, y_1)$.

A questo scopo, immaginiamo di portare i valori (19) nella prima delle (18), togliendo il fattore comune x_1 e ponendo poi $x_1 = 0$. Se si bada che y_1 coincide allora con y, avremo la identità

$$1 = \{1 + \bar{f}_1(0, y_1)\}\{1 + f_1(0, y_1)\} ,$$

donde risulta che il termine di grado minimo in $\bar{f}_1(0, y_1)$ (eguale ed opposto all'analogo di f_1) è $-\gamma y_1^p$.

Ma la (19) non ha ancora la forma (B'). Per ricondurvela, eseguiamo il cambiamento di variabili

$$(20) \qquad \begin{cases} \xi = x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\} = x , \\ \eta = -y_1 , \end{cases}$$

e corrispondentemente

$$(21) \qquad \begin{cases} \xi_1 = x\{1 + \bar{f}_1(x, y)\} \\ \eta_1 = -y . \end{cases}$$

La trasformazione fra ξ, η; ξ_1, η_1 vien definita dalle formule

$$(19') \qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi\{1 + \bar{f}_1(x, y)\} , \\ \eta_1 = -y = -y_1 + x = \eta + \xi , \end{cases}$$

dovendosi beninteso $\bar{f}_1(x, y)$ ritenere espresso per ξ, η.

La prima delle (20) (riferendosi ad un intorno abbastanza piccolo dell'origine) mostra che, per $\xi = 0$, anche $x_1 = 0$. Per la prima delle (19) e prima delle (21) anche x, ξ_1 si annullano. Ma allora $y = y_1 = -\eta$. I termini indipendenti da ξ in $\bar{f}_1(x, y)$ si otterranno semplicemente col porre $x = 0$, $y = -\eta$; p essendo pari, il termine di grado minimo sarà in particolare $-\gamma\eta^p$.

La (19'), che è stabile od instabile assieme alla (18), ha dunque il coefficiente positivo $-\gamma$.

Ritenuto ormai nella (18) $\gamma > 0$, oppure $f_1(0, y) \equiv 0$, scriviamo la funzione $f_1(x, y)$ sotto la forma

$$f_1(x, y) = xf_2(x, y) + f_1(0, y) .$$

Potremo in ogni caso asserire che $f_1(0, y)$ non è negativo per y positivo e abbastanza piccolo. Scegliamo, come è possibile in infiniti modi, un cerchio C col centro nell'origine, nel cui primo quadrante Q sia ad un tempo

$$|f_2(x, y)| < M\,,$$

$$f_1(0, y) \geqslant 0\,,$$

$$x < \frac{1}{M}\,,$$

M designando un conveniente numero positivo.

Per i punti di Q si ha evidentemente

$$x_1 = x + x^2 f_2(x, y) + x f_1(0, y) \geqslant x(1 - Mx) \geqslant 0\,.$$

Poniamo

$$x_1' = x(1 - Mx)$$

e in generale

$$x_n' = x_{n-1}'(1 - Mx_{n-1}') \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

A partire da un x positivo e $< 1/M$, x_1' è pure positivo e più piccolo di x. La successione x_n' è dunque indefinitamente decrescente e converge verso un limite $\geqslant 0$.

Questo limite soddisfa all'equazione

$$l = l(1 - Ml)\,,$$

ond'è identicamente nullo.

Giova osservare che, pur convergendo le x_n' a zero, la serie a termini positivi $\sum_n\limits_1^\infty x_n'$ è divergente.

Infatti, moltiplicando membro a membro le equazioni

$$x_n' = x_{n-1}'(1 - Mx_{n-1}')$$

da $n = 2$ fino ad $n = m$, si trae

$$x_m' = x_1' \prod_n\limits_1^{m-1} (1 - Mx_n')\,,$$

e, qualora la serie $\sum_n\limits_1^\infty x_n'$ convergesse, lo stesso seguirebbe, come si sa, per il prodotto infinito $\prod_n\limits_1^\infty (1 - Mx_n')$ (che avrebbe quindi valore diverso da zero). Ma allora sarebbe altresì

$$\lim_{m=\infty} x'_m = x'_1 \prod_1^\infty{}_n (1 - Mx'_n)$$

e quindi il primo membro diverso da zero, il che non è.

Confrontiamo ora gli elementi della successione x'_n con quelli, che si generano per iterazione della (18).

La posizione iniziale essendo in Q, e x non nullo, si ha, per quanto abbiam visto (rimanendo inoltre esclusa l'eguaglianza),

$$x_1 > x'_1 .$$

L'ordinata $y_1 = y + x$ è pure positiva, talchè anche P_1 appartiene al primo quadrante. Lo stesso è a dirsi di P_2, se P_1 non è già fuori di C; ecc.

Si rimane dunque in Q, o si esce da C.

Finchè si è in Q,

$$x_n \geqslant x_{n-1}(1 - Mx_{n-1}) ;$$

supponendo $x_{n-1} > x'_{n-1}$, siccome il secondo membro della precedente disuguaglianza cresce o decresce con x_{n-1}, segue a fortiori

$$x_n > x'_{n-1}(1 - Mx'_{n-1}) > x'_n .$$

Stando così le cose, la ripetuta applicazione della (18) fa necessariamente uscire da C, per quanto si prenda vicina all'origine la posizione iniziale (purchè in Q e $x > 0$).

Infatti, dacchè

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

si ha anche

$$y_m = y_1 + \sum_1^{m-1}{}_n x_n \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

Qualora non si uscisse da C, ogni x_n risulterebbe superiore ad x'_n e per conseguenza

$$y_m > y_1 + \sum_1^{m-1}{}_n x'_n$$

crescerebbe indefinitamente con m, il che implica contraddizione.

Si ha dunque instabilità.

Capitolo III.

LA QUESTIONE DELLA STABILITÀ DELLE SOLUZIONI PERIODICHE

1. - Posizione del problema dal punto di vista della precedente teoria.

Sia un sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, ..., x_m;\ t) \qquad (i = 1, 2, ..., m), \tag{1}$$

dove le X_i si intendono funzioni reali, regolari rapporto alle x_i nel campo, che si avrà a considerare, e periodiche rispetto a t di periodo T.

Sia

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

una soluzione particolare del sistema (1) periodica (collo stesso periodo T).

È sempre lecito, senza pregiudizio della generalità, supporre che le φ_i sieno identicamente nulle, cioè che la soluzione particolare, di cui si tratta, si riduca a

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m). \tag{2}$$

Basta a tal uopo immaginare effettuato un cambiamento di variabili

$$y_i = x_i - \varphi_i(t),$$

con che non si altera la natura del sistema differenziale (1).

Riferiamoci pertanto alla forma (2), osservando prima di tutto che i secondi membri X_i delle (1), si annullano per qualunque valore di t, quando tutte le x_i si pongono eguali a zero. È una conseguenza immediata della ipotesi che $x_i = 0$ soddisfa il sistema.

La soluzione $x_i = 0$ sarà a dirsi *stabile* (con ovvio linguaggio cinematico; interpretando cioè le (1) come le equazioni di definizione del movimento di un punto nello spazio $x_1, x_2, ..., x_m$) allora e solo allora che, per ogni intorno comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H tale che, prendendo in H la posizione iniziale del mobile, questo rimane in E, per qualunque valore positivo o negativo di t.

Vi è *instabilità* nel caso opposto, ossia se non esiste un H dotato della anzidetta proprietà; o in altri termini se, vicino quanto si vuole all'origine, esiste sempre qualche posizione iniziale P_0, a partire dalla quale il mobile si trova, in un istante almeno, fuori di E.

Premesse queste definizioni, è facile mostrare che una soluzione periodica è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione Γ.

Prendiamo a considerare l'integrale generale del sistema (1)

$$x_i = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ t) \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{3}$$

i valori iniziali $x_i^{(0)}$ riferendosi per es. all'istante $t = 0$. Le F_i si riducono identicamente ad $x_i^{(0)}$, per $t = 0$, e si annullano nell'origine qualunque sia t.

Una nota proposizione ci assicura poi che esse sono funzioni regolari delle $x_i^{(0)}$, in un intorno abbastanza piccolo dell'origine, per qualsiasi valore reale finito di t ([16]). (Il difficile è stabilire ciò che accade, quanto t cresce indefinitamente.)

In causa della periodicità dei secondi membri delle (1), le F_i posseggono ancora una importante proprietà funzionale.

Dicansi $x_i^{(n)}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ i valori degli integrali x_i per $t = nT$.

Accanto alle formule (3) (che definiscono gli integrali mediante i loro valori per $t = 0$), possiamo costruirne altre, che definiscano gli stessi integrali, ma in base ai loro valori per $t = nT$. Per stabilire queste nuove formule, basta osservare che, ponendo $\tau = t - nT$, il sistema (1), per la periodicità delle X_i, diviene

$$\frac{dx_i}{d\tau} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m;\ \tau) \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

il quale coincide collo stesso (1), salvo lo scambio materiale di t in τ.

Ora, in virtù delle (3), gli integrali di questo sistema, che, per $\tau = 0$, assumono i valori $x_i^{(n)}$, sono definiti da

$$x_i = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)};\ \tau) = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)};\ t - nT).$$

Il confronto colle (3) stesse porge le annunziate equazioni funzionali

$$\left|\begin{array}{c} F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)};\ t) = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)};\ t - nT) \\ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{pmatrix}, \end{array}\right. \tag{4}$$

([16]) H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 27; oppure:
O. NICCOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, « Rendiconti dei Lincei », 15 dicembre 1895;
E. PICARD, *Traité d'analyse*, tom. III, Cap. VIII, pag. 157-162.

essendo bene inteso

$$x_i^{(n)} = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; nT).$$

Designiamo in particolare con $f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ le espressioni delle funzioni F_i per $t = T$, e facciamo nelle ultime formule $n = 1$.

Avremo

$$(5) \qquad x_i^{(1)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

D'altronde la (4) ci dà, per qualsiasi valore di n,

$$F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}; t - nT) = F_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}; t - (n-1)T),$$

e, ponendo $t = nT$,

$$(6) \qquad x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Le (5) e (6) mostrano che le posizioni P_n, occupate dal mobile per $t = nT$, si ottengono dalla posizione iniziale P_0 per iterazione della trasformazione (5).

È chiaro che, ogniqualvolta la (5) è instabile, lo stesso avviene per la soluzione periodica (2). Se la trasformazione è stabile, lo è del pari la (2), ma una qualche spiegazione si rende necessaria.

E per verità dalla stabilità della (5) segue bensì che, per $t = nT$, il mobile (anche al crescere indefinito di n) rimane in E, ma nulla si sa a priori della traiettoria, compresa fre due P_n consecutivi. Ad eliminare il dubbio, si osservi in primo luogo che, dato un intorno comunque piccolo E dell'origine, e un qualsiasi intervallo *finito* di valori di t (in particolare l'intervallo $0, T$), si può sempre assegnare un intorno E', tale che, per P_0 in E', P non esce da E, finchè t rimane nell'intervallo. È questa una conseguenza immediata di quanto s'è osservato circa i secondi membri delle (3).

Ciò posto, si prenda a considerare, facendo appello alla supposta stabilità della (5), quell'intorno H, che corrisponde ad E' (secondo la definizione di stabilità). Dico che lo stesso H, rispetto all'E arbitrariamente prescelto, si trova nella condizione voluta per la stabilità della nostra soluzione periodica.

Infatti qualsiasi posizione iniziale, situata in H, dà intanto luogo a punti P_n di E' (e quindi di E). Sia poi P una generica posizione del mobile corrispondente ad un istante t compreso fra nT e $(n + 1)T$.

Per le (3) e (4), le coordinate x_i di P si possono rappresentare mediante le funzioni

$$F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)};\ t - nT)\ ;$$

gli argomenti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ sono compresi in E', $t - nT$ fra 0 e T; il punto P è dunque in E. C.d.d.

Dacchè una soluzione periodica (2) è sempre stabile od instabile assieme alla (5), si può dire, fino ad un certo punto, che la questione della stabilità delle soluzioni periodiche si riduce a quella delle trasformazioni puntuali. Quand'anche però quest'ultima fosse completamente risoluta, rimarrebbe, rispetto al primo problema, un ulteriore passo da compiere. Mettere in relazione, quanto possibile diretta, i criteri di stabilità o di instabilità, relativi alla (5), coi dati del problema, cioè coi secondi membri X_i delle equazioni differenziali proposte.

È questo l'oggetto dei paragrafi seguenti, dove si faranno appunto valere i caratteri di instabilità delle trasformazioni puntuali, finora acquisiti.

2. - Il teorema di Liapounoff.

