Sur quelques propriétés des systèmes algébriques d'espaces à k dimensions contenus dans un espace linéaire à r dimensions.

Par

Alfred Rosenblatt.

1. Espaces linéaires de la variété de Grassmann.

1. Envisageons un espace linéaire S_r et rapportons ses points à une pyramide fondamentale $A^0, A^1, \dots A^r$ au moyen de $r+1$ coordonnées $x_0, x_1, \dots x_r$ projectives, ainsi que ses hyperplans au moyen des coordonnées projectives $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_r$. Soient $P^0, P^1, \dots P^k$ $k+1$ points linéairement indépendants de cet espace. Ces points déterminent un espace linéaire S_k. Envisageons la matrice M à $r+1$ colonnes et à $k+1$ lignes formée par les coordonnées de ces points

$$M = \begin{vmatrix} x_0^0, \dots & x_r^0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x_0^k, \dots & x_r^k \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Nous désignerons par $X_{i_0, i_1 \dots i_k}$ ou bien par $(i_0, i_1, \dots i_k)$ le mineur d'ordre $k+1$ de cette matrice formé de colonnes de numéros $i_0 < i_1 < \dots < i_k$. Si l'on regarde ces mineurs comme des coordonnées projectives d'un espace linéaire à $R = \binom{r+1}{k+1} - 1$ dimensions rapporté à une pyramide fondamentale on obtient une variété algébrique dite *variété de Grassmann* V_d à d dimensions telle que les points Q de cette variété sont en correspondance uni-univoque avec les espaces S_k. Les nombres $X_{i_0, i_1 \dots i_k}$ sont les *coordonnées de Grassmann* de l'espace S_k. On a $d = (r-k)(k+1)$.

La variété V_d de Grassmann est l'intersection *complète* des quadriques qui correspondent aux équations dites de D'Ovidio

$$X_{i_0, i_1 \dots i_k} X_{j_0, j_1 \dots j_k} = \sum_{s=0}^{k} X_{j_s, i_1 \dots i_k} X_{j_0, \dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1}, \dots j_k} \tag{2}$$

où $i_0, i_1, \dots i_k$ et $j_0, j_1, \dots j_k$ sont deux combinaisons de $k+1$ nombres parmi les nombres $0, 1, \dots r$; $i_0 < i_1 < \dots < i_k$; $j_0 < j_1 < \dots < j_k$. Ces équations ne sont pas des identités dans le cas et seulement dans le cas où les deux combinaisons diffèrent d'au moins deux nombres. A une combinaison $i_0, i_1, \dots i_k$ fixe correspondent

$$R - d = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$$

quadriques. La variété de Grassmann est une intersection *partielle* [1]) de ces quadriques, irréductible et appartenant à l'espace S_R, l'intersection résiduelle étant située dans l'espace S_{R-1}

$$X_{i_0, i_1 \dots i_k} = 0.$$

2. Aux faisceaux linéaires d'espaces S_k correspondent, sur la variété V_d, des lignes droites. En effet, choisissons les points $P^0, P^1, \dots P^{k-1}$ sur l'axe S_{k-1} du faisceau, et soient P'^k et P''^k deux points qui déterminent deux S_k: S'_k et S''_k du faisceau. Un espace général du faisceau est déterminé par le point P^k de coordonnées

$$\lambda x'^k + \mu x''^k.$$

Donc on a

$$X_{i_0, i_1 \dots i_k} = \lambda X'_{i_0, i_1 \dots i_k} + \mu X''_{i_0, i_1 \dots i_k},$$

désignant par X', X'', X les coordonnées de Grassmann des espaces S'_k, S''_k, S_k.

Réciproquement [2]), on a le

Théorème 1: „Aux droites de la variété de Grassmann V_d correspondent des faisceaux linéaires d'espaces S''_k".

Soient Q^1, Q^2, Q^3 trois points de la V_d situés sur le droite l. Ces trois points sont *linéairement dépendants* c'est à dire que l'on a entre les coordonnées X^1, X^2, X^3 de ces points les relations

$$X^3 = \lambda X^1 + \mu X^2. \tag{3}$$

---

[1]) Severi: „Sulla varieta che rappesenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare". Annali di Mat. 3. Sér. Tom. 24. 1915.

[2]) Cf. Segre: „Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni". Annali di Matematica Ser. III. T. XXVII. 1917.

Donc on a les équations bilinéaires

$$X^1_{i_0,\dots i_k} X^2_{j_0,\dots j_k} + X^1_{j_0,\dots j_k} X^2_{i_0,\dots i_k} = \tag{4}$$

$$\sum_{s=0}^{k} (X^1_{j_s, i_1, \dots i_k} \cdot X^2_{j_0,\dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1}, \dots j_k} + X^1_{j_0,\dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1} \dots j_k} \cdot X^2_{j_s, i_1, \dots i_k}).$$

Réciproquement, si l'on a entre les coordonnées de Grassmann de deux points Q^1, Q^2 les relations (4), alors la droite $l = \overline{Q^1 Q^2}$ qui relie ces deux points est située sur la variété V_d.

Tout espace $S_{k'}$ à k' dimensions qui s'appuie sur les deux espaces S^1_k et S^2_k qui correspondent aux points Q^1 et Q^2 s'appuie en conséquence sur tous les espaces S_k qui correspondent aux points Q linéairement dépendants des points Q^1 et Q^2. En effet, envisageons la matrice

$$\overline{M} = \left| \begin{array}{ccc} x'^0_0 & \dots & x'^0_r \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ x'^{k'}_0 & \dots & x'^{k'}_r \\ x^0_0 & \dots & x^0_r \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ x^k_0 & \dots & x^k_r \end{array} \right| \tag{5}$$

dont les $k'+1$ premières lignes forment la matrice M' de l'espace $S_{k'}$ et dont les $k+1$ derniéres lignes forment la matrice M de l'espace S_k. Dévelloppons la matrice $\overline{M}$ suivant les mineurs de la matrice M'. On a

$$\Sigma \pm X'_{i'_0,\dots i'_{k'}} X_{i_0,\dots i_k} = 0, \tag{6}$$

$i_0, \dots i_k$ et $i'_0, \dots i'_{k'}$ étant deux combinaisons complémentaires de nombres de la suite de nombres $j_0, \dots j_{k+k'+1}$ qui appartient à la suite $0, 1, \dots r$. On a $i_0 < \dots < i_k$; $i'_0 < \dots < i'_{k'}$, le signe $+$ convient à une permutation $i'_0, \dots i'_{k'}, i_0, \dots i_k$ paire et le signe $-$ à une permutation impaire. Le nombre des équations (6) est $\binom{k+k'+2}{k'+1} = \binom{k+k'+2}{k+1}$. Si les coordonnées X^1 et X^2 des espaces S^1_k et S^2_k satisfont aux équations (6) il en est de même des coordonnées X de tout espace S_k linéairement dépendant des espaces S^1_k et S^2_k.

