Sulle Funzioni Duhameliane

Parte I.

Le Funzioni Esattamente Misurabili o Sommabili.

Nota di

W. Wilkosz. Cracovia.

§ I.

Diremo come al solito un insieme E dei sistemi

$$x_1\, x_2 \ldots x_n$$

ove $x_1 \ldots x_n$ sono numeri reali, insieme a n-dimensioni ed i suoi elementi (sistemi particolari appartenenti alla E) chiameremo punti.

Nel caso $n = 2$ od $n = 3$ imaginiamo i punti di E nel sistema delle coordinate Cartesiane ortogonali.

Sia E un insieme a due dimensioni o piano.

Indicheremo con $E'(x_0)$ la sezione di E colla retta $x = x_0$ (x_0 costante) cioè insieme di tutti i numeri y tali che

$$(x_0, y)$$

fa parte di E.

Analogamente $E''(y_0)$ indica la sezione del codesto insieme colla retta $y = y_0$. È chiaro che E' od E'' possono essere anche vuoti, in tal caso sono sempre misurabili (L) e di misura nulla.

Se $\varphi(xy)$ è definita in E piano, indicheremo con $f_{y_0}(x)$ e $g_{x_0}(y)$ le funzioni definite rispettivamente in $E''(y_0)$ e $E'(x_0)$ mediante relazioni

$$f_{y_0}(x) \equiv \varphi(x, y_0)$$
$$g_{x_0}(y) \equiv \varphi(x_0\, y)$$

$f_{y_0}(x)$ o $g_{x_0}(y)$ può essere anche vuota se è tale E'' o E' — in tal caso e sempre misurabile e sommabile (L).

Def. I Insieme piano e limitato E sarà detto esattamente misurabile, se (1) E è misurabile (L) superficialmente (2) ogni $E'(x_0)$ (3) ed ogni $E''(y_0)$ sono linearmente misurabili.

Def. II, III. Funzione $\varphi(xy)$ definita in un E piano e limitato sarà detta esattamente misurabile (sommabile) in E se

(1) $\varphi(xy)$ è misurabile (sommabile) superficialmente in E

(2) ogni $f_{y_0}(x)$ in $E''(y_0)$

(3) ed ogni $g_{x_0}(y)$ in $E'(x_0)$

sono linearmente misurabili (sommabili).

Teor. 1. Se $\varphi(xy)$ è misurabile esattamente in E allora di E si può dire lo stesso.

Dim: (1) $\varphi(xy)$ essendo misurabile in E implica la misurabilità ordinaria di E

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & f_{y_0}(x) \\ (3) & g_{x_0}(y)\end{array}\right\} \text{essendo misurabili in} \left\{\begin{array}{l}E''(y_0) \\ E'(x_0)\end{array}\right.$$

implicano la misurabilità lineare dei rispettivi aggregati.

Teor. 2. Una $\varphi(xy)$ esattamente misurabile e limitata in E è anche esattamente sommabile in E.

Teor. 3. Una $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in E è anche esattamente misurabile in E.

Teor. 4. Se $\varphi'(xy)$ e $\varphi''(xy)$ sono esattamente misurabili (sommabili) in E, lo stesso si può dire del loro aggregato lineare cioè

$$\varphi(xy) = c_1\varphi'(xy) + c_2\varphi''(xy)$$

[c_1 e c_2 costanti].

Teor. 5. Se (1) $\varphi(xy)$ è esattamente misurabile (sommabile) in E

(2) A è piano e contenuto in E ed anche esattamente misurabile,

allora $\varphi(xy)$ considerata soltanto in A è esattamente misurabile (sommabile) in A.

Teor. 6 Se $\varphi^{(1)}$ e $\varphi^{(2)}$ sono esattamente misurabili in E anche $\varphi \equiv \varphi^{(1)}.\ \varphi^{(2)}$ è tale.

[Ma non si potrebbe dire lo stesso della loro sommabilità!].

Teor. 7. Se 1. $\varphi^{(1)}$ e $\varphi^{(2)}$ sono esattamente misurabili in E

2. limitati in E,

allora:

$$\varphi \equiv \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)} \text{ è esattamente sommabile in } E.$$

Le dimostrazioni dei sopradetti teoremi si fanno facilmente colle note proprietà delle funzioni misurabili o sommabili in modo indicato nella demostrazione del teor 1

Com'è noto se la funzione del punto analitico $\varphi(P)$ è definita in un insieme a qualunque dimensioni (E)

e (1) $\varphi^2(P)$ sommabile in E
(2) $\varphi(P)$ misurabile.