I secondi membri X_i delle equazioni (1) si annullano nell'origine, qualunque sia t; potremo dunque porre

$$X_i = \sum_1^m {}_j\, a_{ij} x_j + \dots ,$$

dove le a sono funzioni periodiche di t e i termini omessi d'ordine superiore al primo rapporto alle x. Le equazioni lineari, a coefficienti periodici,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_1^m {}_j\, a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{7}$$

(che si ottengono dalle (1) arrestandone i secondi membri alle parti di primo ordine), si dicono, col sig. POINCARÉ, *equazioni alle variazioni del sistema* (1), rispetto alla soluzione periodica considerata.

Sia $\xi_{i,j}(t)$ un generico sistema fondamentale di integrali delle (7). Per essere queste a coefficienti periodici, anche le $\xi_{i,j}(t + T)$ costituiscono un nuovo sistema fondamentale, ed esiste per conseguenza una sostituzione lineare a coefficienti costanti, atta a far passare dalle $\xi_{i,j}(t)$ alle $\xi_{i,j}(t + T)$. Questa sostituzione lineare ammette sempre m moltiplicatori (reali o complessi, distinti o coincidenti, ma finiti e non nulli), che potremo rappresentare con $e^{\alpha_1 T}, e^{\alpha_2 T}, \dots, e^{\alpha_m T}$.

Se si suppone in particolare che il sistema fondamentale $\xi_{i,j}(t)$ sia costituito dagli integrali principali, relativi al punto $t = 0$ ($\xi_{i,j}(0) = 0$, per $i \gtrless j$; $\xi_{i,i}(0) = 1$), i coefficienti c_j della sostituzione

$$\xi_{i,j}(t+T) = \sum_1^m {}_l\, c_{jl}\xi_{i,j}(t)$$

valgono $\xi_{jl}(T)$ (come si vede facendo $t = 0$) e le $e^{\alpha T}$ rimangono definite quali radici della equazione

$$\Xi(\omega) = \begin{vmatrix} \xi_{1,1}(T) - \omega & \xi_{1,2}(T) & \dots & \xi_{1,m}(T) \\ \xi_{2,1}(T) & \xi_{2,2}(T) - \omega & \dots & \xi_{2,m}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m,1}(T) & \xi_{m,2}(T) & \dots & \xi_{m,m}(T) - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Dalle cose dette segue, come si sa, la esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$x_i = e^{\alpha_j t}\sigma_{i,j}(t) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

dove le σ sono funzioni di t in generale periodiche (o alla peggio, nel caso che le α non sieno tutte distinte, del tipo $\tau_0 t^\mu + \tau_1 t^{\mu-1} + \dots + \tau_\mu$, colle τ periodiche e $\mu < m$).

Le costanti α si chiamano gli *esponenti caratteristici* della data soluzione periodica. Nel caso particolare, in cui i coefficienti a_{ij} delle (7) si riducono a costanti, gli esponenti caratteristici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono, come è ben noto, le radici della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0;$$

in generale la dipendenza loro dai coefficienti a_{ij} del sistema (7) è più complicata. Comunque essi rimangono individuati dai termini di primo ordine delle (1).

Si prova facilmente che $e^{\alpha_1 T}, e^{\alpha_2 T}, \dots, e^{\alpha_m T}$ *sono i moltiplicatori della trasformazione* (5).

Partiamoci infatti dalla espressione (3) dell'integral generale, ricordando che i secondi membri sono sviluppabili in serie di potenze delle $x_i^{(0)}$ e si annullano per $x_i^{(0)} = 0$.

Designiamo con

$$\xi_i = \sum_1^m {}_j\, \xi_{i,j}(t) x_j^{(0)}$$

le parti di prim'ordine, e sostituiamo nelle equazioni differenziali (1), eguagliando le parti di prim'ordine. Si vede così che le ξ_i soddisfanno alle equazioni alle variazioni; devono anzi essere separatamente integrali i singoli coefficienti $\xi_{i,j}(t)$ d'ogni $x_j^{(0)}$; talchè il loro insieme (per essere $x_i^{(0)}$ i valori iniziali degli integrali x_i) costituisce precisamente il sistema degli integrali principali delle (7), relativo a $t = 0$. Ora, per definizione,

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)};\ T) = \sum_1^m {}_j\, \xi_{i,j}(T) x_j^{(0)} + \ldots ;$$

dunque i moltiplicatori della (5) non sono altro che le radici della equazione

$$\Xi(\omega) = 0 , \qquad \text{c.d.d.}$$

Nel Capitolo I abbiamo dimostrato il teorema:

Una trasformazione puntuale è instabile, se uno almeno dei moltiplicatori ha modulo diverso dall'unità.

Dacchè la soluzione periodica (2) è stabile od instabile assieme alla (5) e d'altra parte i moltiplicatori $e^{\alpha_j T}$ di quest'ultima sono in modulo eguali all'unità allora e solo allora che gli esponenti caratteristici α_j sono puramente immaginari, otteniamo la importante proposizione dovuta al sig. LIAPOUNOFF [17]:

Una soluzione periodica è instabile, se uno almeno dei suoi esponenti caratteristici possiede parte reale non nulla.

---

[17] Cfr. *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas maximum*, « Journal de Mathématiques », 1897; che è la Memoria, già citata nell'Introduzione. Il teorema è quivi dimostrato per il caso particolare, in cui le X_i sieno indipendenti da t. L'A. però ha stabilito la proposizione in generale in un lavoro anteriormente pubblicato (in lingua russa): *Il problema generale della stabilità del movimento*, Kharkow, 1892.

3. - Sistemi di secondo ordine. Caratteri di instabilità in due casi particolari.

Supponiamo nelle (1) $m = 2$ e di più le X_i prive di termini di primo ordine. Il sistema si potrà scrivere

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_2 + \ldots , \\ \frac{dy}{dt} &= Y_2 + \ldots , \end{aligned} \right.$$

dove $X_2(x, y)$, $T_2(x, y)$ sono forme quadratiche in x, y, a coefficienti periodici rispetto alla variabile t e i termini omessi di dimensione superiore alla seconda. I valori medi

$$[X_2] = \frac{\int_0^T X_2 \, dt}{T} , \qquad [Y_2] = \frac{\int_0^T Y_2 \, dt}{T} ,$$

costituiscono due nuove forme a coefficienti costanti.

Se $[X_2]$, $[Y_2]$ *sono prive di fattori comuni, la soluzione periodica* $x = 0$, $y = 0$ *è instabile.*

Designino x_0, y_0 i valori iniziali di x, y. Come abbiamo ricordato al § 1, le espressioni di x, y sono della forma

$$(3') \qquad \left| \begin{aligned} x &= \sum_1^\infty {}_i \, P_i , \\ y &= \sum_1^\infty {}_i \, Q_i , \end{aligned} \right.$$

con P_i, Q_i i polinomi in x_0, y_0 (a coefficienti funzioni di t) di grado designato dall'indice.

Portiamo queste espressioni nelle (a) ed eguagliamo i termini dei primi due gradi.

Avremo chiaramente

$$\frac{dP_1}{dt} = 0 , \qquad \frac{dQ_1}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = X_2(P_1, Q_1) , \qquad \frac{dQ_2}{dt} = Y_2(P_2, Q_2) .$$

Dacchè x, y devono ridursi, per $t = 0$, ad x_0, y_0, così saranno appunto x_0, y_0 i valori iniziali di P_1, Q_1, mentre ogni altro P_i, Q_i si annulla.

Ne viene

$$P_1 = x_0\,, \qquad Q_1 = y_0\,,$$

$$P_2 = \int_0^t X_2\, dt, \qquad Q_2 = \int_0^t Y_2\, dt.$$

Per $t = T$, dicendo x_1, y_1 i corrispondenti valori di x, y, le (3') danno

$$x_1 = x_0 + T\cdot[X_2(x_0, y_0)] + \dots\,,$$
$$y_1 = y_0 + T\cdot[Y_2(x_0, y_0)] + \dots\,,$$

la quale trasformazione fa riscontro alla (5) del caso generale.

Per ipotesi, le due forme $T\cdot[X_2(x_0, y_0)]$, $T\cdot[Y_2(x_0, y_0)]$ non ammettono fattori comuni.

La trasformazione è instabile (cfr. § 3 del cap. precedente); lo è dunque la nostra soluzione periodica.

Consideriamo ora il sistema

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X_2 + \dots\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x + Y_2 + \dots \end{cases}$$

Procedendo come sopra, si ha senz'altro

$$\frac{dP_1}{dt} = 0\,, \qquad \frac{dQ_1}{dt} = P_1\,;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = X_2(P_1, Q_1)\,;$$

da cui

$$P_1 = x_0\,, \qquad Q_1 = tx_0 + y_0\,;$$

$$P_2 = \int_0^t X_2(x_0, tx_0 + y_0)\, dt\,,$$

e, per $t = T$,

$$x_1 = x_0 + (P_2)_{t=T} + \dots\,,$$
$$y_1 = y_0 + Tx_0 + \dots\,,$$

i termini omessi essendo rispettivamente di terzo e di secondo ordine almeno.

Sappiamo dal capitolo precedente (§ 4) che una trasformazione di questo tipo è certamente instabile, se il coefficiente di y_0^2 nell'espressione di x_1 non si annulla. Il termine in y_0^2 proviene ora da $(P_2)_{t=T}$ e il suo coefficiente non è altro (a prescindere dal fattore T) che il valore medio del coefficiente di y^2 in $X_2(x, y)$.

Possiamo dunque concludere:

La soluzione $x = 0$, $y = 0$ *di un sistema* (b) *è instabile, se non si annulla il valor medio del coefficiente di* y^2 *in* $X_2(x, y)$.

4. - Casi riducibili all'uno o all'altro dei due anzidetti.

Sia in generale un sistema

$$(1')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X = X_1 + X_2 + \ldots\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\,, \end{cases}$$

colla soluzione $x = 0$, $y = 0$.

Per il teorema di LIAPOUNOFF, la soluzione è instabile, se degli esponenti caratteristici α_1, α_2 uno almeno ha parte reale diversa da zero. Rimane l'ipotesi opposta di esponenti entrambi puramente immaginari (e coniugati, trattandosi sempre in queste ricerche di equazioni reali), cioè $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\alpha$ (α quantità reale). Che anche a questo caso abbiano di regola a corrispondere soluzioni instabili, non mi par dubbio. Però non mi è ora possibile dimostrarlo se non ammettendo che α sia commensurabile con $2\pi/T$.

Sotto tale restrizione il sistema (1') equivale ad un sistema (a), ovvero ad un sistema (b), ed è quindi in generale instabile.

Innanzi tutto, per la supposta commensurabilità, potremo mettere α sotto la forma $2h\pi/kT$, dove h e k designano interi primi tra loro.

Se α non è nullo, le equazioni alle variazioni

$$(7')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X_1(x, y), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = Y_1(x, y), \end{cases}$$

ammettono due soluzioni indipendenti u_1, v_1; u_2, v_2 della forma

$$u_1 = e^{i\alpha t}(\sigma_1 + i\sigma_2)\,, \qquad v_1 = e^{i\alpha t}(\tau_1 + i\tau_2)\,;$$
$$u_2 = e^{-i\alpha t}(\sigma_1 - i\sigma_2)\,, \qquad v_2 = e^{-i\alpha t}(\tau_1 - i\tau_2)\,,$$

periodiche entrambe col periodo kT. (Infatti, quando t aumenta di kT, non solo le σ e τ, che ammettono già il periodo T, ma anche gli esponenziali riprendono il medesimo valore).

Poniamo

$$c_{11} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \sigma_1 \cos \alpha t - \sigma_2 \operatorname{sen} \alpha t,$$

$$c_{21} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \tau_1 \cos \alpha t - \tau_2 \operatorname{sen} \alpha t;$$

$$c_{12} = \frac{u_1 - u_2}{2i} = \sigma_1 \operatorname{sen} \alpha t + \sigma_2 \cos \alpha t,$$

$$c_{22} = \frac{v_1 - v_2}{2i} = \tau_1 \operatorname{sen} \alpha t + \tau_2 \cos \alpha t,$$

con che c_{11}, c_{21}; c_{12}, c_{22} costituiscono un nuovo sistema fondamentale di soluzioni delle (7′).

Si operi sul sistema proposto il cambiamento di variabili

$$(8) \qquad \begin{cases} x = c_{11}\xi + c_{12}\sigma\,, \\ y = c_{21}\xi + c_{22}\sigma\,. \end{cases}$$

La materiale sostituzione di questi valori in (1′) dà, tenendo conto della linearità di X_1, Y_1,

$$c_{11}\frac{d\xi}{dt} + c_{12}\frac{d\eta}{dt} + \left\{\xi\frac{dc_{11}}{dt} + \eta\frac{dc_{12}}{dt}\right\} =$$
$$= \{\xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22})\} + X_2 + \dots\,,$$
$$c_{21}\frac{d\xi}{dt} + c_{22}\frac{d\eta}{dt} + \left\{\xi\frac{dc_{21}}{dt} + \eta\frac{dc_{22}}{dt}\right\} =$$
$$= \{\xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22})\} + Y_2 + \dots\,;$$

X_2, Y_2, e così i termini successivi, conservano nelle nuove variabili ξ, η lo stesso grado e rimangono funzioni periodiche di t (col periodo kT).