Envisageons donc trois espaces S^1_k, S^2_k, S^3_k linéairement dépendants. Toute droite l qui passe par un point P^1 de l'espace S'_k et qui s'appuie sur l'espace S^2_k s'appuie en conséquence sur l'espace S^3_k. Donc les deux espaces S^2_k; S^3_k sont dans un S_{k+1}, auquel appartient par conséquence l'espace S'_k. Soit $S^{1,2}_{k-1}$ l'espace commun aux espaces S^1_k, S^2_k et $P^0, P^1, \ldots P^{k-1}$ soient k points linéairement indépendants de cet espace S_{k-1}. Soient P'^k et P''^k deux points de coordonnées x'^k et x''^k l'un situé sur l'espace S'_k l'autre sur l'espace S^2_k. Le point P^k de coordonnées $\lambda x'^k + \mu x''^k$ est situé sur l'espace S^3_k, donc cet espace passe par l'espace $S^{1,2}_{k-1}$ et appartient au *faisceau linéaire* déterminé par les espaces S^1_k et S^2_k.

3. Il est dès lors facile de déterminer tous les *espaces linéaires* de la variété de Grassmann. Envisageons un plan Π de cette variété et trois points Q^1, Q^2, Q^3 linéairement indépendants de ce plan. Les trois espaces S^1_k, S^2_k, S^3_k se coupent deux à deux en deux espaces S_{k-1}. Donc ou bien l'espace S^3_k passe par l'axe $S^{1,2}_{k-1}$, et alors les trois espaces S^1_k, S^2_k, S^3_k sont situés dans un espace S_{k+2}, où bien l'espace S^3_k est déterminé par les deux espaces $S^{1,3}_{k-1}$ et $S^{2,3}_{k-1}$ suivant lesquels il coupe les espaces S^1_k, S^2_k donc il est situé dans l'espace S_{k+1} déterminé par les espaces S^1_k, S^2_k.

Il y a donc deux espèces de plans Π de la variété de Grassmann. Les uns correspondent aux étoiles ∞^2 d'espaces S_k ayant un S_{k-1} en commun et situés dans un S_{k+1}. Les autres correspondent aux $\infty^2 S_k$ d'un espace S_{k+1} qui ont en commun un S_{k-2}.

Envisageons maintenant un espace S_m à m dimensions situé sur la variété V_d. Les espaces S_k qui correspondent aux points Q de S_m ont deux à deux en commun un S_{k-1}. Donc ou bien tous ces espaces passent par un axe S_{k-1}, donc ils forment une étoile ∞^m et ils remplissent un espace S_{k+m}. Ou bien il y a au moins trois espaces S_k linéairement indépendants et n'ayant pas en commun un espace S_{k-1} et alors les espaces S_k appartiennent à un espace S_{k+1} et ils ont en commun un S_{k-m}.

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 2[1]): „Il y a sur la variété de Grassmann V_d deux familles d'espaces linéaires. L'une est composée d'espaces S_{k+1} qui correspondent aux S_k des espaces S_{k+1} de l'espace S_r. L'autre est composée d'espaces S_{r-k} qui correspondent aux étoiles d'axe S_{k-1} de l'espace S_r.

La première famille est composée de

$$\infty^{(r-k-1)(k+2)}$$

[1]) Cf. Segre: „Mehrdimensionale Raüme". Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften T. III. 2, Cah. 7. N° 3.

S_{k+1}. La seconde famille est composée de

$$\infty^{(r-k+1)k}$$

$S_{r-k}{}^{u}$.

4. Deux espaces S_{k+1} de la variété V_d ont en commun un point au plus. Il y a ∞^{r-k-1} espaces S_{k+1} qui passent par un point Q de la variété de Grassmann.

Deux espaces S_{r-k} de la variété de Grassmann ont toujours un point en commun si l'on a $k=1$, et n'ont en général aucun point en commun, si l'on a $k>1$, car on a alors

$$2(k-1)+1>k.$$

Par un point Q de la variété V_d il passe ∞^k espaces S_{r-k}.

Si un S_{k+1} de variété V_d et un S_{r-k} ont en commun un point Q alors ils ont en commun toute une droite, car alors l'axe S_{k-1} de l'étoile représenté par l'espace S_{r-k} est situé dans l'espace S_{k+1} représenté par l'espace S_{k+1} de la variété V_d.

2. Espaces tangents à la variété de Grassmann.

1. Une droite l de l'espace S_R d'équations

$$X=\lambda X^1+\mu X^2, \tag{7}$$

où X^1 et X^2 sont les coordonnées de deux points Q^1, Q^2 de l'espace S_R est une *tangente* de la variété V_d, si elle a en commun avec cette variété deux points coïncidant en un point Q^0 de cette variété. Si l'on choisit ce point comme point Q^1, alors les équations en λ, μ que l'on obtient en remplaçant les coordonnées X dans les équations de D'Ovidio par les expressions (7) ont la racine double $\mu=0$. Le point Q^2 satisfait donc aux équations (4). Donc si l'on regarde ce point Q^2 comme variable, les points de droites l tangentes à V_d satisfont à $R-d$ équations linéaires homogènes qui représentent autant d'hyperplans de l'espace S_R.

Les équations (4) sont linéairement indépendantes. Donc il y a en un point Q^0 de la variété V_d de Grassmann $R-d$ *hyperplans tangents* linéairement indépendants. Un hyperplan Π est tangent à la variété V_d au point Q^0, s'il contient les tangentes l, donc s'il passe par *l'espace tangent* S_d déterminé par les $R-d$ hyperplans d'équations (4). Donc l'équation d'un hyperplan tangent est une combinaison linéaire et homogène des équations des $R-d$ hyperplans (4).

L'espace tangent S_d coupe la variété V_d de Grassmann en une variété V composée de droites tangentes l situées sur la variété V_d. Ces droites représentent les faisceaux linéaires de l'espace S_r auxquels appartient l'espace S_k^1 représenté par le point Q^1 de V_d. Donc la variété V est une variété *conique* V_r à r dimensions.

La variété V_r est composée des droites des ∞^{r-k-1} espaces S_{k+1} passant par le point Q^1 ainsi que des droites des ∞^k espaces S_{r-k} passant par ce point. Chaque espace S_{k+1} et chaque espace S_{r-k} ont en commun une droite qui représente le faisceau des S_h situé dans l'S_{k+1} de l'espace S_R représenté par l'S_{k+1} envisagé et qui appartient à l'étoile d'axe S_{k-1} situé sur l'espace S_k^1 représentée par l'S_{r-k} envisagé.