Allora $\varphi(P)$ è sommabile anche in E. In tal caso diremo che $\varphi(P)$ è sommabile con quadrato in E.

[Dim. v. De la Vallée Poussin Cours d'Analyse III[ed] v. I].

Teor. 8. Se 1. $\varphi^2(xy)$ sommabile esattamente in E.
2. $\varphi(xy)$ misurabile esattamente in E.

allora $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in E.

Dim: (1) $\varphi(xy)$ è sommabile in E dal Teor. precedente
(2) $f_{y_0}^2$ sommabile in $E''(y_0)$ e f_{y_0} misurabile allora f_{y_0} sommabile in $E''(y_0)$
(3) lo stesso per $g_{x_0}(y)$.

Diremo in tal caso la funzione $\varphi(xy)$ sommabile esattamente con quadrato.

È noto che la sommabilità di $\varphi^{(1)}(P)$ e $\varphi^{(2)}(P)$ in E implica la sommabilità del prodotto

$$\varphi \equiv \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)},$$

ne segue il teorema:

Teor. 9. Se 1. $\varphi^{(1)}(xy)$ ed $\varphi^{(2)}(xy)$ sono esattamente sommabili con quadrato in E
anche

$$\varphi(xy) \equiv \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)}$$

è sommabile in E esattamente.

Def. Indicheremo con $R(ab)$ il quadrato formato con tutti i sistemi (xy)
per le quali

$$\left.\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b \end{array}\right\}$$

Con $T(ab)$ indichiamo il triangolo di tutte le coppie $(x\,y)$ per le quali

$$a \leqq y \leqq x \leqq b$$

$R(ab)$ e $T(ab)$ sono evidentemente misurabili in modo esatto.

Se 1. $\varphi(xy)$ e definita in E piano
2. E contenuto in $R(ab)$

allora la funzione

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= \varphi(xy) \text{ in } E \\ &= 0 \text{ in } R - E \end{aligned}$$

chiameremo la estensione di $\varphi(x\,y)$ al quadrato $R(ab)$.

Teor. 10. Se (1) $\varphi(x\,y)$ esattamente misurabile (sommabile) in E
(2) E contenuto in $R(ab)$
allora $\Phi(x\,y)$ esattamente misurabile in $R(ab)$.

Dim: 1° La estensione $\Phi(x\,y)$ è misurabile nel senso ordinario (v. Caratheodory Vorl. üb. reelle Funkt.).

2° F_{y0} e la estensione lineare di f_{y0} al $[ab]$ quindi misurabile (sommabile) con essa.

3° lo stesso per ogni g_{x_0}.

Senza restringere la generalità dei risultati possiamo prendere sempre le funzioni definite in $R(ab)$ nelle quistioni ove si tratta di sommabilità o misurabilità di quelle.

Cercando la modificazione del teorema ora classico del Fubini, riccòrdiamo dapprima il suo enunciato ordinario per due e tre variabili [v. Caratheodory op. cit. p. 621].

I. Se $\varphi(x\,y)$ sommabile in $R(ab)$
allora

1° Insieme dei y_0 in $[a\,b]$ ove f_{y0} sommabile è $[ab] - V_1$ ove V_1 è di misura nulla.

2° Insieme dei x_o in $[a\,b]$ ove g_{x_0} sommabile è uguale al

$$[a\,b] - V_2$$

ove V_2 di misura nulla.

3° $F(y_0) = \int\limits_a^b f_{y0}\,dx$ definita e sommabile in $[ab] - V_1$

4⁰ $g(x_0) = \int_a^b g_{x_0}\, dy$ definita è sommabile in $[ab] - V_2$

5⁰ $\int\limits_{[ab]-V_1} F(y)\, dy = \int\limits_{[ab]-V_2} G(x)\, dx = \int\int\limits_R \varphi(xy)\, dx\, dy.$

Un cubo $S(ab)$ sia dato da tutti i sistemi (x, y, z) soddisfaceuti:

$$a \leqq x \leqq b$$
$$a \leqq y \leqq b$$
$$a \leqq z \leqq b$$

In modo analogo consideriamo le sezioni di $S(xy)$.

Sezione di $S(ab)$ col piano $x = x_0$ è $R(ab)$, colla retta $x = x_0$, $y = y_0$ è $[ab]$.

