XVI.

SULLA ROTAZIONE DI UN CORPO IN CUI ESISTONO SISTEMI POLICICLICI

« Annali di Matematica », ser. 2ª, vol. 24, 1896, pp. 29-58.

1. In alcuni lavori precedentemente pubblicati [1] ho studiato la rotazione di un corpo nel cui interno esistono moti stazionarii e ne ho data la soluzione mediante funzioni ellittiche. Nei detti studi ho supposto, fin da principio, che i moti interni venissero conservati stazionarii mediante l'azione di *forze* interne.

Vogliamo ora approfondire l'esame dell'effetto di queste forze interne, della loro necessità onde conservare stazionarii i moti interni e di ciò che avviene quando esse non siano tali da soddisfare a questa condizione. Queste considerazioni formeranno il soggetto della presente Memoria e ci condurranno ad allargare il campo delle nostre ricerche e delle loro applicazioni al problema della rotazione terrestre.

2. Cominciamo dalla determinazione della forza viva di un sistema girevole attorno ad un punto fisso.

Sia ξ, η, ζ un sistema di assi mobili coll'origine in questo punto, e denotiamo con u, v, w le componenti secondo queste direzioni della velocità *relativa* agli assi stessi del punto del sistema di coordinate ξ, η, ζ. Siano p, q, r le componenti della velocità angolare di rotazione nelle direzioni ξ, η, ζ di questi assi. Le componenti della velocità assoluta del punto (ξ, η, ζ) risulteranno:

$$u + q\zeta - r\eta \quad , \quad v + r\xi - p\zeta \quad , \quad w + p\eta - q\xi .$$

Quindi, chiamando ρ la densità del sistema S, la sua forza viva sarà:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \left\{ (u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2 \right\} dS,$$

(1) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* « Astr. Nachr. »., vol. 138, nn. 3291-2; *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* « Atti della R. Acc. di Torino », 3 febbr., 1895; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* Id., 3 marzo, 1895. *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Id., 31 marzo, 1895; *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* Id., 5 maggio, 1895; *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionari.* « Annali di Matematica », vol. 23. [In questo vol., V a IX, pp. 87-140 e XV, pp. 173-186].

da cui segue, denotando con A, B, C i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi ξ, η, ζ; D, E, F i momenti misti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η,

$$(1) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\,\mathrm{D}qr - 2\,\mathrm{E}rp - 2\,\mathrm{F}pq) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + \mathrm{T}_0\,,$$

in cui si è posto:

$$m_1 = \int \rho\,(w\eta - v\zeta)\,d\mathrm{S} \quad , \quad m_2 = \int \rho\,(u\zeta - w\xi)\,d\mathrm{S} \quad , \quad m_3 = \int \rho\,(v\xi - u\eta)\,d\mathrm{S}$$

$$\mathrm{T}_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,d\mathrm{S}\,;$$

m_1, m_2, m_3 sono cioè le componenti della coppia di quantità di moto del moto relativo agli assi ξ, η, ζ e T_0 è la forza viva del moto relativo stesso.

Chiamiamo i detti moti relativi *moti interni del sistema* e supponiamo dapprima che essi non alterino la forma e la distribuzione di densità del sistema. In tale ipotesi dovremo avere soddisfatta la condizione:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial\eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial\zeta} = 0\,,$$

e lungo una superficie di discontinuità:

$$\rho\,(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz) = \rho'\,(u'\cos nx + v'\cos ny + w'\cos nz)\,,$$

donotando con n la normale alla superficie di discontinuità e ρ, u, v, w; ρ', u', v', w' i rispettivi valori della densità e delle componenti della velocità dalle due parti della superficie stessa. Nella detta ipotesi A, B, C, D, E, F saranno costanti, e scegliendo per assi ξ, η, ζ gli assi principali d'inerzia potremo supporre nulle le tre ultime di queste sei quantità.

Le quantità m_1, m_2, m_3, T_0 saranno in generale funzioni del tempo, ma se oltre al non alterare la forma e la densità del sistema i moti interni saranno *stazionarii*, ne seguirà che m_1, m_2, m_3, T_0 dovranno considerarsi costanti.

3. Nella ipotesi che i moti interni siano stazionarii ed il sistema non sia sollecitato da forze esterne, abbiamo trovato (2), scegliendo per assi quelli principali d'inerzia, che le equazioni differenziali del moto:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\ &\mathrm{B}\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\ &\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\,pq + m_2 p - m_1 q = 0\,, \end{aligned} \right.$$

(2) Vedi: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. «Atti della R. Accad. di Torino», 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112].

ammettono i due integrali:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{cost.}, \tag{3}$$

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{cost.} \tag{3'}$$

Se T fosse costante, a cagione del primo dei due precedenti integrali e della condizione $T_0 = \text{cost.}$, seguirebbe:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = g = \text{cost.} \tag{3''}$$

Cerchiamo ora le condizioni affinché risulti soddisfatta la equazione precedente, comunque si scelgano le condizioni iniziali del moto.