D'après un résultat général de M. Severi[1]) tout complexe linéaire d'espaces S_k est donné par une équation linéaire

$$(8) \qquad \Sigma A_{i_0,\dots i_k} X_{i_0,\dots i_k} = 0 .$$

Cette équation est représentée dans l'espace S_R par un hyperplan Π.

Aux hyperplans Π tangents à la variété V_d au point Q^0 correspondent des complexes linéaires qui contiennent tous les S_k de l'espace S_r qui coupent l'S_k^1 fixe suivant des espaces S_{k-1}.

Un complexe linéaire est dit *singulier* et l'espace $S_{k'}$, $k' \geqq k$ de l'espace S_r est dit son *espace singulier* s'il contient tous les S_k qui coupent cet espace singulier en un espace S_{k-1} (au moins).

Nous avons le

Théorème 1: „Condition nécessaire et suffisante pour que le complexe linéaire (8) ait l'espace singulier S_k^1 est que l'hyperplan qui correspond à ce complexe soit tangent à la variété V_d au point Q^0 qui représente l'espace S_k^1".

Nous démontrerons la nécessité de la condition en montrant que la variété V_r *appartient* à l'espace S_d tangent au point Q^0. En effet, supposons que les points $A^0, A^1, \dots A^k$ fondamentaux de l'espace S_r soient situés dans l'espace S_k^1. L'unique coordonnée grassmannienne de l'espace S_k^1 différente de zéro est alors $X^1_{0,1,\dots k}$. Les équa-

[1]) „Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare". Anneli di Matematica pura ed applicata Ser. 3. T. 24. 1915.

tions (4) ont alors la forme

(9) $$X_{j_0, j_1, \dots j_k} = 0,$$

où deux indices j au moins diffèrent des nombres $0, 1, \dots k$.

Soit alors (8) l'équation d'un complexe linéaire qui possède l'espace singulier S_k^1. Cette équation est donc satisfaite par les coordonnées de l'espace S_k^1 ainsi que par les coordonnées des espaces fondamentaux

$$A^{i_0} A^{i_1} \dots A^{i_{k-1}} A^l,$$

où $i_0, i_1, \dots i_{k-1}$ sont k nombres de la suite $0, 1, \dots k$ de nombres et où l est $> k$. Donc on a

$$A_{0, 1, \dots k} = 0$$

$$A_{i_0, i_1, \dots i_{k-1}, l} = 0.$$

Donc l'équation (8) est une combinaison linéaire homogène des équations (9) ce qui démontre le théorème.

Un espace S_k qui n'a en commun avec S_k^1 qu'un espace S_m, $m < k - 1$ ne peut satisfaire aux équations (9). On peut, en effet, choisir $m + 1$ points $A^0, A^1, \dots A^m$ fondamentaux dans l'espace S_m et $k - m \geqq 2$ points fondamentaux $A^{k+1}, \dots A^{2k-m}$ en dehors de S_k^1. L'espace fondamental

$$A^0, A^1, \dots A^m A^{k+1} \dots A^{2k-m}$$

a l'unique coordonnée $X_{0, 1, \dots m, k+1, \dots 2k-m}$ différente de zéro. Cela démontre d'une autre manière le théorème 1 du chapitre 1.

2. L'espace linéaire S_d tangent à la variété V_d au point Q^0 ne peut pas être tangent à cette variété en un autre point Q'^0. En effet, supposons que les espaces S_k^0, $S_k'^0$ qui correspondent à ces points se coupent suivant un S_ϱ, $(\varrho \geqq -1)$. Choisissons les points fondamentaux $A^0, A^1, \dots A^\varrho$ dans l'S_ϱ, les points $A^{\varrho+1}, \dots A^k$ dans l'S_k^0 et les points $A^{k+1}, \dots A^{2k-\varrho}$ dans l'$S_k'^0$. Les points Q de l'espace S_d satisfont à deux systèmes d'équations linéaires, savoir au système (9) et au système correspondant au point Q'^0

(10) $$X_{j'_0, j'_1, \dots j'_k} = 0,$$

où deux indices j', au moins, n'appartiennent pas aux nombres $0, \dots \varrho; k + 1, \dots 2k - \varrho$. Si l'on a $\varrho < k - 1$, on devrait avoir en raison des équations (10) pour l'espace S_k^0

$$X_{0, 1, \dots k} = 0,$$

ce qui n'est pas vrai. Si l'on a $\varrho = k - 1$, l'espace fondamental

$$A^0 \dots A^{k-2} A^k A^l, \; l > 2k - \varrho = k + 1$$

est représenté par un point de la variété V_r appartenant au point Q^0. Les points A^k, A^l n'appartiennent pas à l'espace $S_k'^0$, donc on devrait avoir

$$X_{0, \dots k-2, k, l} = 0$$

ce qui n'est pas vrai. On a donc le

Théorème 2: „Les espaces S_d tangents aux points Q de la variété V_d ne sont tangents qu'en un point de cette variété".

3. Systèmes particuliers d'espaces S_k.

1. *Système linéaire d'espaces contenus dans un espace* S_ϱ.

Si l'on choisit les points fondamentaux $A^0, \dots A^\varrho$ dans l'espace S_ϱ, alors la matrice d'un espace S_k contenu dans l'S_ϱ a nulles ses colonnes d'ordres $\varrho + 1, \dots r$, Donc on a

$$X_{i_0, \dots i_k} = 0 \tag{11}$$

si un indice i au moins est supérieur à ϱ. La variété V qui représente sur la V_d ce système d'espaces appartient à l'espace donné par les équations (11) en nombre de

$$\binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1}$$

c'est donc un espace à $\binom{\varrho+1}{k+1} - 1$ dimensions, dont l'intersection complète avec la V_d est la variété V de $(\varrho - k)(k+1)$ dimensions.

2. *Système d'espaces qui s'appuient sur un espace* S_ϱ.