II. Se $\varphi(x\, y\, z)$ sommabile in $S(ab)$

allora

1. Insieme dei y_0 fra a e b ove $f_{y_0} = \varphi(x\, y_0\, z)$ sarebbe sommabile è:

$$[a\, b] - V_2$$

ove V_2 di misura nulla

2. $F(y) = \int\int\limits_R f_y(x\, z)\, dx\, dz$ definita e sommabile in $[ab] - V_2$

3. $\int\limits_{[ab]-V_2} F(y)\, dy = \int\int\limits_S \int \varphi x(yz)\, dx\, dy\, dz$

4. Insieme dei punti ove $f_{x_0 z_0} = \varphi(x_0\, y\, z_0)$ sarebbe sommabile in $[ab]$ è $R[ab] - V_{13}$ ove V_{13} di misura (piana) nulla.

5. $\Pi(xz) = \int_a^b f_y\, dy$ definita e sommabile in $R - V_{13}$

6. $\int\int\limits_{R-V_{13}} \Pi\, dx\, dz = \int\int\limits_S \int \varphi\, dx\, dy\, dz.$

Teor. 11. [„Fubini" esatto per due variabili].

Se $\varphi(xy)$ è sommabile esattamente in $R(ab)$

allora:

1. $F(y) = \int_a^b f_y\, dx$ definita e sommabile in $[ab]$

2. $G(x) = \int_a^b g_x\, dy$ definita e sommabile in $[ab]$

3. $\int_a^b F(y)\, dy = \int_a^b G(x)\, dx = \int\int_R \varphi(xy)\, dx\, dy$

Dim: (1) f_y e g_x sommabili sempre perchè $\varphi(xy)$ esattamente sommabile

(2) quindi V_1 e V_2 nulli

(3) il resto segue dal teorema I di Fubini. Analogo valga anche per le tre variabili.

Teor. 12. [formola dello Dirichlet esatta].

Se $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in $T(ab)$ allora:

$$\int\int_T \varphi\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_a^x g_x dy = \int_a^b dy \int_y^b f_y\, dx.$$

Dim: Siá $\Phi(xy)$ la estenzione al $R(ab)$ di φ — allora Φ sunè esattamente sommabile in $R(ab)$ [teor. 10].

Avremmo: [teor. 11]

$$\int\int_R \Phi\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b F_y dx\, dy = \int_a^b \int_a^b G_x dy\, dx$$

ma (1) $$\int\int_R \Phi dx\, dy = \int\int_T \varphi dx\, dy$$

(2) $$\left.\begin{aligned} F_y &= f_y \text{ in } [y,b] \\ &= 0 \text{ in } [ay) \end{aligned}\right\} \text{ quindi} \int_a^b F_y\, dx = \int_y^b f_y dx$$

(3) $$\left.\begin{aligned} G_x &= g_x \text{ in } [ax] \\ &= 0 \text{ in } [xb] \end{aligned}\right\} \text{ quindi} \int_a^b G_x dy = \int_a^b g_x\, dy$$

(4) sostituendo, abbiamo la formola.

Teor. 13. Sia

(1) $\varphi(xy)$ sommabile esattamente con quadrato in R

(2) $f(y)$ sommabile in $[ab]$ con quadrato

allora $$F(x) = \int_a^b \varphi(xy) f(y)\, dy$$

definita e sommabile in $[ab]$.

Dim: (1) per ogni x_0 in $[ab]$ $g_{x_0}(y) = \varphi(x_0 y)$ è sommabile con quadrato in $[ab]$ quindi $g_{x_0}(y) \cdot f(y)$ sommabile in $[ab]$.

$$\text{allora } F(x) = \int_a^b \varphi(xy)\, f(y) dy \text{ definita in } [ab]$$

$\varphi(xy)\, f(y) = \psi(xy)$ è superficialmente sommabile in R, quindi secondo Fubini: [teor. 11).

$$F(x) \text{ sommabile in } [ab].$$

Ammettiamo un corrollario facile:
se $\varphi(xy)$ sommabile in $R(ab)$
allora posto

$$\psi(xyz) \equiv \varphi(xy) \text{ in } S(ab)$$

abbiamo ψ sommabile in $S(ab)$.

Teor. 14. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sono esattamente sommabili con quadrato in $R(ab)$, allora la loro composizione di seconda specie (di Fredholm) è sommabile in $R(ab)$ e s a t t a m e n t e.