Le quantità in parentesi nei due membri si elidono, poichè, per definizione, c_{11}, c_{21}; c_{12}, c_{22} verificano le (7').

Risolvendo rispetto a $d\xi/dt$, $d\eta/dt$, si è evidentemente ricondotti alla forma (a).

Si noti che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

non può annullarsi per alcun valore finito di t. Esso soddisfa infatti, come è ben noto e come del resto si verifica immediatamente, alla equazione

$$\frac{dD}{dt} = D\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) ;$$

il coefficiente $\partial X_1/\partial x + \partial X_1/\partial y$ è funzione regolare di t sopra l'asse reale e perciò D non può annullarsi in un punto senza annullarsi identicamente. Questo poi è escluso dall'essere le c soluzioni indipendenti delle (7').

A legittimare la trasformazione (8), conviene ancora osservare che essa non altera la stabilità o la instabilità di una soluzione $x(t)$, $y(t)$. Infatti i coefficienti c della (8), e così D, sono funzioni periodiche; finite quindi e l'ultima diversa da zero, anche al crescere indefinito di t.

Se mai α è nullo, le (7') non posseggono più in generale due soluzioni indipendenti della forma considerata, ma si ha invece un sistema fondamentale del tipo

$$u_1 = \sigma_1 , \qquad v_1 = \sigma_2 ;$$
$$u_2 = \tau_1 t , \qquad v_2 = \tau_2 t ,$$

le σ e τ essendo, bene inteso, funzioni periodiche reali.

Fatte le posizioni

$$c_{11} = \sigma_1 , \qquad c_{21} = \sigma_2 ;$$
$$c_{12} = \tau_1 , \qquad c_{22} = \tau_2 ,$$

si noti che, mentre c_{11}, c_{21} costituiscono, come nel caso precedente, una soluzione delle (7'), c_{12}, c_{22} verificano invece le equazioni

$$\frac{dc_{12}}{dt} = X_1(c_{12}, c_{22}) - c_{11} ,$$

$$\frac{dc_{22}}{dt} = Y_1(c_{12}, c_{22}) - c_{21} .$$

La sostituzione (8) cangia allora, come si vede subito, il sistema (1′) in uno di tipo (*b*).

Equazioni, che non contengono t esplicitamente. – Se i secondi membri X, Y delle (1′) non contengono t esplicitamente, le considerazioni precedenti sono applicabili senza alcuna restrizione circa il valore di α. Infatti, nel caso attuale, qualunque numero può essere risguardato come periodo T di X, Y; in particolare si può supporre T tale che α e $2\pi/T$ sieno commensurabili.

Le (8) si riducono a

$$(8') \qquad \begin{cases} x = \xi \cos \alpha t - \sigma \operatorname{sen} \alpha t\,, \\ y = \xi \operatorname{sen} \alpha t + \sigma \cos \alpha t\,. \end{cases}$$

Supposto α non nullo, nel sistema trasformato a mezzo delle (8′), la variabile t entra soltanto pel tramite degli argomenti $\cos \alpha t$, $\operatorname{sen} \alpha t$, talchè il periodo vale $2\pi/\alpha$. Se poi α è nullo, la (8′) si riduce all'identità e il sistema proposto cade già esso nel tipo (*a*), ovvero nel (*b*).

Nel primo caso la (8′) conduce bensì al tipo (*a*), ma si incappa necessariamente — come è facile riconoscere — nella circostanza eccezionale che il valor medio delle parti di secondo grado è nullo (nè si può quindi applicare il nostro criterio di instabilità).

Si noti del resto che, per questo caso, la questione della stabilità è già stata brillantemente trattata dal sig. POINCARÉ nelle già ricordate classiche ricerche: *Sur les courbes définies par des équations différentielles* ([18]).

Per quanto concerne il secondo caso, i nostri due criteri possono effettivamente riescire; ma nulla sostanzialmente offrono di nuovo, potendo senza difficoltà venir desunti da un'importante Memoria del sig. BENDIXSON ([19]), dove è fatto in modo esauriente lo studio del comportamento delle curve integrali nei casi non contemplati dal sig. POINCARÉ.

Riassumendo, per le equazioni, che non contengono t esplicitamente, nulla ci vien fatto di aggiungere ai risultati dei sigg. POINCARÉ e BENDIXSON, che si addentrano nello studio delle proprietà delle soluzioni ben oltre la semplice discussione della loro stabilità.

([18]) « Journal de Mathématique », 1881, 1882, 1885, 1886. Cfr. in particolare le pagine 172-196 della terza Memoria.

([19]) *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, « Acta Mathematica », tom. 24, 1900. Seguiamo per es. la discussione, che l'A. ci presenta a pag. 74, dei sistemi della forma (22) (il nostro tipo (*b*)). Risulta da essa che, se un certo $\psi(0, 0)$ non si annulla, vi hanno caratteristiche passanti per l'origine con tangenti determinate, e quindi necessariamente instabilità. Ora $\psi(0, 0)$ non è altro (colle nostre notazioni) che il coefficiente di y^2 nell'X del sistema (*b*). Ecco ritrovato il nostro criterio di instabilità.

5. - Equazioni canoniche.

Il sig. POINCARÉ ha notato ([20]) che ogni soluzione periodica di un sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2), \tag{9}$$

(in cui F non dipende da t) si può, scegliendo opportunamente le variabili, supporre definita dalle equazioni

$$p_1 = p_2 = q_2 = 0, \qquad q_1 = \chi(t), \tag{10}$$

dove q_1 varia sempre nel medesimo senso e aumenta di 2π, mentre t cresce di T.

La funzione F è a ritenersi, rispetto a q_1, periodica di periodo 2π, e regolare, rispetto alle altre variabili, nell'intorno del valore zero.

Dacchè le equazioni (9) sono soddisfatte dai valori (10), le tre derivate $\partial F/\partial q_1$, $\partial F/\partial q_2$, $\partial F/\partial p_2$ debbono annullarsi per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$, $q_1 = \chi(t)$, qualunque sia il valore di t. Questo equivale a dire che $\partial F/\partial q_1$, $\partial F/\partial q_2$, $\partial F/\partial p_2$ si annullano, indipendentemente dal valore di q_1, per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$. Invece $\partial F/\partial p_1$ non si annulla per alcun valore di q_1 (p_1, p_2, q_2 essendo abbastanza piccoli). Infatti, quando p_1, p_2 e q_2 si pongono tutti eguali a zero, $\partial F/\partial p_1 = dq_1/dt$ e q_1 varia per ipotesi sempre nello stesso senso.

Stando così le cose, lo sviluppo di F in serie di potenze di p_1, p_2, q_2 mancherà dei termini lineari in p_2, q_2 e sarà quindi della forma

$$C + a_1 p_1 + \frac{1}{2}(a_{11} p_2^2 + 2a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2) + \dots,$$

i termini omessi essendo di terz'ordine almeno (rispetto agli argomenti p_1, p_2, q_2), ovvero anche di secondo, ma con p_1 a fattore. I coefficienti a_1, a_{11}, ecc. sono funzioni periodiche di q_1; C è una pura costante, poichè dC/dq_1 non è altro che $\partial F/\partial q_1$, in cui si faccia $p_1 = p_2 = q_2 = 0$, e deve quindi annullarsi.

Per valori abbastanza piccoli di p_1, p_2, q_2, $\partial F/\partial p_1$ non si annulla,

([21]) *Mécanique céleste*, tom. II, n. 208.

come abbiamo testè osservato. Questo ci permette di eliminare t dal sistema proposto, assumendo q_1 come variabile indipendente.

Avremo le equazioni

$$(11)\qquad \frac{dp_1}{dq_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}},$$

$$(12)\qquad \left|\begin{aligned} \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}, \\ \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}, \end{aligned}\right.$$

le quali definiscono, come si suol dire, le traiettorie del sistema (9).

Ciò che interessa dal punto di vista della stabilità è per lo più il comportamento delle traiettorie.

Ad ogni soluzione periodica del sistema (9) fa riscontro un'orbita chiusa ([21]). L'importante è di sapere se il moto perturbato avviene indefinitamente in prossimità di quest'orbita, ovvero se ne scosta di una quantità finita, per quanto poco si varino le condizioni iniziali.

Interesserà in generale assai meno di sapere se anche le posizioni, corrispondenti ad un medesimo istante, sull'orbita primitiva e sulla perturbata, seguitano a rimanere vicinissime, o se si avranno alla lunga delle differenze finite tra le fasi dei due movimenti. D'altronde non c'è ragione di porre la seconda questione se non dopo risoluta la prima e constatata la stabilità dell'orbita.

Queste osservazioni mostrano come alla indagine della stabilità di una soluzione periodica (10) si sia naturalmente condotti a sostituire la ricerca analoga, relativa alla soluzione

$$(10') \qquad p_1 = p_2 = q_2 = 0$$

del sistema più semplice (11), (12).

([21]) Dal punto di vista astratto basta per ciò interpretare p_1, p_2, q_2 come coordinate generiche, q_1 come coordinata ciclica di uno spazio a quattro dimensioni. Quando però il sistema canonico (9) proviene da un problema di meccanica celeste, si ha effettivamente un'orbita, nel senso astronomico della parola, i cui elementi determinativi sono forniti dalle espressioni di p_1, p_2, q_2 in termini di q_1.

La instabilità (se non la stabilità) della (10') trae seco necessariamente quella della soluzione proposta.

Ciò posto, rivolgiamoci al sistema (11), (12). Esso ammette l'integrale

$$F = \text{cost} .$$

Potremo sostituire questa equazione in termini finiti alla (11). Il valore della costante, che corrisponde alla soluzione (10') è evidentemente C. Ci limiteremo a considerare quelle soluzioni del sistema, per cui

$$F = C .$$

Sotto l'aspetto dinamico questa limitazione corrisponde alle perturbazioni conservative.

Si noterà che, accertata la instabilità quando il valore della costante si suppone fisso, essa rimane provata in generale; ma, quanto alla stabilità, la cosa andrebbe diversamente, potendo benissimo avvenire che una stabilità conservativa non sia più tale rispetto all'intero sistema (11), (12).

Eliminiamo p_1 dalle nostre equazioni, ricavandone il valore in funzione di q_1, p_2, q_2, dalla equazione $F = C$, ossia da

$$\text{(13)} \qquad a_1 p_1 + \frac{1}{2}(a_{11} p_2^2 + 2a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2) + \ldots = 0 .$$

Questa equazione è soddisfatta per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$ e si può risolvere rapporto a p_1, perchè $(\partial F/\partial p_1)_{p_1=p_2=q_2=0}$, cioè a_1, non si annulla, comunque vari q_1. Siccome $(\partial F/\partial p_2)_{p_1=p_2=q_2=0}$, $(\partial F/\partial q_2)_{p_1=p_2=q_2=0}$ sono nulli, così lo sviluppo di p_1 comincierà da termini di secondo grado in p_2, q_2. Designiamone l'insieme con K e determiniamo K, portando nella (13), per p_1, una espressione del tipo

$$p_1 = K + H$$

(con H almeno di terz'ordine in p_2, q_2).

Ricordiamo che i termini non scritti nella (13), o erano di terzo grado per lo meno in p_2, q_2, oppure, essendo complessivamente di secondo almeno in p_1, p_2, q_2, contenevano p_1 a fattore. Dopo la sostituzione di $K + H$ a p_1, quei termini acquistano tutti una dimensione superiore alla seconda in p_2, q_2. La parte di secondo grado nel primo membro della (13) è dunque

$$a_1 K + \frac{1}{2}(a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_2q_2 + a_{22}q_2^2),$$

e, dovendo essa annullarsi identicamente, risulta

$$K = -\frac{1}{2}\,\frac{a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_2q_2 + a_{22}q_2^2}{a_1}.$$

Ritenendo p_1 definito dalla equazione $F = C$ (ossia $p_1 = K + H$), abbiamo

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}},$$

e le (12), libere ormai da p_1, diverranno

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial(K+H)}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial(K+H)}{\partial p_2}. \tag{14}$$

I secondi membri sono funzioni periodiche di q_1, che si annullano per $p_2 = q_2 = 0$; i termini, provenienti da H, sono di secondo ordine, almeno, rapporto a p_2, q_2.