Choisissons encore les points fondamentaux $A^0, \dots A^\varrho$ dans l'S_ϱ. Les espaces S_k du système ont des matrices dont une ligne (au moins) a les éléments d'ordre $\varrho + 1, \dots r$ égaux à zéro. Donc a les équations (11) pour toutes les combinaisons $i_0, \dots i_k$ d'indices choisis parmi les nombres $\varrho + 1, \dots r$. Au système appartiennent tous les espaces fondamentaux dont un point fondamental au moins est dans l'espaee S_ϱ, espaces qui ont toutes les coordonnées X égales à zéro à l'exception d'une. Donc le système *appartient* à l'espace linéaire donné par les équations (11) en nombre de

$$\binom{r-\varrho}{k+1},$$

donc la dimension de cet espace est

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho}{k+1}-1.$$

La variété correspondante V est de dimension

$$\varrho+(r-k)k.$$

3. *Système d'espaces qui s'appuient sur un espace S_{ϱ_1} et qui sont contenus dans un espace S_ϱ contenant S_{ϱ_1}.*

Choisissons les points fondamentaux $A^0, \ldots A^{\varrho_1}$ dans S_{ϱ_1}, $A^{\varrho_1+1}, \ldots A^\varrho$ dans S_ϱ. La matrice d'un espace du système a égales à zéro les colonnes d'ordres $\varrho+1, \ldots r$, et une ligne au moins est composée depuis la place d'ordre ϱ_1+1 de zéros. Donc on a les équations (11) 1° pour toutes les combinaisons d'indices choisis parmi les nombres $\varrho+1, \ldots r$, 2° pour toutes les combinaisons contenant au moins un nombre supérieur à ϱ. Un espace fondamental dont au moins un point fondamental a l'indice $\leqq \varrho_1$ et dont tous les points fondamentaux ont des indices $\leqq \varrho$ a une seule coordonnée X différente de zéro. Donc le nombre d'équations (10) est

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}+\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}$$

et l'espace S correspondant a la dimension

$$\binom{\varrho+1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}+1.$$

La variété V correspondante appartient à S et elle est de dimension

$$\varrho_1+(\varrho-k)k.$$

4. *Système d'espaces qui ont au moins un S_m en commun avec un espace S_ϱ.*

Choisissons encore les points fondamentaux $A^0, \ldots A^\varrho$ comme auparavant. La matrice d'un tel espace a dans au moins $m+1$ lignes des zéros depuis la place d'ordre $\varrho+1$. Donc tous les X sont égaux à zéro pour lesquels *plus* de $k+1-(m+1)=k-m$ indices sont $>\varrho$, donc pour lesquels *au moins* $k-m+1$ indices sont $>\varrho$, donc au plus m indices sont $\leqq \varrho$. Ce nombre est égal à

$$(12) \qquad (\varrho, m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{r-\varrho}{k+1-i}\binom{\varrho+1}{i}.$$

Les autres X peuvent avoir des valeurs arbitraires. Donc l'espace S correspondant a la dimension

$$d_{\varrho, m} = \binom{r+1}{k+1} - (\varrho, m) - 1. \tag{13}$$

Désignons le système par $K_{\varrho, m}$. Les systèmes

$$K_{\varrho, 0}, K_{\varrho, 1}, \ldots K_{\varrho, k}$$

sont contenus chacun dans son précédent, et les espaces

$$S_{\varrho, 0}, S_{\varrho, 1}, \ldots S_{\varrho, k}$$

correspondants sont contenus de même chacun dans son précédent. On a

$$d_{\varrho, m} - d_{\varrho, m+1} = (\varrho, m+1) - (\varrho, m) = \binom{r-\varrho}{k-m}\binom{\varrho+1}{m+1}$$

La dimension $\delta_{\varrho, m}$ du système $K_{\varrho, m}$ est égale à l'infinité des espaces S_m contenus dans l'espace S_ϱ augmentée de l'infinité des espaces S_{k-m-1} contenus dans un espace S_{r-m-1}. Donc on a

$$\delta_{\varrho, m} = (\varrho - m)(m+1) + [r - m - 1 - (k - m - 1)](k-m),$$

donc

$$\delta_{\varrho, m} = (\varrho - m)(m+1) + (r-k)(k-m). \tag{14}$$

4. Complexes linéaires spéciaux d'espaces S_k.

1. Un complexe linéaire C d'espaces S_k représenté par une équation (8) est dit *spécial*, s'il est composé des espaces S_k qui s'appuient sur un espace S_{r-k-1} dit *espace directeur* du complexe. Si cet espace est donné par $r-k$ points linéairement indépendants $P'^0, \ldots P'^{r-k-1}$ dont la matrice M' est

$$M' = \left| \begin{matrix} x_0'^0 & , \ldots & x_r'^0 \\ x_0'^{r-k-1} & , \ldots & x_r'^{r-k-1} \end{matrix} \right|. \tag{15}$$

on obtient l'équation du complexe en annullant le déterminant D

$$D = \left| \begin{matrix} x_0'^0 & \ldots & x_r'^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0'^{r-k-1} & \ldots & x_r'^{r-k-1} \\ x_0^0 & \ldots & x_r^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^k & \ldots & x_r^k \end{matrix} \right| \tag{16}$$

On obtient ainsi l'équation

$$(17) \qquad \Sigma \pm X'_{i'_0,\dots i'_{k'}} X_{i_0,\dots i_k} = 0,\ k' = r - k - 1,$$

où la somme est étendue à toutes les paires de combinaisons complémentaires de $k' + 1$ et de $k + 1$ nombres tirées de la suite 0, 1,... r; $i'_0 < \dots < i'_{k'}$; $i_0 < \dots < i_k$ et où le signe est $+$ où $-$ suivant que la permutation $i'_0 < \dots < i'_k$, $i_0, \dots i_k$ est paire ou impaire.

Il est avantageux de se servir d'une autre forme de l'équation d'un complexe spécial. Regardons à cet effet l'espace S_{r-k-1} comme déterminé par l'intersection de $k+1$ espaces linéaires S_{r-1} indépendants de l'espace S_r à équations

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{r} \xi_i^j x_i = 0,\ j = 0, 1, \dots k$$

L'espace directeur est ainsi déterminé par une matrice à $k + 1$ lignes et à $r + 1$ colonnes

$$(19) \qquad N = \left| \begin{matrix} \xi_0^0, \dots & \xi_r^0 \\ \dots & \dots \\ \xi_0^k, \dots & \xi_r^k \end{matrix} \right| .$$

Un espace S_k s'appuie sur l'espace directeur en ce cas et seulement en ce cas que le déterminant d'ordre $k + 1$

$$(20) \qquad \left| \begin{matrix} \sum_{i=0}^{r} \xi_i^0 x_i^0, \dots & \sum_{i=0}^{r} \xi_i^0 x_i^k \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{r} \xi_i^k x_i^0, \dots & \sum_{i=0}^{r} \xi_i^k x_i^k \end{matrix} \right|$$

est égal à zéro. On obtient, en dévelloppant, l'équation

$$(21) \qquad \Sigma \Xi_{i_0,\dots i_k} X_{i_0,\dots i_k} = 0$$

où la sommation est étendue à toutes les combinaisons $i_0, \dots i_k$; $i_0 < \dots < i_k$ de $k + 1$ nombres parmi les indices $0, 1, \dots r$ et où $\Xi_{i_0,\dots i_k}$ est le mineur de la matrice N qui correspond au mineur $X_{i_0,\dots i_k}$ de la matrice M.