Dem: (1) sia $\Phi(xsy) \equiv \varphi(xs)$ in $S(ab)$
$\Psi(xsy) \equiv \psi(sy)$ in $S(ab)$

allora Φ e Φ sommabili con quadrato in S [corr. di sopra].
quindi

$$\Phi(xsy) \,.\, \Psi(xsy) \equiv \varphi(xs)\, \psi(sy)$$

sommabile in S.

(2) Per ogni x_0, y_0 in $[ab]$
$\varphi(x_0 s)$ e $\psi(s y_0)$

sommabili con quadrato
quindi

$\varphi(x_0 s) \,.\, \psi(s y_0)$ sommabile e definita in $[ab]$ come funzione di s

$$F(x_0 y_0) = \int_a^b \varphi(x_0 s)\, \psi(s y_0)\, ds$$

definita in $R(ab)$.

(3) secondo Fubini F è sommabile in R.

$$(4) \quad F(xy_0) = \int_a^b \varphi(xs)\,\psi(sy_0)\,ds \quad [y_0 \text{ in } [ab]]$$

Ma $\psi(sy_0)$ sommabile con quadrato in $[ab]$.
$\varphi(xs)$ esattamente sommabile con quadrato in R
quindi

$F(xy_0)$ sommabile in $[ab]$ $\{$Fubini$\}$
(5) analogo por $F(x_0y)$.

Dunque $F(xy)$ sommabile esattamente.

Teor. 15. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sommabili esattamente con quadrato in $T[ab]$ allora la loro composizione di prima specie [di Volterra] cioè:

$$F(xy) = \int_y^x \varphi(xs)\,\psi(sy)\,ds$$

è sommabile in T.

Dim: per estensione al $R(ab)$

Teor. 16. Se $\varphi(xy)$ e $\varphi(xy)$ esattamente sommabili con quadrato in R
allora la composizione

$$F(xy) = \int_a^b \varphi(xs)\,\psi(sy)\,ds$$

è sommabile esattamente con quadrato in R.

Dim: (1) $$F^2 = \left[\int_a^b \varphi\psi\,ds\right]^2 \leqq \int_a^b \varphi^2 ds \int_a^b \psi^2 ds = K(xy)$$

[disugualianza dello Schwarz].

Ma: $$\left.\begin{array}{l} \Phi(x) = \int_a^b \varphi^2 ds \\ \Psi(y) = \int_a^b \psi^2 ds \end{array}\right\} \text{sommabili in } [ab] \text{ secondo Fubini}$$

quindi $\Phi(x)\,.\,\Psi(y) = K(xy)$
sommabile in R esattamente.

$K(xy)$ essendo una „majorante de la sommabilitè“ di De la Vallée Poussin implica la sommabilità esatta di $F^2(xy)$.

Ma $F(xy)$ sommabile socondo il teor. 14 quindi anche con quadrato.

Teor. 17. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sommabili esattamente in $T(ab)$ con quadrato — allora la composizione

$$\Phi(xy) = \int_y^x \varphi(xs)\,\psi(sy)\,ds$$

è sommabile essattamente con quadrato in T.

Dim: Usando la formola dello Dirichlet ed il teor 16.

§ II.

G. Vitali ha introdotto nella sua memoria nelle Rend. di Palermo di 1907 il concetto della equi assoluta continuità Ripproduco due definizioni del lavoro citato:

Def. I. Una progressione delle funzioni

$$\{f_n\} \qquad n = 1.2\ldots$$

ha gli integrali equi-assolutamente continui in un insieme (D) limitato [scriveremo EAC]

se

(1) per ogni $\varepsilon > o$ esiste $\delta > o$ tale che
per ogni (α) Γ, insieme contenuto in D
di cui (β) $m\,(\Gamma) < \delta$

abbiamo
$$\left|\int_\Gamma f_n d\tau\right| < \varepsilon \qquad n = 1.2\ldots$$

Def. II. Una $\{f_n\}$, ove f_n definite in D, è completamente integrabile per i termini {scriveremo CIT} se:

$$(1) \quad \lim_{n|\infty} f_n = f \quad \text{in } D$$

$$(2) \quad \lim \int_A f_n d\tau = \int_A f d\tau$$

per ogni A misurabile, contenuto in (D).