Ecco un sistema analogo all'(1') del precedente paragrafo.

Vediamo di adattare ad esso il criterio di instabilità, che abbiamo ivi indicato. In primo luogo gli esponenti caratteristici β_1, β_2 della soluzione $p_2 = q_2 = 0$ (supposti privi di parte reale, e quindi della forma $\pm\beta\sqrt{-1}$) dovranno corrispondere ad un valore di β razionale (commensurabile con $2\pi/T$, il T del caso generale essendo qui 2π).

Se si richiama la proprietà delle soluzioni periodiche dei sistemi canonici (9) di ammettere due esponenti caratteristici nulli e due altri α e $-\alpha$ eguali e di segno opposto ([22]), e si osserva che $\beta_1(2\pi/T)$, $\beta_2(2\pi/T)$ sono in ogni caso esponenti caratteristici della (10) ([23]), riconosciamo

---

([22]) POINCARÉ, *Mécanique celeste*, tom. I, nn. 69, 70.

([23]) Infatti le equazioni alle variazioni delle (10), osservando la espressione di F, si possono scrivere:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{da_1}{dq_1}p_1, \qquad \frac{dq_1}{dt} = a_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = a_1\frac{\partial K}{\partial q_2}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = -a_1\frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

intanto che il criterio di instabilità si trasporterà a quelle soluzioni periodiche (10), per cui $\alpha/\sqrt{-1}$ è commensurabile col *moto medio* $2\pi/T$. (Si dice in generale *moto medio*, per una soluzione periodica (10), l'aumento, che subirebbe nell'unità di tempo la coordinata ciclica q_1, qualora essa variasse in modo uniforme.)

Proseguendo poi come a § 3, si dovrà immaginare eseguita sulle variabili p_2, q_2 una sostituzione lineare

$$(8'') \qquad \begin{cases} p_2 = c_{11}x + c_{12}y\,, \\ q_2 = c_{21}x + c_{22}y\,, \end{cases}$$

i cui coefficienti (supposto α non nullo e quindi i due esponenti caratteristici distinti) sono gli integrali delle equazioni alle variazioni.

Per la circostanza particolare che le equazioni (14), e così le loro equazioni alle variazioni

$$(7'') \qquad \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}\,, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}\,,$$

sono canoniche, il cambiamento di variabili (8″) dà luogo al sistema [24]

$$(14') \qquad \frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \qquad \frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,,$$

La prima serve a definire p_1; eliminando t dal secondo gruppo, a mezzo della seconda, troviamo le equazioni alle variazioni del sistema (14):

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}\,, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}\,.$$

Reciprocamente si passa da queste alle due anzidette, sostituendo a q_1 una variabile t, definita da $dq_1/dt = a_1$. Con questo cambiamento di variabili gli esponenti β_1, β_2 (cfr. Poincaré, loco cit., n. 70) vengono moltiplicati per $2\pi/T$. Dunque $\beta_1(2\pi/T)$, $\beta_2(2\pi/T)$ sono esponenti caratteristici delle equazioni alle variazioni del dato sistema canonico.

([24]) Immaginiamo infatti, come è sempre lecito, scelte le costanti di integrazione in modo che il valore iniziale di

$$D = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

sia eguale all'unità. Avendo, per la forma canonica delle (7″), $\partial D/dt = 0$, sarà $D = 1$ per qualsiasi valore di t. Ne consegue, in virtù delle (8″),

$$c_{11} = \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial q_2}\,, \qquad c_{12} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial q_2}\,,$$

$$c_{21} = \frac{\partial q_2}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial p_2}\,, \qquad c_{22} = \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial p_2}\,;$$

valgono dunque le relazioni di Jacobi e quindi x, y sono costanti canoniche. Donde senz'altro le (14′). (Cfr. per es. Tisserand, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 59.) Del resto nel caso presente che è ancora canonico e rientra nel tipo (a). Si intende che la funzione H è qui a ritenersi espressa per le x, y a mezzo delle (8″).

Sia H_3 la forma costituita dai termini di terzo grado e $[H_3]$ il suo valor medio (rapporto a q_1). A norma del § 3, condizione sufficiente per l'instabilità della (14′) si è che le due forme $\partial[H_3]/\partial x$, $\partial[H_3]/\partial y$ non ammettano fattori comuni, o, ciò che è lo stesso, che la $[H_3]$ sia priva di fattori multipli. Concludiamo pertanto:

Le soluzioni periodiche (10), *per cui* $\alpha/\sqrt{-1}$ ($\gtrless 0$) *è commensurabile col moto medio, sono instabili, purchè soltanto sia priva di fattori multipli una forma cubica* $[H_3]$ (il cui calcolo dipende, nel modo detto, dai coefficienti della funzione caratteristica F fino al terzo ordine al più).

Si vedrebbe in modo analogo (cfr. pag. 52) che, se $\alpha = 0$, la condizione, che assicura l'instabilità, è ancora la medesima, oppure $\partial^3[H_3]/\partial y^3 \gtrless 0$.

C'è da avvertire che le c sono in quest'ultimo caso definite in modo alquanto diverso, le altre lettere conservando però lo stesso significato. Il sistema, cui si perviene da ultimo, non è più il (14′), sibbene

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dq_1} = x - \frac{\partial H}{\partial x},$$

che non ha forma canonica.

6. - Osservazione generale concernente la stabilità delle soluzioni periodiche, che dipendono da un parametro.

Torniamo per un momento sulla definizione di stabilità di una soluzione periodica. In quella data a § 1, ci siamo riferiti, per maggior comodo,

---

la verifica diretta è immediata. Basta notare che la sostituzione (8″) in (14) dà

$$c_{11}\frac{dx}{dq_1} + c_{12}\frac{dy}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2},$$

$$c_{21}\frac{dx}{dq_1} + c_{22}\frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial p_2}$$

e queste, risolute, divengono

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2}c_{22} + \frac{\partial H}{\partial p_2}c_{12} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}c_{21} - \frac{\partial H}{\partial p_2}c_{11} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

c.d.d.

ad un sistema particolare di variabili. Volendo ora attribuirle una forma valida per qualunque sistema di variabili, basterà evidentemente (col solito linguaggio cinematico) enunciarla come segue:

Sia Π_0 la posizione iniziale del mobile, corrispondente ad una soluzione periodica Σ, Π_t la posizione nell'istante t; P_0 e P_t abbiano analogo significato per una soluzione generica S.

La soluzione Σ sarà a dirsi stabile se, scelto un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, ne esiste un secondo η, tale che la distanza $\overline{P_t\Pi_t}$ si mantiene, per qualsiasi valore di t, inferiore ad ε, ogniqualvolta la posizione iniziale P_0 dista da Π_0 meno di η.

La Σ è instabile nel caso opposto, vale a dire se, fissato ε abbastanza piccolo, tra le posizioni iniziali P_0 corrispondenti alle S, ve n'ha di vicine quanto si vuole a P_0, per cui la distanza $\overline{P_t\Pi_t}$ finisce col diventare, per qualche valore di t, $\geqslant \varepsilon$.

Intesi su ciò, prendiamo a considerare un generico sistema differenziale (1) e supponiamo che il sistema ammetta una serie ∞^1 di soluzioni periodiche Σ, dipendenti da un parametro μ; i valori iniziali $x_i^{(0)}$, corrispondenti a queste soluzioni, essendo funzioni continue del parametro μ (per es. in un intorno C di $\mu = 0$).

Si fissi in un modo qualunque un insieme di valori μ' del parametro μ, tale che l'insieme derivato comprenda tutti i punti dell'intervallo C (per es. l'insieme costituito dai punti razionali di C). Si ha il teorema:

Le soluzioni Σ_μ sono stabili od instabili assieme alle $\Sigma_{\mu'}$ (supposto che, per tutti i valori μ' dell'insieme, quest'ultime si comportino nello stesso modo).

Sieno per es. le soluzioni $\Sigma_{\mu'}$ tutte stabili. Si tratta di far vedere che una generica Σ_{μ_0} (dove μ_0 appartiene a C) è pure stabile.

In primo luogo si può trovare una $\Sigma_{\mu'}$ vicina a Σ_{μ_0} quanto ci piace. Precisiamo questa asserzione. Dicasi Π_0 la posizione iniziale corrispondente a Σ_{μ_0} e Π'_0 le posizioni iniziali, corrispondenti alle $\Sigma_{\mu'}$. L'ipotesi fatta circa l'insieme μ' ci assicura che, in ogni intorno comunque piccolo di Π_0, cadono punti Π'_0; ora è sempre possibile, scegliendo la distanza iniziale $\overline{\Pi'_0\Pi_0}$ abbastanza piccola, fare in modo che $\overline{\Pi'_t\Pi_t}$ si mantenga inferiore ad un limite prefissato η, per un intervallo finito di tempo; il periodo T per es. Immaginiamo Π'_0 (ossia μ') fissato in tal guisa. Le due soluzioni Σ_{μ_0}, $\Sigma_{\mu'}$ essendo entrambe periodiche (collo stesso periodo T), potremo concludere

$$\overline{\Pi'_t\Pi_t} < \eta\,, \tag{15}$$

per qualsiasi valore di t.

Dacchè la soluzione $\Sigma_{\mu'}$ è stabile, scelto arbitrariamente $2\varepsilon/3$, avremo

$$\overline{P_t \Pi'_t} < \frac{2}{3}\varepsilon\,, \tag{16}$$

per ogni S, la cui posizione iniziale P_0 dista da Π'_0 meno di un certo limite, che rappresenterò con 2η (e che evidentemente non supera $2\varepsilon/3$). Dalla (15) (dove si intende scelto per η questo valore) e dalla (16) segue agevolmente la dimostrazione della proprietà enunciata. Infatti, dato ε, prendiamo η nel modo testè detto e consideriamo un generico P_0, per cui

$$\overline{P_0 \Pi_0} < \eta\,.$$

La (15), per $t = 0$, dà

$$\overline{\Pi'_0 \Pi_0} < \eta\,,$$

quindi

$$\overline{P_0 \Pi'_0} < 2\eta\,,$$

con che la (16) rimane soddisfatta per ogni valore di t.

Confrontando colla (15) e tenendo presente che $\eta \leqslant \varepsilon/3$, si ricava

$$\overline{P_t \Pi_t} < \varepsilon\,,$$

che è la condizione di stabilità della Σ_{μ_0}.

Nel caso invece, in cui le $\Sigma_{\mu'}$ sono instabili, si trova, vicino quanto si vuole a Π'_0, un qualche P_0, per cui $\overline{P_t \Pi'_t}$ finisce coll'assumere, in un istante almeno, un valore fisso; 2ε per es.

D'altra parte $\overline{\Pi_t \Pi'_t}$ si può ritenere (scelto opportunamente μ') piccolo a piacere, per qualsiasi valore di t. Esistono dunque posizioni P_0, per le quali $\overline{P_t \Pi_t}$ raggiunge valori, vicini a 2ε, pure quanto si vuole; in particolare quindi superiori ad ε.

Il teorema è così completamente dimostrato.

È chiaro che una proprietà analoga sussiste per due o più parametri. Così per es., se un sistema ammette una duplice infinità di soluzioni periodiche $\Sigma_{\mu\nu}$, corrispondenti ai valori μ, ξ di un certo campo C, e si ha in C un insieme di punti (μ', ξ'), il cui derivato sia denso in C (comprenda cioè tutti i punti di C), *le $\Sigma_{\mu\nu}$ sono stabili od instabili assieme alle $\Sigma_{\mu'\nu'}$*; ecc.

Capitolo IV.

APPLICAZIONE AL PROBLEMA DEI TRE CORPI

1. - Equazioni del problema ristretto [25].

Si suol chiamare *ristretto* quel caso particolare del problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di Newton), in cui il movimento è piano, uno dei corpi ha massa trascurabile e gli altri due descrivono orbite circolari attorno al comune centro di gravità.

Sieno S, J, P (Sole, Giove, Pianeta) i tre corpi; $1-\mu$, μ, 0 le rispettive masse.

Si suppone, come s'è detto, che il moto kepleriano (non perturbato, per essere nulla la massa di P) dei due corpi S, J sia il più semplice possibile, cioè che essi si muovano di moto circolare uniforme attorno al loro centro di gravità O: la distanza SJ rimane allora costante.

Per semplificare, conviene assumere SJ come unità di lunghezza e disporre dell'unità di tempo in modo che la costante f di Gauss si riduca all'unità.

Riesce così eguale ad 1 la velocità angolare costante, con cui la retta SJ ruota attorno ad O [26].

Riferiamoci ad un sistema di assi mobili ξ, η, coll'origine in O e l'asse ξ coincidente con SJ, la direzione positiva essendo per es. OJ (fig. 5).