2. On peut donner à la matrice N la signification géométrique suivante[1]). Envisageons, dans l'espace S_r, la quadrique Q_2 de cet

[1]) Cf. Comessatti: „Osservazioni di geometria della retta in un S_r". Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti". T. LXXX.

espace définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{r} x_i^2 = 0. \tag{22}$$

Les équations (18) représentent alors $k+1$ hyperplans *polaires* par rapport à la quadrique Q_2 des $k+1$ points $P^{0,\xi}, \dots P^{k,\xi}$ de coordonnées $\xi_0^i, \dots \xi_r^i$, $i=0, 1, \dots k$. Donc on peut envisager la matrice Ξ comme matrice d'un espace S_k^ξ à k dimensions polaire de l'espace directeur S_{r-k-1} par rapport à la quadrique Q_2.

Aux espaces S_k du complexe spécial C^s correspondent, dans la polarité envisagée, des espaces S_{r-k-1} situés dans des hyperplans passant par l'espace S_k^ξ, donc des espaces S_{r-k-1} qui s'appuient sur cet espace et réciproquement.

3 On peut représenter les complexes linéaires d'espaces S_k dans l'espace S_R d'une façon analogue à celle envisagée au n⁰ précédent [1]. Envisageons la quadrique F_2 de l'espace S_R d'équation

$$\Sigma X^2_{i_0, \dots i_k} = 0. \tag{23}$$

L'hyperplan Π dont l'équation (8) représente un complexe linéaire de l'espace S_r est *polaire* par rapport à cette quadrique du point R de coordonnées $A_{i_0, \dots i_k}$.

Aux complexes spéciaux C^s correspondent ainsi des points R situés sur la variété V_d de Grassmann de coordonnées $\Xi_{i_0, \dots i_k}$. Les hyperplans polaires de ces points passent par les points Q de la variété V_d qui représentent les espaces S_k qui s'appuient sur l'espace directeur S_{r-k-1} représenté par le point R.

4 Envisageons un système algébrique K_t d'espaces linéaires S_k de dimension t et supposons-le contenu dans $l = R - h$ complexes linéaires indépendants d'équations

$$\Sigma A^i_{i_0, \dots i_k} X_{i_0, \dots i_k} = 0, \; i = 1, \dots R - h. \tag{24}$$

La variété V_t qui représente sur la V_d le système K_t est contenue dans l'espace S_h à $h = R - l$ dimensions représenté par les équations (24) Envisageons l'espace S_{l-1} *polaire* de l'espace S_h par rapport à la quadrique F_2, déterminé par les points A^i de coordonnées $A^i_{i_0, \dots i_k}$.

---

[1]) Comessati l. c.

L'espace S_{l-1} coupe la variété V_d en une variété W dont les points R sont les pôles des hyperplans Π spéciaux qui passent par la variété V_t. Donc les points R représentent les complexes linéaires spéciaux qui contiennent le système algébrique K_t et qui appartiennent au système linéaire (24) de complexes linéaires. Ces points R *existent certainement*, si l'on a l'inégalité

$$R - h - 1 + d \geqq R,$$

donc si l'on a

$$(25) \qquad l \geqq \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1).$$

On peut donc énoncer le

Théorème 1: „Un système algébrique d'espaces S_k contenu dans l complexes linéaires linéairement indépendants est contenu dans *au moins*

$$\infty^{l-\binom{r+1}{k+1}+(r-k)(k+1)}$$

complexes linéaires spéciaux ($\infty^0=1$), si l'inégalité (25) est satisfaite".

5. Nous envisagerons maintenant des systèmes linéaires de complexes assujettis à contenir les systèmes d'espaces S_k dont il a été question au Chap. 3.

Supposons donc que le système linéaire donné par les équations (24) contienne tous les S_k du premier des systèmes envisagés au Chap. 3. L'espace linéaire S_h contient alors la variété $V_{(\varrho-k)(k+1)}$ à $(\varrho-k)(k+1)$ dimensions qui réprésente le système envisagé. L'espace polaire S_{l-1} coupe V_d en une variété dont les points représentent les complexes spéciaux du système linéaire, donc les espaces directeurs du système, et en même temps ils représentent les S_k^ξ polaires de ces espaces directeurs. Aux espaces S_k de l'espace S_ϱ correspond, dans la polarité par rapport à la quadrique Q_2, des espaces S_{r-k-1} qui passent par l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ et qui ont avec un espace S_k^ξ un point en commun. Puisqu'un espace S_{r-k-1} directeur a en commun avec l'espace S_ϱ un espace $S_{\varrho-k}$, donc l'espace S_k^ξ polaire est situé avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ dans un espace $S_{r-\varrho+k-1}$ polaire de l'espace $S_{\varrho-k}$. Donc S_k^ξ a un point en commun avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$. Réciproquement, un espace S_k^ξ qui a un point (au moins) en commun avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ a comme polaire un S_{r-k-1} qui a avec l'espace S_ϱ en commun un espace $S_{\varrho-k}$ en commun un espace $S_{\varrho-k}$ au moins, donc qui s'appuie sur tous les S_k de S_ϱ.

Appellons *conjugués* deux points Q et R de l'espace S_R si l'hyperplan polaire de chaque point passe par l'autre point. Appellons *pôle* d'une variété V située sur la variété V_d de Grassmann tout point R dont l'hyperplan polaire passe par V. L'ensemble des points R forme une variété W. L'hyperplan polaire d'un point Q arbitraire de la variété V passe par la variété W. Les variétés V et W sont des variétés *conjuguées* dans la polarité, ou bien *polaires* l'une de l'autre. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

„La variété $V_{(\varrho-k)(k+1)}$ qui représente les S_k d'un espace $S_\varrho(\varrho \geqq k)$ de l'espace S_r admet comme variété polaire W la variété qui représente les espaces S_k^ξ qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ par rapport à la quadrique Q_2 de l'espace S_r".

Envisageons les espaces $\overline{S}$ et $\overline{\overline{S}}$ auxquels appartiennent les variétés V et W. L'espace $\overline{S'}$ polaire de l'espace $\overline{S}$ est déterminé par un certain nombre d'hyperplans indépendants polaires des points linéairement indépendants de l'espace $\overline{S}$ que l'on peut supposer tous sur la variété V. Donc l'espace $\overline{S'}$ contient la variété W donc il contient l'espace $\overline{\overline{S}}$. De même l'espace $\overline{\overline{S'}}$ polaire de l'espace $\overline{\overline{S}}$ contient l'espace $\overline{S}$.