Vitali ci da il teorema sequente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{f_n\}$ definita in D sia CIT

è:

$$\begin{array}{lll} (1) & f_n \text{ sommabile in } D & n = 1, 2, \ldots \\ (2) & \lim f_n = f & \\ (3) & \{f_n\} \text{ è } EAC \text{ in } D & \end{array}$$

In tal caso f è già sommabile in D!]

Introduco una modificazione adatta al nostro scopo presente:

Def. III. La $\{f_n\}$ delle funzioni definite in E piano e limitato è esattamente EAC in E se

(1) $\{f_n(xy)\}$ è EAC in E
(2) $\{f_n(xy_0)\}$ è EAC in $E''(y_0)$ per ogni y_0
(3) $\{f_n(x_0y)\}$ è EAC in $E'(x_0)$ per ogni (x_0).

Def. IV. La $\{f_n\}$ delle f_n definite in E piano e limitato è CIT esattamente se

1° $$\lim f_n = f \text{ in } E$$

2° $$\lim_{n|\infty} \int \int_A f_n \, dx \, dy = \int_A f dx dy$$

per ogni A misurabile, contenuto in E

3° $$\lim_{n|\infty} \int_F f_n(xy_0) dx = \int_F f(xy_0) dx$$

per ogni F misurabile, contenuto in $E''(y_0)$ e per ogni y_0.

3° $$\lim_{n|\infty} \int_K f_n(x_0y) dy = \int_K f(x_0y)$$

per ogni K misurabile, contenuto in $E'(x_0)$ e per ogni x_0.

Teor. 1. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{f_n\}$ sia CIT esattamente in E è seguente:

(1) $f_n(xy)$ sono sommabili esattamente in E $n = 1 . 2 \ldots$

(2) $$\lim_{n|\infty} f_n(xy) = f \text{ in } E$$

(3) $\{f_n(ry\}$ è EAC esattamente in E.

Dim: Le nostre condizioni ci danno

CIT per (1) $\{f_n(xy)\}$
(2) $\{f_n(x_0y)\}$ per ogni x_0
(3) $\{f_n(xy_0)\}$ per ogni y_0.

Quindi danno anche esatta CIT.
Il reciproco è analogo.

Diamo adesso parecchi criterî della CIT, usati in prattica (soltanto sufficienti).

Teor. 2. Se 1° esiste M tale che

$$|f_n| < M \quad \text{per} \quad n = 1.2\ldots \quad \text{in } E$$

2° $f_n(xy)$ esattamente misurabili in E

3° $\lim f_n = f$ in D

allora

(1) $\{f_n\}$ è CIT esattamente in E

(2) f esattamente sommabile in E

Dim: (α) (1) (2) danno la sommabilità esatta delle f_n in E {§ I teor }.

(β) se Γ piano, misurabile e contenuto in E allora:

$$\left|\int\int_\Gamma f_n dxdy\right| \leqq m(\Gamma)\, M$$

allora se

$$m(\Gamma) < \delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$$

abbiamo:

$$\left|\int\int_\Gamma f_n\right| < \varepsilon \qquad n = 1.2\ldots$$

(γ) se F lineare, misurabile, contenuto in $E''(y_0)$

$$\left|\int_F f_n(xy_0)dx\right| \leqq m(F)\, M$$

(δ) analogo per $\left|\int_K f_n(x_0y)dy\right|$

quindi abbiamo EAC esatta in E cio che da il resto.

Teor. 3. Se esiste $\psi(xy)$

(1) esattamente sommabile in E

(2) tale che $|f_n(xy)| \leqq \psi(xy)$ in E

(3) se ancora $f_n(xy)$ sono esattamente misurabili in E

(4) $\lim\limits_{\to\infty} f_n = f$ in E

allora

$$\{f_n\} \text{ è } CI1 \text{ esattamente}$$
$$f(xy) \text{ esattamente sommabile.}$$

Dim: (α) 1^0 e 4^0 danno in ogni dimensione la sommabilità esatta di $f_n(xy)$ e di $f(xy)$

(β) $$\left|\int_\Gamma\int f_n\, dx\, dy\right| \leqq \int_\Gamma \psi\, dx\, dy$$

(γ) $$\left|\int_F f_n(xy_0)dx\right| \leqq \int_F \psi(xy_0)\,dx$$

(δ) $$\left|\int_K f_n(x_0y)dx\right| \leqq \int_K \psi(x_0y)\,dy$$

e siccome gli integrali di $\psi(xy)$ sono assolutamente continui, quindi per maggiorazione valga lo stesso delle f_n $n = 1 . 2 \ldots$