Le coordinate ξ, η di S sono $-\mu$, 0; quelle di J, $1-\mu$, 0. Designeremo con r, Δ le distanze $\overline{PS}$, $\overline{PJ}$, con v l'angolo $\widehat{PSJ}$ (contato nel verso $\xi \rightarrow \eta$).

La forza, che sollecita P, deriva dal potenziale

$$\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta},$$

---

[25] Cfr. H. Poincaré, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 9.

[26] Infatti questa velocità angolare (o moto medio) compete altresì al moto relativo di J rispetto ad S. Ora, fra il moto medio n, la somma delle masse m_1+m_2 di due corpi l'asse maggiore a dell'orbita e la costante f, si ha la relazione fondamentale

$$n=\sqrt{\frac{f(m_1+m_2)}{a^3}}.$$

Essendosi qui assunti m_1+m_2, SJ cioè a, ed f eguali all'unità, risulta $n=1$, giusta l'asserto.

e le equazioni del movimento sono

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{d\eta}{dt}-\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d\xi}{dt}-\eta=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right).$$

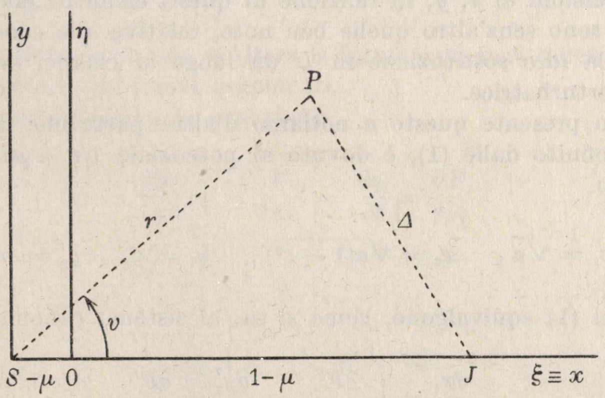

Fig. 5.

Passando dagli assi ξ, η ad un sistema parallelo x, y coll'origine in S, si ha

$$\xi=x-\mu\,,\qquad \eta=y\,,$$

e per conseguenza

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-x&=-\mu+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\mu\frac{\partial U}{\partial x}\,,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-y&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\mu\frac{\partial U}{\partial y}\,,\end{aligned}\right.$$

essendosi posto

$$(2)\qquad U=\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-x=\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-r\cos v\,.$$

Consideriamo per un momento il moto non perturbato del corpo P, quello cioè, che corrisponderebbe a $\mu = 0$. Esso è evidentemente kepleriano e può essere definito (rispetto a un sistema eliocentrico di direzione invariabile) dai suoi elementi ellittici a (semiasse maggiore), e (eccentricità), ζ (anomalia media), ω' (longitudine del perielio). Il moto relativo rispetto ai nostri assi x, y possiede ancora gli elementi a, e, ζ; solo la longitudine del perielio non è più ω', ma $\omega = \omega' - t$, dacchè l'asse x ha esso stesso la longitudine t.

Le espressioni di x, y, in funzione di questi elementi ellittici *relativi* a, e, ζ, ω, sono senz'altro quelle ben note, relative alle coordinate eliocentriche; la loro sostituzione in U dà luogo ai classici sviluppi della funzione perturbatrice.

Teniamo presente questo e notiamo d'altra parte che il moto eliocentrico, definito dalle (1), è dovuto al potenziale $1/r + \mu U$.

Ponendo

$$x_1 = \sqrt{a}\,, \qquad x_2 = \sqrt{a(1-e^2)}\,, \qquad y_1 = \zeta, \qquad y_2' = \omega',$$

le equazioni (1) equivalgono, come si sa, al sistema canonico

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial y_1}\,, \qquad \frac{dy_1'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial x_1}\,,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial y_2}\,, \qquad \frac{dy_2'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial x_2}\,,$$

il quale ha per funzione caratteristica (quella corrispondente al moto non perturbato, che è la costante delle forze vive $-1/2x_1^2$, più la energia potenziale delle forze perturbatrici $-\mu U$; dunque)

$$F' = -\frac{1}{2x_1^2} - \mu U\,.$$

Introduciamo, al posto di y_2', la variabile $y_2 = \omega = y_2' - t$. Le equazioni rimangono canoniche, purchè si sostituisca ad F'

$$F = -\frac{1}{2x_1^2} - x_2 - \mu U\,.$$

Per quanto s'è osservato, quest'ultima funzione dipende soltanto dagli argomenti x_1, x_2, y_1, y_2 (non esplicitamente da t).

Dovendo in seguito considerare valori dell'eccentricità vicini a zero, la scelta delle variabili precedenti non è opportuna, perchè la funzione F cessa di essere olomorfa, quando $x_1 = x_2$.

Si gira la difficoltà, adottando le variabili

$$p_1 = x_1 , \qquad q_1 = y_1 + y_2 ;$$

$$p_2 = \sqrt{2(x_1 - x_2)} \cos y_2 , \qquad q_2 = -\sqrt{2(x_1 - x_2)} \operatorname{sen} y_2 ,$$

colla quale sostituzione non si altera la forma canonica, mentre F diviene funzione regolare dei nuovi argomenti.

Avremo in definitiva le equazioni

$$(1') \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2),$$

dove

$$F = -\frac{1}{2p_1^2} - p_1 + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) - \mu U ,$$

la funzione U, definita dalla (2), dovendosi, bene inteso, ritenere espressa per le p_i, q_i.

L'effettivo calcolo di questa espressione (della quale ci occorreranno più innanzi i primi termini) si farà ricorrendo ai noti sviluppi di $1/r$, $r \cos v$, $1/\Delta$ in funzione degli argomenti a, e, ζ, ω, e passando poi alle nostre variabili mediante le relazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} p_1 = \sqrt{a} , & q_1 = \omega + \zeta , \\ p_2 = \eta \cos \omega , & q_2 = -\eta \operatorname{sen} \omega , \end{cases}$$

$$(5) \qquad \eta = \left\{2\left(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}\right)\right\}^{1/2},$$

che si raccolgono immediatamente da quanto precede. (I radicali, non occorre dirlo, si intendono presi in valore assoluto.)

Si noti che η è funzione regolare di e nell'intorno di $e = 0$ e si annulla con e. Infatti

$$\eta = \left\{2\left(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}\right)\right\}^{1/2} = a^{1/4}\left\{2[1-(1-e^2)^{1/2}]\right\}^{1/2} = a^{1/4} e \left(1 + \frac{e^2}{8} + \dots\right).$$

Si può anche dire che η è la radice positiva dell'equazione

$$\frac{\eta^4}{4a} - \frac{\eta^2}{\sqrt{a}} + e^2 = 0\,, \tag{5'}$$

che si annulla con e.

2. - Soluzioni periodiche prossime ad un movimento circolare uniforme.

Per $\mu = 0$, l'integral generale delle (1') è

$$p_1 = p_1^0\,, \qquad q_1 = (n-1)t + q_1^0\,, \qquad (n = (p_1^0)^{-3/2}),$$
$$p_2 = p_2^0 \cos t - q_2^0 \operatorname{sen} t\,, \qquad q_2 = p_2^0 \operatorname{sen} t + q^2 \cos t\,.$$

Le ∞^4 soluzioni, in esso contenute, corrispondono ai movimenti kepleriani di P (nel piano dell'orbita di Giove). È appena necessario osservare che, essendo $q_1 = \omega + \zeta$ la longitudine media rispetto ad SJ, $n-1$ rappresenta il moto medio relativo, talchè $n = (p_1^0)^{-3/2}$ designa, come d'abitudine, il moto medio assoluto.

Consideriamo in particolare le ∞^1 soluzioni

$$p_1 = \sqrt{R}\,, \qquad q_1 = (n-1)t, \qquad p_2 = q_2 = 0 \tag{6}$$

che si ottengono prendendo $p_2^0 = 0$, $q_2^0 = 0$, $q_1^0 = 0$ (la qual ultima condizione affatto inessenziale equivale a scegliere l'epoca di una congiunzione per origine del tempo), e scrivendo $\sqrt{R}$ per p_1^0.

Le (6), che sono evidentemente soluzioni periodiche di periodo $2\pi/(n-1)$, definiscono movimenti circolari uniformi. Basta notare che, dall'annullarsi di p_2, q_2, segue $e = 0$, e quindi l'ellisse kepleriana di semiasse maggiore $(p_1^0)^2$ si riduce al cerchio di raggio R.

Dalla superiore espressione dell'integrale generale segue immediatamente che i due esponenti caratteristici non nulli di una generica (6) sono $\pm\sqrt{-1}$.

Per μ positivo e abbastanza piccolo, il sistema (1') possiede soluzioni periodiche Σ_μ, vicine ad una qualsiasi (6), almeno se $1/(n-1)$ non è un numero intero.

Rappresentiamo infatti con

$$\begin{aligned} p_i &= \varphi_i(t;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu)\,, \\ q_i &= \psi_i(t;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu)\,. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2),$$

l'integral generale del sistema (1') e notiamo che le soluzioni periodiche di periodo $2\pi/(n-1)+\tau$ sono caratterizzate dalle equazioni

$$\varphi_1\left(\frac{2\pi}{n-1}+\tau;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu\right)-p_1^0=0\,,$$

$$\psi_1\left(\frac{2\pi}{n-1}+\tau;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu\right)-q_1^0-2\pi=0\,,$$

$$\varphi_2\left(\frac{2\pi}{n-1}+\tau;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu\right)-p_2^0=0\,,$$

$$\psi_2\left(\frac{2\pi}{n-1}+\tau;\ p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0;\ \mu\right)-q_2^0=0\,.$$

I primi membri delle due ultime equazioni si riducono, per $\mu=\tau=0$, a

$$p_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1}-1\right)-q_2^0\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n-1}\,,$$

$$p_2^0\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n-1}+q_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1}-1\right);$$

quindi il loro determinante funzionale, rispetto alle variabili p_2^0, q_2^0, vale

$$2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n-1}\right)=4\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n-1}>0\,,$$

dacchè si esclude che $1/(n-1)$ sia un numero intero.

Codesto determinante funzionale, che è funzione continua del parametro, rimane diverso da zero per μ abbastanza piccolo, talchè le dette equazioni si possono risolvere rapporto a p_2^0, q_2^0.

Portiamo le espressioni, che così si ottengono per p_2^0, q_2^0 (in funzione di p_1^0, q_1^0, τ, μ), nella seconda equazione

$$\psi_1-q_1^0-2\pi=0\,.$$

Potremo risolvere rispetto a τ, poichè non si annulla la derivata del primo membro dell'equazione rapporto a questa variabile (per $\mu=0$, $\partial\psi_1/\partial\tau=n-1$).

Delle equazioni di condizione rimane oramai soltanto la prima,

$$\varphi_1-p_1^0=0\,,$$

e questa, coi valori trovati per p_2^0, q_2^0, τ, risulterà identicamente soddisfatta.

Infatti il sistema (1') ammette l'integrale

$$F = -C$$

(la C si suol chiamare costante di JACOBI) e la equazione $F = -C$ si può risolvere rapporto a p_1, per μ abbastanza piccolo (cfr. § 5 del capitolo antecedente).

Siam così fatti certi che p_1 riprende il valore iniziale, ogniqualvolta ciò accade per le altre tre variabili p_2, q_2, q_1 (quest'ultima a meno di un multiplo di 2π). La condizione $\varphi_1 - p^0 = 0$ è dunque una conseguenza delle altre, giusta l'asserto.

Questa discussione ci apprende non soltanto che esistono per il sistema (1') soluzioni periodiche Σ_μ vicine ad ogni (6) (ritenuto $1/(n-1)$ non intero); ma più precisamente che ve n'ha ∞^2 ([27]), essendo lecito scegliere arbitrariamente i valori iniziali di q_1^0, p_1^0 (quest'ultimo in prossimità a $\sqrt{R}$), cioè, potremmo anche dire, il momento di una congiunzione e la costante di JACOBI. (Il valore di tale costante per una soluzione (6) è evidentemente $1/2R + \sqrt{R}$).

Se si suppone $R < 1$, alle Σ_μ vicine competono orbite chiuse, interne al cerchio di raggio 1 (orbita di Giove); si tratterà quindi, con linguaggio astronomico, di un pianeta inferiore; per $R > 1$, si avranno evidentemente pianeti superiori.

Abbiamo osservato più sopra che gli esponenti caratteristici (non nulli) d'una generica (6) sono $\pm\sqrt{-1}$; quelli d'una Σ_μ, per i piccoli valori di μ, saranno vicini a $\pm\sqrt{-1}$ ed essi pure, si intende, puramente immaginari, perchè devono essere ad un tempo coniugati e di segno opposto. Riconosciamo di qua che, tenendo conto soltanto della prima approssimazione, le soluzioni Σ_μ appariscono stabili. Però, appoggiandoci ai precedenti capitoli, ci verrà fatto di dimostrare con tutto rigore che una parte almeno di esse è certamente instabile.