Or l'espace $\overline{S}$ est à

$$\binom{\varrho+1}{k+1}-1$$

dimensions et l'espace $\overline{\overline{S}}$ est à

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1$$

dimensions. Donc $\overline{S}$ et $\overline{\overline{S}}$ sont polaires réciproques, donc $\overline{S'}$ coïncide avec $\overline{\overline{S}}$ et $\overline{\overline{S'}}$ avec $\overline{S}$.

L'espace $\overline{S}$ est situé dans l'espace S_{R-l} determiné par les équations (8). Donc l'espace $\overline{\overline{S}}$ polaire contient l'espace S_{l-1} polaire de l'espace S_{R-l}. La variété W est à

$$r-\varrho-1+(r-k)k$$

dimensions et elle appartient à l'espace $\overline{\overline{S}}$.

Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W en au moins un point, si l'on a l'inégalité

$$r-\varrho-1+(r-k)k+l-1 \geqq \binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1,$$

donc si l'on a l'inégalité

$$(26)\quad l \geqq \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - k + \varrho + 1.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème

Théorème 2: „Le système linéaire K déterminé par $l = R - h$ complexes linéaires indépendants qui contiennent tous tous les espaces S_k d'un espace S_ϱ à $\varrho \geqq k$ dimensions contient *au moins* ∞^{l-m} complexes linéaires spéciaux, si l'on a l'inégalité $l \geqq m$, m étant l'expression

$$(27)\quad m = \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - k + \varrho + 1.$$

Le résultat reste valable pour $\varrho < k$, pourvu que l'on remplace dans (26) et (27) ϱ par $k-1$ $\left(\binom{\varrho+1}{k+1}\text{ par } 0\right)$.

Pour que le système K puisse contenir l'espace S_ϱ il faut que l'on ait

$$h \geqq \binom{\varrho+1}{k+1} - 1$$

donc

$$(28)\quad l \leqq \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1},$$

inégalité compatible avec l'inégalité (16) puisque l'on a

$$(r-k)(k+1) + r - \varrho \geqq 1.$$

Si l'on détermine le système linéaire K en choisissant l points généraux de la variété W, donc un envisageant les l complexes spéciaux correspondants, alors l'espace S_{l-1} coupe la variété W *exactement* en ∞^{l-m} points. Si l'on a $l = m$ le nombre des points d'intersection est fini et égal à l'ordre de la variété W. Cet ordre n est égal au nombre d'espaces S_k qui s'appuient sur un espace linéaire $S_{r-\varrho-1}$ (ce qui donne $d - [r - \varrho - 1 + (r-k)k] = \varrho - k + 1$ conditions) et sur $r - \varrho - 1 + (r-k)k$ espaces S_{r-k-1}, ce qui donne ensemble d conditions.

Or ce nombre n est donné par une formule célèbre de Schubert[1]) qui donne le nombre d'espaces S_k qui satisfont à une condition $[a_0, a_1, \ldots a_k]$, c'est à dire qui coupent un espace S_{a_0} en 1 point

[1]) Cf. Segre: „Mehrdimensionale Raüme etc." l. c. N° 7.

un espace S_{a_1} passant par l'espace S_{a_0} en une droite etc. et qui s'appuient, en outre, sur

$$H = \sum_{i=0}^{k} a_i - \tfrac{1}{2}k(k+1)$$

espaces linéaires $S_{r-\varrho-1}$. La première condition est de dimension

$$\sum_{i=0}^{k}(r-k-a_i+i) = (r-k)(k+1) - H.$$

La formule de Schubert est

$$n = \frac{H!\,D}{\prod\limits_{i=0}^{k} a_i!}, \tag{29}$$

où D est le produit $\Pi(a_j - a_i)$ des différences *positives* $a_j - a_i$.

Dans notre cas on a

$$[a_0, \dots a_k] = [r-\varrho-1, r-k+1, \dots r],$$
$$D = (k-1)! \dots 2!(\varrho+1)\varrho \dots (\varrho-k+2),$$
$$H = r - \varrho - 1 + (r-k)k + \tfrac{1}{2}k(k+1) - \tfrac{1}{2}k(k+1).$$

Nous avons donc

$$n = \frac{[(r-k)(k+1)+k-\varrho-1]!\,1!\,2!\,(k-1)!\,(\varrho+1)!}{r! \dots (r-k+1)!\,(\varrho-k+1)!\,(r-\varrho-1)!}. \tag{30}$$

Si l'on a $\varrho < k$, il faut poser $\varrho = k-1$. ($H = d$, $W \equiv V_d$). On a alors

$$n = \frac{[(r-k)(k+1)]!\,1! \dots k!}{r! \dots (r-k)!}. \tag{31}$$

Nous avons donc le

Théorème 3: „Tous les espaces S_k qui s'appuient sur $l \geqq m$ espaces directeurs S_{r-k-1}, où le nombre m est donné par la formule (27), espaces directeurs assujettis à couper tous les espaces S_k d'un espace S_ϱ, mais choisis du reste *généralement*, s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m} espaces directeurs analogues en cas de *l'inégalité* $l > m$ et sur $n - m$ *autres* espaces directeurs analogues, ou n est donné par la formule (30) en cas de *l'égalité* $l = m$".

Comme exemple envisageons le cas de $k = 2$. On a alors

$$n = \frac{[3(r-2)]!\,2!}{(r-2)!\,(r-1)!\,r!}, \quad m = \binom{r+1}{3} - 3(r-2).$$

On a p. ex. pour $r = 5$

$$n = 42, \quad m = 11.$$

6. Nous assujettirons maintenant le système linéaire (8) à contenir le second système d'espaces S_k envisagé au Chap. 3, c'est à dire le système d'espaces qui s'appuient sur un espace S_ϱ. Soit W la variété à $\varrho + (r-k)k$ dimensions qui représente ce système sur la V_a. W appartient à l'espace $\overline{\overline{S}}$ de

$$\binom{r+1}{k+1} - \binom{r-\varrho}{k+1} - 1$$

dimensions. L'espace S_{R-l} représenté par les équations (8) contient l'espace $\overline{\overline{S}}$. Donc son espace polaire S_{l-1} est contenu dans l'espace $\overline{S}$ polaire de l'espace $\overline{\overline{S}}$. La variété V polaire de la variété W et qui représente les espaces S_k contenus dans un espace $S_{r-\varrho-1}$ appartient à l'espace $\overline{S}$ de $\binom{r-\varrho}{k+1} - 1$ dimensions.

Donc si l'on a l'inégalité

$$l - 1 + (r - \varrho - k - 1)(k+1) \geqq \binom{r-\varrho}{k+1} - 1,$$

donc l'inégalité

$$l \geqq \binom{r-\varrho}{k+1} - (r - k - \varrho - 1)(k+1) \tag{32}$$

il y a dans le système (8) *au moins* ∞^{l-m_1} complexes linéaires spéciaux, où

$$m_1 = \binom{r-\varrho}{k+1} - (r - k - \varrho - 1)(k+1). \tag{33}$$

Nous avons donc le

Théorème 4: „Si l'on a l'inégalité (32), alors le système envisagé de complexes linéaires contient *au moins* ∞^{l-m_1} complexes spéciaux, où m_1 est donné par l'expression (33)."

Pour que l'espace S_R contienne l'espace $\overline{\overline{S}}$ il faut que l'on ait

$$R - l \geqq \binom{r+1}{k+1} - \binom{r-\varrho}{k+1} - 1,$$

donc que l'on ait

$$l \leqq \binom{r-\varrho}{k+1}, \tag{34}$$

inégalité compatible avec l'inégalité (32). Si l'on a $\varrho > r - k - 1$, il faut remplacer ϱ par -1.

Choisissons, comme auparavant, l complexes linéaires *spéciaux* qui déterminent le système (8), en choisissant l points *généraux* de la variété V. L'espace S_{l-1} coupe alors la variété V *exactement* en ∞^{l-m_1} points, si l'on a $l > m_1$ et en $n_1 - m_1$ points, si l'on a $l = m_1$, n_1 étant donné par la formule

$$(35) \qquad n_1 = \frac{[(r-\varrho_1-k-1)(k+1)]!\,1!\ldots k!}{(r-\varrho_1-k-1)!\ldots(r-\varrho_1-1)!},$$

qui donne l'ordre de la variété V. On a donc le

Théorème 5: „Envisageons $l \geqq m_1$ espaces directeurs S_{r-k-1} qui satisfont à la condition de couper tous les S_k du système des S_k qui s'appuient à leur tour sur un espace S_ϱ (donc qui passent par cet espace), mais qui sont, du reste, choisis *généralement*. Tous les S_k qui s'appuient sur ces espaces directeurs s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m_1} espaces directeurs analogues, si l'on a *l'inégalité* $l > m_1$, et sur $n_1 - m_1$ *autres* espaces directeurs S_{r-k-1} analogues, où n_1 est donné par la formule (35) en cas de *l'égalité* $l = m_1$".

7. Nous généraliserons maintenant les résultats précédents en envisageant un système linéaire de l complexes qui contiennent tous les S_k qui coupent un S_ϱ donné en (au moins) un espace S_m.

Dans la polarité par rapport à la quadrique Q_2 il correspond à l'espace S_ϱ un espace $S_{r-\varrho-1}$ et aux espaces S_k qui coupent S_ϱ en un espace S_m (au moins) correspondent des espaces S_{r-k-1} situés avec l'$S_{r-\varrho-1}$ polaire dans un espace S_{r-m-1} (au plus). Soit V l'image du système des S_k envisagé, et W son polaire par rapport à la quadrique F_2 de l'S_R. Un poiut R de la variété W est l'image d'un S_{r-k-1} auquel s'appuient les S_k du système, donc qui coupe l'espace S_ϱ en (au moins) un espace $S_{\varrho-m}$, puisque l'espace S_{r-k-1} doit couper tout espace S_m de l'espace S_ϱ. Donc l'$S_k^\dagger$ polaire de l'espace S_{r-k-1} par rapport à la quadrique Q_2 est situé avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ dans un espace d'au plus $r-\varrho+m-1$ dimensions $S_{r-\varrho+m-1}$, donc l'$S_k^\dagger$ coupe $S_{r-\varrho-1}$ en un espace S_{k-m} (au moins) puisque l'on a

$$r-\varrho+m-1+(k-m) = k+r-\varrho-1.$$

Donc la variété W polaire de V par rapport à la quadrique F_2 représente les S_k qui coupent l'$S_{r-\varrho-1}$ en des espaces S_{k-m} (au moins). La dimension de W est donc

$$\delta_{r-\varrho-1,\,k-m} = (r-\varrho-1-k+m)(k-m+1)+(r-k)m,$$

et elle appartient à un espace S de

$$d_{r-\varrho-1,\,k-m} = \binom{r+1}{k+1} - (r-\varrho-1,\,k-m) - 1$$

dimensions. On a d'ailleurs

$$(r-\varrho-1,\,k-m) + (\varrho,\,m) = \binom{r+1}{k+1},$$

donc

(37) $$d_{r-\varrho-1,\,k-m} = (\varrho,\,m) - 1.$$

Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W, si l'on a l'inégalité

$$l - 1 + (r-\varrho-k+m-1)(k-m+1) + (r-k)m \geqq (\varrho,\,m) - 1,$$

donc l'inégalité

(38) $$l \geqq (\varrho,\,m) - (r-\varrho-k+m-1)(k-m+1) - (r-k)m.$$

Nous avons donc le

Théorème 6: „Le système linéaire d'espaces déterminé par les l équations de complexes (8) qui contient tous les espaces S_k coupant un espace S_ϱ en au moins un espace S_m contient au moins ∞^{l-s_m} complexes spéciaux, s_m étant donné par la formule

(39) $$s_m = (\varrho,\,m) - (r-\varrho-k+m-1)(k-m+1) - (r-k)m\text{“}.$$

L'ordre n_m de la variété W est, d'après la formule de Schubert égal au nombre des S_k qui satisfont à la condition

$$[r-\varrho-k+m-1, \ldots r-\varrho-1,\; r-m+1, \ldots r]$$

et qui s'appuient, en outre, sur

$$H = \sum_{i=0}^{k-m}(r-\varrho-1-i) + \sum_{i=1}^{m}(r-m+i) - \frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= (r-\varrho-1)(k-m+1) - \frac{(k-m)(k-m+1)}{2} +$$

$$+ (r-m)m + \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{k}k(k+1) =$$

$$= (r-\varrho-k-1)(k-m+1) + m(r-m+1)$$

espaces directeurs S_{r-k-1}. Donc on a

$$D = (m-1)!\ldots 2!\,(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)\ldots(\varrho+1).$$

$$(\varrho+k-m)\ldots \varrho \ldots (\varrho+k-2m+2)\ldots(\varrho-m+2) =$$

$$= \frac{(m-1)!\ldots 2!\,(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)!\ldots(\varrho+k-2m+2!)}{\varrho!\,(\varrho-1)!\ldots(\varrho-m+1)!}$$

Donc a

$$(40)\quad n_m = \frac{[(r-\varrho-k-1)(k-m+1)+m(r-m+1)]!\,(m-1)!\ldots 2!}{(r-\varrho-k+m-1)!\ldots(r-\varrho-1)]!\,(r-m+1)!\ldots r!}\cdot\frac{(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)!\ldots(\varrho+k-2m+2)!}{\varrho!\ldots(\varrho-m+1)!}.$$

Nous obtenons en raisonnant comme auparavant le théorème

Théorème 7: Tous les espaces S_k qui s'appuient sur l espaces généraux S_{r-k-1} assujettis seulement à s'appuier sur tous les S_k qui coupent un espace fixe S_ϱ en un espace S_m (au moins) (ou bien coupent S_ϱ en un $S_{\varrho-m}$) s'appuient en conséquence sur ∞^{l-s_m} espaces directeurs analogues, si l'on a $l > s_m$, et sur $n_m - s_m$ *autres* espaces directeurs analogues, si l'on a $l = s_m$, s_m et n_m étant donnés par les formules (39) et (40)".