3. - Instabilità di queste soluzioni.

Attribuiamo nelle (6) al raggio R un valore della forma $(1+3/h)^{-2/3}$, h designando un intero, positivo o negativo, primo con 3 (e diverso da -1, -2, per modo che $1 + 3/h > 0$).

([27]) Cfr. H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 43. L'A. si riferisce alle variabili x_i, y_i del paragrafo precedente. Siccome le (6) corrispondono a valori x_i, y_i, per i quali la F delle equazioni differenziali (1') non è regolare, così non sarebbe stato a priori giustificato richiamarsi senz'altro al risultato del sig. POINCARÉ.

Sarà

$$n = R^{-3/2} = 1 + \frac{3}{h},$$

e quindi

$$\frac{1}{n-1} = \frac{h}{3}. \tag{7}$$

Intesi che R abbia un siffatto valore, prendiamo in esame le soluzioni periodiche, vicine alla corrispondente (6). Dal paragrafo precedente siamo fatti certi della loro esistenza, poichè $1/(n-1)$ non è intero. Ponendo

$$p_1^0 = \sqrt{R} + \nu = \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \nu,$$

possiamo anzi ritenere che ad ogni coppia arbitrariamente prefissata di valori di μ e ν (purchè abbastanza piccoli) e ad ogni h corrisponda *una* soluzione periodica $\Sigma_{\mu\nu}^h$ del sistema (1'). (Dico una, e non ∞^1, convenendo di prescindere dall'arbitrarietà di q_1^0, coll'assumere per es. $q_1^0 = 0$.)

Le traiettorie del sistema (1') sono definite (§ 5 del capitolo precedente) dalle equazioni

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial p_2}, \tag{8}$$

dove H designa la espressione di p_1 in funzione di p_2, q_2, q_1, che si ottiene risolvendo la equazione

$$F = -C.$$

Ad ogni soluzione periodica $\Sigma_{\mu\nu}^h$ del sistema (1') fa riscontro una soluzione, pure periodica, $\Omega_{\mu\nu}^h$ delle (8).

Per provare la instabilità delle $\Sigma_{\mu\nu}^h$, ci basterà accertare quella delle $\Omega_{\mu\nu}^h$, rispetto alle traiettorie, cui compete *lo stesso valore*

$$\frac{1}{2(\sqrt{R} + \nu)^2} + \sqrt{R} + \nu,$$

di C. È necessario perciò studiare la funzione H. Essa viene, come s'è detto, definita da

$$F + C = -\frac{1}{2p_1^2} - p_1 + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) - \mu U + \frac{1}{2(\sqrt{R} + \nu)^2} + \sqrt{R} + \nu = 0,$$

ed è precisamente quella radice p_1, che si riduce a $\sqrt{R}$ per $\mu = \nu = p_2 = q_2 = 0$.

Si riconosce senza difficoltà che, quando $\mu = 0$, l'espressione di p_1 si può presentare sotto la forma

$$\sqrt{R} + \nu\mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\{1 + \nu\mathfrak{P}_2(\nu)\}\eta^2 + \eta^4\mathfrak{Q}(\eta^2, \nu),$$

dove, a norma delle (4), η^2 sta per $p_2^2 + q_2^2$, n ha il valore costante (7), e $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}$ designano serie di potenze degli argomenti indicati.

Immaginiamo di sviluppare H per potenze ascendenti di μ e poniamo

$$H = H^{(0)} + \mu H^{(1)} + \dots .$$

Avremo chiaramente

$$H^{(0)} = (p_1)_{\mu=0} = \sqrt{R} + \nu\mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\{1 + \nu\mathfrak{P}_2(\nu)\}\eta^2 + \eta^4\mathfrak{Q}(\eta^2, \nu),$$

$$H^{(1)} = -\left|\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}\right|_{\mu=0} = \left\{\frac{U}{p_1^{-3} - 1}\right\}_{p_1 = H^{(0)}}.$$

Per $\mu = \nu = 0$, l'espressione di H

$$\sqrt{R} - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}(p_2^2 + q_2^2) + \dots$$

mostra che gli esponenti caratteristici dell'orbita circolare Ω_{00}^h sono $\pm\sqrt{-1}/(n-1)$. (Questo del resto potevasi prevedere, ricordando in generale che, se T e $\pm\alpha$ sono periodo ed esponenti caratteristici di una soluzione periodica del sistema (1′), $\pm\alpha T/2\pi$ sono gli esponenti caratteristici per la corrispondente soluzione del sistema (8)).

Ciò posto, la trasformazione (corrispondente alla (8) del paragrafo antecedente), atta a far passare dal sistema (8) ad uno di tipo (a), è

(per $\mu = \nu = 0$)

$$
(9) \quad \begin{cases} p_2 = x \cos \dfrac{q_1}{n-1} - y \operatorname{sen} \dfrac{q_1}{n-1} = x \cos \dfrac{hq_1}{3} - y \operatorname{sen} \dfrac{hq_1}{3}, \\ q_2 = x \operatorname{sen} \dfrac{q_1}{n-1} + y \cos \dfrac{q_1}{n-1} = x \operatorname{sen} \dfrac{hq_1}{3} + y \cos \dfrac{hq_1}{3}. \end{cases}
$$

In generale essa si potrà rappresentare con

$$
(10) \quad \begin{cases} p_2 = x \left\{ \cos \dfrac{hq_1}{3} + c_{11} \right\} - y \left\{ \operatorname{sen} \dfrac{hq_1}{3} - c_{12} \right\} + \mu\varphi, \\ q_2 = x \left\{ \operatorname{sen} \dfrac{hq_1}{3} + c_{21} \right\} + y \left\{ \cos \dfrac{hq_1}{3} + c_{22} \right\} + \mu\psi, \end{cases}
$$

le c essendo funzioni di q_1, che si annullano per $\mu = \nu = 0$; $\mu\varphi$, $\mu\psi$ le espressioni di p_2, q_2 nella soluzione periodica $\Omega^h_{\mu\nu}$.

Immaginiamo di attribuire ai parametri μ, ν dei valori μ', ν', pei quali gli esponenti caratteristici della $\Omega^h_{\mu'\nu'}$ sieno della forma $k'\sqrt{-1}/k$, con k' e k numeri interi.

L'insieme, costituito da questi valori μ', ν', è tale — notiamolo bene — che il suo derivato contiene tutti i valori reali abbastanza piccoli di μ e ν.

Conveniamo, per maggior chiarezza, di designare con $\mathfrak{H}$ il risultato della sostituzione (10) in H; con $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ ecc. i coefficienti dello sviluppo di $\mathfrak{H}$ in serie di potenze di μ; infine con $\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_3^{(0)}$, $\mathfrak{H}_3^{(1)}$, ... l'insieme dei termini di $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$, ... di terzo grado rapporto ad x, y.

A tenore del precedente capitolo, una $\Sigma^h_{\mu'\nu'}$ sarà instabile se il valor medio di $\mathfrak{H}_3$ non ha fattori multipli. Questo valor medio si riferisce evidentemente alla variabile q_1, di cui $\mathfrak{H}$ è, al pari di H, funzione periodica. Il periodo non è però in generale 2π, come nella H, sibbene soltanto $2k\pi$. Lo sarà $6k\pi$ ([28]) a più forte ragione e a noi basterà verificare che non ha fattori multipli la forma

$$
\frac{1}{6k\pi} \int_0^{6k\pi} \mathfrak{H}_3 \, dq_1 .
$$

Si ha

$$
\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_3^{(0)} + \mu \mathfrak{H}_3^{(1)} + \dots ,
$$

ma $\mathfrak{H}_3^{(0)}$ è identicamente nullo.

([28]) Si è triplicato il periodo, per poter senz'altro risguardare funzioni periodiche anche sen $q_1/3$, cos $q_1/3$; la quale circostanza, come vedremo nel seguente paragrafo, semplifica alquanto i calcoli.

Infatti i termini indipendenti da μ in $\mathfrak{H}$ provengono da $H^{(0)}$ mercè la sostituzione (10), in cui, bene inteso, si ponga $\mu = 0$, sostituzione, che risulta con ciò lineare ed omogenea. Ora $H^{(0)}$ è funzione soltanto di $\eta^2 = p_2^2 + q_2^2$. Quindi $\mathfrak{H}^{(0)}$ non contiene termini di grado dispari in x, y, e in particolare $\mathfrak{H}_3^{(0)} = 0$.

La funzione $\mathfrak{H}_3^{(1)}$ è a sua volta sviluppabile in serie di potenze di ν. Sia $\mathfrak{H}_3'^{(1)}$ il termine indipendente da ν. Per μ e ν abbastanza piccoli, la condizione che sia privo di fattori multipli il valor medio di $\mathfrak{H}_3$ si troverà evidentemente verificata, qualora ciò accada per il valor medio di $\mathfrak{H}_3'^{(1)}$.

Dimostreremo nel paragrafo seguente che

$$[\mathfrak{H}_3'^{(1)}] = \Theta \cdot (x^3 - 3xy^2)\,,$$

dove Θ è una funzione della sola R, che non si annulla per i valori di R, che qui si considerano.

La forma cubica

$$x^3 - 3xy^2 = x(x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}y)$$

non possiede evidentemente fattori multipli; di qua risulta la instabilità delle soluzioni $\Sigma^h_{\mu'\nu'}$ (purchè soltanto μ', ν' sieno abbastanza piccoli).

L'insieme (μ', ν') è tale, come s'è osservato, che il suo derivato comprende tutti i valori reali (appartenenti ad un certo intorno di $\mu = 0$, $\nu = 0$); dunque:

Per μ e ν abbastanza piccoli, ogni soluzione periodica $\Sigma^h_{\mu\nu}$ è necessariamente instabile.

Si pone ora la questione: Queste $\Sigma^h_{\mu\nu}$ di accertata instabilità esauriscono tutte le soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi, o ne rimangono escluse, e quali?

Dal paragrafo antecedente risulta che (a prescindere dalla inessenziale arbitrarietà di q_1^0, e supponendo che il parametro μ abbia un valore fisso abbastanza piccolo) vi hanno ∞^1 di tali soluzioni, le quali rimangono univocamente determinate dal valore p_1^0 della variabile p_1.

Per rispondere alla domanda, testè formulata, basta evidentemente esaminare quale sia l'insieme dei valori di p_1^0, che corrispondono alle nostre $\Sigma^h_{\mu\nu}$. Per una generica di esse, si ha

$$p_1^0 = \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \nu\,.$$

Se non vi fosse la limitazione del *ν abbastanza piccolo*, fissato ad arbitrio un valore di h (primo con 3, e non -1, nè -2), se ne trarrebbe, facendo variare ν, l'intera categoria delle soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi. In fatto però la nostra dimostrazione implica che ν non superi (in valore assoluto) un certo limite, variabile in generale con h, che rappresenterò con δ_h. A rigore dunque rimane provata la instabilità di quelle soluzioni periodiche soltanto, il cui p_1^0 cade entro un qualche intervallo

$$\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-1/3}-\delta_h\,, \qquad \left(1+\frac{3}{h}\right)^{-1/3}+\delta_h\,.$$

Il massimo di $(1+3/h)^{-1/3}$ si ha per $h=-4$, il minimo per $h=1$; al crescere indefinito di h, per valori positivi o negativi, i punti $(1+3/h)^{-1/3}$ convergono, dalla sinistra o dalla destra, al valore 1.

Riferendoci al caso limite $\mu=0$, le orbite circolari, per cui p_1^0 si trova compreso nei detti intervalli, ricoprono tante piccole corone Z_n di raggio medio $(1+3/h)^{-2/3}$ e di ampiezza

$$\delta'_h=\left\{\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-1/3}+\delta_h\right\}^2-\left\{\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-1/3}-\delta_h\right\}^2.$$

Per quanto precede, noi siamo in grado di affermare che sono instabili le soluzioni periodiche vicine ad ognuna di queste ([29]) circonferenze.

In definitiva vien messa in luce *la esistenza di zone di instabilità, le quali si addensano intorno all'orbita di Giove.*

È ben probabile che le soluzioni periodiche del nostro problema sieno tutte instabili, o, in altri termini, che la regione di instabilità occupi l'intero piano. Ma le considerazioni, istituite finora, non ci autorizzano ad affermarlo. Nemmeno possiam trarne alcun ragguaglio sull'ampiezza degl'intervalli δ_h. Questo solo si sa, che sono diversi da zero.