8. Nous envisagerons encore un autre système linéaire ∞^{l-1} de complexes linéaires, savoir un système qui contient à la fois tous les S_k d'un espace S_ϱ et tous les S_k qui s'appuient sur un espace S_{ϱ_1} contenu dans l'espace $S_\varrho (\varrho \geqq \varrho_1)$.

Soient V et V_1 les variétés qui représentent, sur V_d, les deux systèmes. Ces deux variétés sont de dimensions

$$(\varrho-k)(k+1) \text{ et } \varrho_1+(r-k)k$$

et elles ont en commun la variété W de

$$\varrho_1+(\varrho-k)k$$

dimensions qui représente les espaces S_k contenus dans l'espace S_ϱ et qui s'appuient sur l'S_{ϱ_1}.

Les trois variétés V, V_1, W appartiennent à trois espaces S_1, S_2, S_3 de

$$\binom{\varrho+1}{k+1}-1,\ \binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho_1}{k+1}-1,\ \binom{\varrho+1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions. L'espace S_{1+2} somme des deux espaces S_1, S_2 est de

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho_1}{k+1}+\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions. Les espaces $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ polaires des espaces S_1, S_2, S_2 sont de

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1,\ \binom{r-\varrho_1}{k+1}-1,\ \binom{r+1}{k+1}-$$
$$-\binom{\varrho+1}{k+1}+\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions et l'espace $\overline{S}_{1+2}$ polaire de l'espace S_{1+2} est de

$$\binom{r-\varrho_1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} - 1$$

dimensions. L'espace $\overline{S}_3$ est l'espace somme des espaces $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_2$, et l'espace $\overline{S}_{1+2}$ est l'espace commun des espaces $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_2$.

L'espace S_{R-l} qui correspond au système linéaire de complexes contient les espaces S_1 et S_2, donc son polaire S_{l-1} est contenu dans les espaces $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_2$, donc il est contenu dans l'espace $\overline{S}_{1+2}$ commun des espaces $\overline{S}_1$ et $\overline{S}_2$.

Les variétés $\overline{V}$, $\overline{V}_1$, $\overline{W}$ polaires des variétés V, V_1, W représentent les S_k suivants:

Ceux qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ.

Ceux qui appartiennent à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$ polaire de l'espace S_{ϱ_1}.

Ceux qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ et ceux qui appartiennent à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$.

Les deux variétés $\overline{V}$ et $\overline{V}_1$ ont en commun une variété W_2 qui represente les S_k qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ et qui appartiennent en même temps à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$. En effet, les points de W_2 sont en même temps des pôles des deux variétés de V et de V_1.

Les variétés $\overline{V}$, $\overline{V}_1$, $\overline{W}_2$ sont de dimensions

$$r-\varrho-1+(r-k)k,\ (r-\varrho_1-k-1)(k+1),$$
$$r-\varrho-1+(r-\varrho_1-k-1)k.$$

La variété W_2 est contenue dans l'espace $\overline{S}_{1+2}$ et elle appartient évidemment à cet espace. Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W_2, si l'on a l'inégalité

$$l-1+r-\varrho-1+(r-\varrho_1-k-1)k \geqq$$
$$\geqq \binom{r-\varrho_1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} - 1,$$

donc si l'on a l'inégalité

$$(41) \quad l \geqq \binom{r-\varrho_1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} - (r-\varrho_1-k-1)k - r + \varrho + 1.$$

Cette inégalité contient celles (26) et (32) comme cas particuliers, la première pour $\varrho_1 = -1$, la seconde pour $\varrho = \varrho_1 + k$ (dans ce cas tous les S_k de l'espace S_ϱ s'appuient sur l'espace S_{ϱ_1}).

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 8: „Si l'on a l'inégalité (41), alors il y a dans le système (8) de complexes *au moins* ∞^{l-m_2} complexes spéciaux où l'on a

$$(42)\ m_2 = \binom{r-\varrho_1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} - (r_1-\varrho_1-k-1)k - r + \varrho + 1\text{“}.$$

L'ordre n_2 de la variété W_2 est égal au nombre des S_k qui coupent un espace $S_{r-\varrho-1}$ situé dans un espace $S_{r-\varrho_1-1}$, qui sont situés dans l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$ et qui coupent en outre H espaces S_{r-k-1}, où H est égal à la dimension de W_2.

La condition de Schubert $[a_0, \dots a_k]$ est

$$[r-\varrho-1, r-\varrho_1-k, r-\varrho_1-k+1, \dots r-\varrho_1-1]$$

Donc on a

$$D = (k-1)! \dots 2!\,(\varrho-\varrho_1)\dots(\varrho-\varrho_1-k+1).$$

Nous avons donc la formule

$$(43)\ n_2 = \frac{[(r-\varrho_1-k-1)k+r-\varrho-1]!\ 1!\ 2! \dots (k-1)!\ (\varrho-\varrho_1)!}{(r-\varrho-1!)\ (\varrho-\varrho_1-k)!\ (r-\varrho_1-k)! \dots (r-\varrho_1-1)!}$$

qui coïncide avec la formule (30), si l'on pose $\varrho_1 = -1$ et avec la formule (35), si l'on pose $\varrho = \varrho_1 + k$.

Nous avons donc le

Théorème 9: „Tous les espaces S_k qui s'appuient sur l espaces directeurs généraux assujettis seulement à couper tous les S_k qui s'appuient sur un S_{ϱ_1} et tous ceux qui sont contenus dans un S_ϱ qui passe par S_{ϱ_1}, s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m_2} espaces directeurs semblables, si l'on a $l > m_2$, et sur $n_2 - m_2$ autres espaces directeurs semblables, si l'on a $l = m_2$, les nombres n_2 et m_2 étant donnés par les expressions (42), (43)“.

Cracovie, Mai 1924.