([29]) Possiamo caratterizzarle, dicendo che il loro moto medio è *vicino* ad un numero della forma $1+3/h$. A questo proposito cade in acconcio la seguente osservazione.

Nella Nota *Sur le problème restreint des trois corps* (« Comptes Rendus », 23 luglio 1900 [in queste « Opere »: vol. primo, XXX, p. 469]) le soluzioni periodiche, di cui si può rigorosamente provare la instabilità, sono designate come *vicine alle orbite circolari aventi per moto medio un numero della forma* $1+3/h$. Se si bada alla circostanza che queste soluzioni vicine dipendono, oltre che da μ, dall'altro parametro p_1^0, apparisce chiaramente che le soluzioni periodiche *vicine ad un dato cerchio* (riducentisi cioè ad esso per variazione continua dei parametri) possono dirsi con egual ragione *vicine ad ogni altro cerchio di una zona abbastanza piccola attorno al primo.*

I due modi di dire sono dunque equivalenti. Quello qui adottato mi pare preferibile, perchè i valori $1+3/h$ non vengono (sia pure nell'enunciato soltanto) ad assumere posizione particolare rispetto ai valori contigui. Che un carattere aritmetico non abbia relazioni essenziali con proprietà d'indole qualitativa è cosa del resto ben naturale. E se il successo della presente ricerca sembra dovuto a certa ipotesi di commensurabilità, ciò dipende puramente dall'artifizio dimostrativo, cui sono ricorso, in mancanza di metodi più diretti ed efficaci.

Esempi. – Dalle tabelle del sig. J. MASCART [30] si rileva che i tre asteroidi **167** Urda, **243** Ida, **396** posseggono un moto medio vicino a due volte e mezzo quello di Giove, mentre tanto le eccentricità, quanto le inclinazioni sono assai piccole.

Per ognuno di questi pianeti, si potranno scegliere μ e ν in modo che la corrispondente soluzione periodica $\Sigma^2_{\mu\nu}$ abbia carattere di *orbita intermediaria.*

La accertata instabilità delle $\Sigma^2_{\mu\nu}$ fa presumere quella del movimento reale dei pianeti.

Anche il pianeta **188** Menippo ha un moto medio assai vino a 5/2, ma la sua eccentricità e la sua inclinazione sono forse un po' troppo forti, perchè le precedenti considerazioni si possano ritenere senz'altro applicabili.

4. - Sviluppo del calcolo, su cui riposa la precedente dimostrazione.

Avviamoci a calcolare effettivamente il valor medio $[\mathfrak{H}_3'^{(1)}]$.

In primo luogo è da osservare che i termini di $\mathfrak{H}_3'^{(1)}$ sono di duplice provenienza: da $H^{(0)}$ e da $H^{(1)}$.

Chiamiamo M la somma dei primi, N quella dei secondi e poniamo in conformità

$$\mathfrak{H}_3'^{1)} = M + N \,.$$

Calcolo di $[M]$. – Pongasi nelle (10) $\nu = 0$.

Le $c_{11}, c_{12}, \ldots$, quando si fa $\nu = 0$, contengono μ a fattore. Diciamo $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \ldots$ i coefficienti della prima potenza di μ; del pari designiamo con $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ i termini indipendenti da μ e ν, in φ, ψ.

Avremo, mettendo in evidenza soltanto i termini indipendenti da μ e quelli di primo grado in μ,

$$p_2 = x \cos \frac{hq_1}{3} - y \operatorname{sen} \frac{hq_1}{3} + \mu\{\bar{c}_{11}x + \bar{c}_{12}y\} + \mu\bar{\varphi} + \ldots ,$$

$$q_2 = x \operatorname{sen} \frac{hq_1}{3} + y \cos \frac{hq_1}{3} + \mu\{\bar{c}_{21}x + \bar{c}_{22}y\} + \mu\bar{\psi} + \ldots ,$$

[30] *Les orbites des petites planètes rapportées à l'orbite de Jupiter*, « Bulletin Astronomique », tom. XVI, 1899.

e di qua, quadrando e sommando,

$$\eta^2 = x^2 + y^2 + 2\mu\chi + \tag{11}$$
$$+ 2\mu\left\{\cos\frac{hq_1}{3}(x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \text{sen}\frac{hq_1}{3}(x\bar{\psi} - y\bar{\varphi})\right\} + \ldots,$$

dove χ è una forma di secondo grado in x, y.

Dacchè

$$(p_1)_{\mu=\nu=0} = H'^{(0)} = \sqrt{R} - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\eta^2 + \eta^4\mathfrak{Q}(\eta^2, 0) \tag{12}$$

è l'espressione di $H^{(0)}$ per $\nu = 0$, quando si eseguisce la sostituzione (10) e si immagina di sviluppare per potenze di μ, il coefficiente della prima potenza di μ vale, in virtù della (11),

$$\left(\frac{dH'^{(0)}}{d\eta^2}\right)_{\eta^2=x^2+y^2}\cdot 2\left\{\chi + \cos\frac{hq_1}{3}(x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \text{sen}\frac{hq_1}{3}(x\bar{\psi} - y\bar{\varphi})\right\}.$$

Il primo fattore contiene soltanto potenze pari di x, y. I termini di terzo grado del prodotto provengono tutti dal moltiplicare la parte quadratica del primo fattore per la parte lineare del secondo. Risulta così

$$M = 4\mathfrak{Q}(0, 0)(x^2 + y^2)\left\{\cos\frac{hq_1}{3}(x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \text{sen}\frac{hq_1}{3}(x\bar{\psi} - y\bar{\varphi})\right\}.$$

Se si tien presente che $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ sono funzioni periodiche di q_1, *di periodo* 2π, si vede subito che lo sviluppo di M in serie trigonometrica dell'argomento $q_1/3$ non contiene termine indipendente da $q_1/3$ [31] e quindi

$$[M] = \frac{1}{6k\pi}\int_0^{6k\pi} M\, dq_1 = 0\,.$$

Calcolo di $[N]$. – Per definizione, N è l'insieme dei termini di terzo grado, che provengono da $H^{(1)}$, quando vi si faccia $\nu = 0$, e si eseguisca la sostituzione (9).

---

(31) Infatti, essendo un termine generico dello sviluppo di $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ della forma $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sen}}{\cos}\, mq_1$ (con m intero), i prodotti $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sen}}{\cos}\frac{hq_1}{3}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sen}}{\cos}\, mq_1$ dan luogo a somme di seni e coseni degli argomenti $(m \pm \pm h/3)q_1$; e $h/3$ non è mai eguale ad un numero intero.

$H^{(1)}$ dipende dalla funzione perturbatrice U, di cui noi non possediamo ancora la espressione in coordinate p_1, p_2, q_1, q_2, ma soltanto (e questo diciamo pensando alla (2) e agli sviluppi classici, che richiameremo ben presto) per mezzo degli elementi ellittici, a, e, ω, ζ.

Quali sono, in base alle (4), (5), (9), (12), i valori di a, e, ω, ζ da introdursi in U, per averne la espressione in termini di x, y, q_1?

In primo luogo le (9) danno

$$p_2^2 + q_2^2 = \eta^2 = x^2 + y^2 ,$$

quindi, per essere $\sqrt{a} = p_1$, basterà porre, in p_1, $\mu = \nu = 0$, con che risulta, in virtù della (12),

$$\sqrt{a} = \sqrt{R} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\eta^2 + \eta^4\mathfrak{Q}(\eta^2, 0)\,. \tag{12'}$$

La (5′), che può essere scritta

$$e^2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{a}}\left\{1 - \frac{\eta^2}{4\sqrt{a}}\right\},$$

ove si sostituisca per $\sqrt{a}$ questo valore, porge

$$e = R^{-1/4}\eta\{1 + \eta^2\mathfrak{P}(\eta^2)\}\,, \tag{13}$$

$\mathfrak{P}$ designando al solito una serie di potenze.

Per il nostro scopo non occorrono separatamente le espressioni di ω e ζ, ma bastano quelle della somma $\omega + \zeta$, che non è altro che q_1, e delle combinazioni

$$e^m \cos m\zeta\,, \qquad e^m \operatorname{sen} m\zeta\,,$$

dove m designa un intero positivo.

Partiamoci dalla identità

$$e^m(\cos m\zeta + i \operatorname{sen} m\zeta) = (eE^{i\zeta})^m$$

(per evitare ambiguità, si designa con E la base dei logaritmi naturali), e scriviamo nel secondo membro $q_1 - \omega$ al posto di ζ, sostituendo per e il valore (13). Verrà

$$e^m(\cos m\zeta + i \operatorname{sen} m\zeta) = R^{-(m/4)}\{1 + \eta^2\mathfrak{P}(\eta^2)\}^m E^{imq_1}(\eta E^{-i\omega})^m\,.$$

In virtù delle (4) e (9),

$$\eta E^{-i\omega} = p_2 + iq_2 = (x + iy)E^{ihq_1/3};$$

per conseguenza

$$(14) \qquad e^m \cos m\zeta + ie^m \operatorname{sen} m\zeta = R^{-(m/4)}\{1 + \eta^2\mathfrak{P}(\eta^2)\}^m \cdot$$
$$\cdot \left\{ \cos m\left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 + i \operatorname{sen} m \left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 \right\} (x + iy)^m ,$$

da cui si traggono le relazioni cercate, scindendo il reale dall'immaginario.

Ciò posto, prendiamo a considerare la funzione perturbatrice, incominciando dal termine principale

$$\frac{1}{\Delta} = \{1 + r^2 - 2r \cos v\}^{-1/2}.$$

Supponendo r diverso da 1, si ha lo sviluppo [32]

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j A_j^{(0)}(r) \cos jv ,$$

in cui

$$A_j^{(0)}(r) = A_{-j}^{(0)}(r) .$$

Ponendo

$$r = a(1 + X) ,$$
$$v = q_1 + Y ,$$
$$(15) \qquad A_j^{(p)}(a) = \frac{a^p}{p!} \frac{d^p A_j^{(0)}(a)}{da^p} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, \ \pm 1, \dots \\ p = 0, 1, \dots \end{pmatrix},$$

troviamo subito

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j A_j^{(p)}(a) X^p \cos j(q_1 + Y) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j A_j^{(p)}(a)\{\cos j\, q_1 X^p \cos jY - \operatorname{sen} jq_1 X^p \operatorname{sen} j\, Y\} ,$$

$$-\frac{1}{r} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 + X},$$

$$-r \cos v = -a(1 + X)(\cos q_1 \cos Y - \operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen} Y) .$$

---

[32] Circa le proprietà di queste funzioni $A_j^{(0)}$, cfr. F. TISSERAND, *Mécanique céleste*, tom. I, cap. XVII.

Si sa bene che, nelle espressioni di $X^p \cos jY$, $X^p \operatorname{sen} jY$, $1/(1+X)$, per e e ζ, un termine generico è del tipo

$$c e^{m'} \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix} m\zeta ,$$

dove c è un coefficiente numerico, $m' = |m| +$ un numero pari positivo [33].

Dacchè

$$H^{(1)} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - r \cos v}{a^{-3/2} - 1} ,$$

e, in virtù della (12′) e della (7),

$$\frac{1}{a^{-3/2}-1} = \frac{1}{R^{-3/2}-1} + \eta^2 \mathfrak{Q}_1(\eta^2) = \frac{h}{3} + \eta^2 \mathfrak{Q}_1(\eta^2)$$

(con $\mathfrak{Q}_1$ serie di potenze), le sostituzioni (12′), (13), (14) in $H^{(1)}$ potranno dar luogo a termini di terzo grado in x, y, solo quando si eseguiscano sopra termini di primo o terzo grado, rispetto ad e, i quali vanno cercati nelle combinazioni

$$\begin{array}{ll} e \cos \zeta , & e \operatorname{sen} \zeta ; \\ e^3 \cos \zeta , & e^3 \operatorname{sen} \zeta ; \\ e^3 \cos 3\zeta , & e^3 \operatorname{sen} 3\zeta . \end{array}$$

Dai primi due gruppi, come appare dalle (13) e (14), possono bensì provenire termini di terzo grado in x, y; ma questi necessariamente contengono $\eta^2 = x^2 + y^2$ a fattore, e il loro valor medio risulta identicamente nullo. (Per la stessa ragione, per cui s'è trovato $[M] = 0$.)

Rimangono i termini in $e^3 \cos 3\zeta$, $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$. Vediamo come entrano in U, esaminando dapprima l'addendo $1/r$. Lo sviluppo di questa funzione, e così di $(1/r)/(a^{-2/3} - 1)$, contiene soltanto termini della forma: funzione di $a \times e^{m'} \times \cos m\zeta$.

Per $m = 3$, il cambiamento di variabili (12′), (13), (14) dà evidentemente luogo ad espressioni di valor medio nullo.

Lo stesso non avviene per gli altri due addendi di U; ci è d'uopo analizzarne la struttura alquanto più addentro.

---

[33] Ibidem, tom. I, n. 93.

Dagli *Annales de l'Observatoire de Paris*, Tom. I, 1855, pagg. 346-347, desumiamo che

$$\cos jY = \frac{5}{4} j^2 e^3 \cos 3\zeta + \ldots ,$$

$$\operatorname{sen} jY = \frac{26j + 8j^3}{24} e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \ldots ,$$

$$X \cos jY = -\frac{3 + 4j^2}{8} e^3 \cos 3\zeta + \ldots ,$$

$$X \operatorname{sen} jY = -\frac{9}{8} je^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \ldots ,$$

$$X^2 \cos jY = \frac{1}{2} e^3 \cos 3\zeta + \ldots , \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$X^2 \operatorname{sen} jY = \frac{1}{2} je^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \ldots ,$$

$$X^3 \cos jY = -\frac{1}{4} e^3 \cos 3\zeta + \ldots ,$$

$$X^p \cos jY = \ldots\ldots\ldots \quad (p > 3),$$

$$X^p \operatorname{sen} j = \ldots\ldots\ldots \quad (p > 2),$$

essendosi messi in evidenza soltanto i termini della forma $e^3 \cos 3\zeta$, $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$.

Usufruendo di queste formule, quelle, che esprimono $1/\Delta$, $-r \cos v$, danno

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} e^3 \cos 3\zeta \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j \cos jq_1 \Big\{ & \frac{5}{4} j^2 A_j^{(0)}(a) - \\ & - \frac{3 + 4j^2}{8} A_j^{(0)}(a) + \frac{1}{2} A_j^{(2)}(a) - \frac{1}{4} A_j^{(3)}(a) \Big\} \\ - \frac{1}{2} e^3 \operatorname{sen} 3\zeta \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j \operatorname{sen} jq_1 \Big\{ & \frac{26j + 8j^3}{24} A_j^{(0)}(a) - \\ & - \frac{9}{8} jA_j^{(1)}(a) + \frac{1}{2} jA_j^{(2)}(a) \Big\} + \ldots , \end{aligned}$$

$$-r \cos v = -\frac{3}{8} ae^3 \cos 3\zeta \cos q_1 + \frac{7}{24} ae^3 \operatorname{sen} 3\zeta \operatorname{sen} q_1 + \ldots ,$$

i termini omessi non potendo recare contributo alcuno al nostro [N].

Dalle (12′) e (14) segue che dobbiam porre

$$a = R\,, \tag{12''}$$

$$\left\{\begin{aligned} e^3 \cos 3\zeta &= R^{-3/4}\{(x^3 - 3xy^2)\cos(3+h)q_1 - \\ &\qquad - (3yx^2 - y^3)\,\mathrm{sen}\,(3+h)q_1\}\,, \\ e^3\,\mathrm{sen}\,3\zeta &= R^{-3/4}\{(x^3 - 3xy^2)\,\mathrm{sen}\,(3+h)q_1 + \\ &\qquad + (3yx^2 - y^3)\cos(3+h)q_1\}\,. \end{aligned}\right. \tag{14'}$$

$[N]$ si presenta pertanto come il valore medio di $(1/\Delta - r\cos v)/(a^{-3/2} - 1)$, dove beninteso $1/\Delta$, $-r\cos v$ si riducono alla parte testè scritta, mentre a, $e^3\cos 3\zeta$, $e^3\,\mathrm{sen}\,3\zeta$ hanno i valori (12″), (14′).

Dopo ciò troviamo immediatamente

$$[N] = \frac{R^{-3/4}}{2(n-1)}\left[\left\{\frac{5}{4}s^2 - \frac{26s + 8s^3}{24}\right\}A_s^{(0)}(R) + \right.$$

$$\left. + \left\{-\frac{3+4s^2}{8} + \frac{9}{8}s\right\}A_s^{(1)}(R) + \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right\}A_s^{(2)}(R) - \frac{1}{4}A_s^{(3)}(R) + B_s\right](x^3 - 3xy^2),$$

dove s sta per $3 + h$ e B_s è nullo, se s non è eguale a ± 1, mentre

$$B_1 = \left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{24}\right)R = -\frac{1}{12}R\,,$$

$$B_{-1} = \left(-\frac{3}{8} - \frac{7}{24}\right)R = -\frac{2}{3}R\,.$$

Espressione di $[\mathfrak{H}_3'^{(1)}]$. – Ponendo per brevità

$$c_4 = \frac{5}{4}s^2 - \frac{26s + 8s^3}{24}\,,\qquad c_1 = -\frac{3+4s^2}{8} + \frac{9}{8}s\,,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\,,\qquad c^3 = -\frac{1}{4}\,;$$

$$\Theta(R) = \frac{R^{-3/4}}{2(n-1)}\{c_0 A_s^{(0)}(R) + c_1 A_s^{(1)}(R) + c_2 A_s^{(2)}(R) + c_3 A_s^{(3)}(R) + B_s\}\,,$$

si ha in definitiva

$$[\mathfrak{H}_3'^{(1)}] = \Theta(R)\cdot(x^3 - 3xy^2).$$

Studio della funzione Θ. – Si tratta di dimostrare che la funzione Θ

di R non si annulla, quando R ha un valore del tipo

$$\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-2/3}=\left(\frac{s}{s-3}\right)^{-2/3},$$

dove s è, come h, un numero intero primo con 3, positivo o negativo. (Sono soltanto da escludersi i valori $s=1$, $s=2$, corrispondenti a $h=-1$, $h=-2$, per cui risulterebbe $n=s/(s-3)<0$).

Cominciamo coll'osservare che, per definizione, $A_s^{(0)}(R)$ $(s>0)$ è il coefficente di $\cos sv$ nello sviluppo in serie trigonometrica di $1/\sqrt{1+R^2-2R\cos v}$.

La identità

$$\frac{1}{\sqrt{1+R^2-2\cos v}}=\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R}\right)^2-2\frac{1}{R}\cos v}},$$

eguagliando i coefficienti di $\cos sv$ nei due membri, porge

$$A_s^{(0)}(R)=\frac{1}{R}A_s^{(0)}\left(\frac{1}{R}\right),$$

o, ponendo per brevità

$$\frac{1}{R}=\varrho,$$

$$A_s^{(0)}(R)=\varrho A_s^{(0)}(\varrho),$$

con che i valori delle $A_s^{(p)}(R)$, per $R>1$, sono espressi mediante quelli delle stesse funzioni, per valori dell'argomento minori dell'unità.

Si ha dalle (15) la formula ricorrente

$$A_s^{(p)}(R)=\frac{R^p}{p!}\frac{d^pA_s^{(0)}}{dR^p}=\frac{R}{p}\frac{d}{dR}\left\{\frac{R^{p-1}}{(p-1)}\frac{d^{p-1}A_s^{(0)}}{dR^{p-1}}\right\}-\frac{p-1}{p}\frac{R^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}A_s^{(0)}}{dR^{p-1}}$$

$$=-\frac{1}{p}\left\{\varrho\frac{d}{d\varrho}(A_s^{(p-1)}(R))+(p-1)A_s^{(p-1)}(R)\right\},$$

che permette di esprimere ogni $A_s^{(p)}(R)$ per funzioni dell'argomento ϱ, quando ciò si sappia fare per $A_s^{(p-1)}(R)$.

Ponendo in questa formula $p = 1$, abbiamo

$$A_s^{(1)}(R) = -\varrho \frac{d}{d\varrho}\{\varrho A_s^{(0)}(\varrho)\} = -\varrho\{A_s^{(1)}(\varrho) + A_s^{(0)}(\varrho)\} ;$$

in generale si trova

$$(16) \qquad A_s^{(p)}(R) = (-1)^p \varrho \left\{ A_s^{(p)}(\varrho) + pA_s^{(p-1)}(\varrho) + \right. \\ \left. + \frac{p(p-1)}{2} A_s^{(p-2)}(\varrho) + \ldots + A^{(0)}(\varrho) \right\},$$

come si può ovviamente verificare.

Per $R < 1$, la funzione $A_s^{(0)}(R)$ ammette lo sviluppo convergente ([34])

$$(17) \qquad \frac{1}{2} A_s^{(0)}(R) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2s-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2s} R_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{2s+1}{2s+2} R^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{(2s+1)(2s+3)}{(2s+2)(2s+4)} R^4 + \ldots \right\} \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

I coefficienti essendo tutti positivi, $A_s^{(0)}(R)$ ha pure valore positivo, finchè R non supera l'unità; in causa delle (15), lo stesso ha luogo per ogni $A_s^{(p)}(R)$.

Ciò premesso, consideriamo i valori di s, per cui risulta

$$R = \left(\frac{s}{s-3}\right)^{-2/3} < 1 .$$

Dovrà essere s positivo, e quindi (rimanendo esclusi i multipli di 3 e i valori 1 e 2) almeno eguale a 4.

I coefficienti c_0, c_1, c_2, c_3 della precedente espressione di Θ sono tutti negativi, per $s \geqslant 4$, quindi, essendo le $A_s^{(p)}(R)$ positive, $n > 1$ e $B_s = 0$, anche $\Theta(R) < 0$.

Supponiamo adesso $R > 1$ e quindi s negativo.

Sostituendo in $\Theta(R)$, per le $A_s^{(p)}(R)$ $(p = 0, 1, 2, 3)$, i valori (16),

---

([34]) Cfr. F. Tisserand, loc. cit., tom. I, pag. 272.
Si tratta della funzione ivi designata con $b^{(i)}(\alpha)$. Ponendovi $\alpha = R$, $i = s$, si ha la (17).

otteniamo

$$\Theta(R) = \frac{\varrho^{7/4}}{2(n-1)}\left\{ c_0' A_s^{(0)}(\varrho) + c_1' A_s^{(1)}(\varrho) + c_2' A_s^{(2)}(\varrho) + c_3' A_s^{(3)}(\varrho) + \frac{1}{\varrho} B_s \right\},$$

dove si è posto

$$c_0' = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = \frac{9}{8} - \frac{65}{24}s + \frac{7}{4}s^2 - \frac{1}{3}s^3,$$

$$c_1' = -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = \frac{17}{8} - \frac{17}{8}s + \frac{1}{2}s^2,$$

$$c_2' = c_2 - 3c_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s,$$

$$c_3' = -c_3 = \frac{1}{4}.$$

Questi coefficienti sono tutti positivi, per $s < 0$; positive sono pure, a tenore delle (15) e (17), le $A_s^{(p)}(\varrho) = A_{-s}^{(p)}(\varrho)$; B_s è nullo, se $s < -1$. Anche ora dunque risulta $\Theta(R)$ negativo, essendo $n < 1$.

Rimane il valore $s = -1$. Si ha

$$\varrho = \left(\frac{-1}{-4}\right)^{2/3} = 4^{-2/3},$$

donde

$$\frac{1}{\varrho^3} = 16;$$

$$c_0' = \frac{71}{21}, \qquad c_1' = \frac{19}{4}, \qquad c_2' = \frac{7}{4}, \qquad c_3' = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{\varrho} B_{-1} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\varrho^3}\varrho = -\frac{32}{3}\varrho.$$

Con ciò la espressione di $\Theta(R)$ diviene

$$\Theta(R) = \frac{\varrho^{7/4}}{2(n-1)}\left\{ \frac{71}{12} A_1^{(0)}(\varrho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\varrho) + \frac{7}{4} A_1^{(2)}(\varrho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\varrho) - \frac{32}{3}\varrho \right\}.$$

Si rileva dalla (17) che il coefficiente di ϱ in $A_1^{(0)}(\varrho)$ è 1; in causa della relazione

$$A_s^{(1)}(\varrho) = \varrho \frac{dA_s^{(0)}(\varrho)}{d\varrho},$$

è pure eguale all'unità il coefficiente di ϱ in $A_s^{(1)}(\varrho)$.

Ne deduciamo

$$\frac{71}{12} A_1^{(0)}(\varrho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\varrho) > \left(\frac{71}{12} + \frac{19}{4}\right) \varrho = \frac{32}{3}\varrho,$$

talchè la quantità in parentesi nell'espressione di $\Theta(R)$ è maggiore di

$$\frac{7}{4} A_1^{(2)}(\varrho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\varrho),$$

e quindi positiva; $\Theta(R)$ risulta, come sopra, < 0.

Riassumendo, possiamo concludere: La funzione $\Theta(R)$ è costantemente negativa per valori dell'argomento della forma considerata.

Padova, Ottobre 1900.

SOMMARIO

Capitolo III. – **La questione della stabilità delle soluzioni periodiche.**

Capitolo IV. – **Applicazione al problema dei tre corpi.**