Derivandola rispetto a t otteniamo:

$$m_1 \frac{dp}{dt} + m_2 \frac{dq}{dt} + m_3 \frac{dr}{dt} = 0,$$

onde moltiplicando rispettivamente le (2) per m_1/A, m_2/B, m_3/C e sommando si avrà:

$$\frac{m_1}{A}(B - C)\,qr + \frac{m_2}{B}(C - A)\,rp + \frac{m_3}{C}(A - B)\,pq$$

$$- m_2 m_3\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p - m_3 m_1\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)q - m_1 m_2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)r = 0.$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta da un sistema qualunque di valori di p, q, r, dovrà essere o:

$$A = B = C,$$

oppure:

$$B = C \quad , \quad m_2 = m_3 = 0,$$

ovvero:

$$C = A \quad , \quad m_3 = m_1 = 0,$$

o finalmente:

$$A = B \quad , \quad m_1 = m_2 = 0.$$

Reciprocamente se uno di questi sistemi di condizioni sarà soddisfatto, ne verrà come conseguenza che la forza viva si manterrà costante comunque siano le condizioni iniziali del moto. Possiamo quindi enunciare il teorema:

Affinché la forza viva del sistema si mantenga costante comunque siano le condizioni iniziali del moto, è necessario e sufficiente che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera, oppure sia di rivoluzione attorno all'asse dei moti interni.

Però si può spingere la ricerca più innanzi e si può chiedere se specializzando le condizioni iniziali del moto possa la forza viva mantenersi costante anche in casi diversi dai precedenti. Intanto si può osservare che ciò avverrà evidentemente quando la rotazione del sistema sarà permanente; le condizioni affinché le rotazioni del sistema siano tali furono da noi esposte già in due Memorie (3) ed in esse furon trovati dei casi che non

(3) Vedi: *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* «Astr. Nachr.», Bd. 138 [in questo vol.: V, pp. 87-107]. *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionari.* «Annali di Matem.», tomo 23 [in questo vol.: XV, pp. 173-186].

rientrano nei precedenti. Ma ci si può domandare se essi sono i soli. La questione si riduce a esaminare quando le equazioni (3), (3′), (3″) hanno infinite radici comuni. Eliminando p si trovano le due equazioni:

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 + 2(B-A)m_2 q + 2(C-A)m_3 r = \text{cost.}$$

$$(Am_2^2 + Bm_1^2)q^2 + (Am_3^2 + Cm_1^2)r^2$$

$$+ 2Am_2 m_3 qr - 2Agm_2 q - 2Agm_3 r = \text{cost}.$$

Affinché esistano infinite radici comuni, la resultante di queste equazioni dovrà avere nulli tutti i coefficienti. Eguagliando a zero quello del termine di quarto grado si trova la condizione:

$$\{m_1^2 BC(B-C) + m_2^2 CA(C-A) + m_3^2 AB(A-B)\}^2$$
$$+ 4ABC\{m_2^2 m_3^2 A(B-A)(C-A) + m_3^2 m_1^2 B(C-B)(A-B)$$
$$+ m_1^2 m_2^2 C(A-C)(B-C)\} = 0,$$

la quale non può verificarsi se non si ha $A = B = C$, oppure non si annulla qualcuna delle m_1, m_2, m_3, giacché essa può scriversi:

$$\{m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B)\}^2$$
$$+ 4A^2 BCm_2^2 m_3^2 (B-A)(C-A)$$
$$= \{m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C)\}^2$$
$$+ 4B^2 CAm_3^2 m_1^2 (C-B)(A-B)$$
$$= \{m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A)\}^2$$
$$+ 4C^2 ABm_1^2 m_2^2 (A-C)(B-C) = 0.$$

Ne verrebbe dunque che, se T fosse costante, p, q, r sarebbero pure costanti, a meno che non si avesse $A = B = C$, oppure non fosse nulla qualcheduna delle m_1, m_2, m_3.

Perciò avremo il teorema: *La condizione necessaria è sufficiente affinché sia costante la forza viva di un sistema sottratto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii quando* A, B, C *sono diversi fra loro e* m_1, m_2, m_3 *sono diversi da zero, è che la rotazione del sistema sia permanente.*

Supponiamo ora $m_2 = 0$; in tale ipotesi l'ultima condizione trovata diviene:

$$m_1^2 C(B-C) - m_3^2 A(A-B) = 0,$$

ovvero:

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}.$$

B dovrà dunque essere compreso fra A e C. Supposto $A > B > C$ potremo porre:

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}\quad,\quad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)},$$

con ε costante reale; onde le (3) e (3') diverranno:

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = \text{cost.}$$

$$\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 + 2\varepsilon\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\,p \pm 2\varepsilon\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,r = \text{cost.}$$

ed eliminando q fra queste equazioni avremo:

$$\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})p^2 + \mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{B})r^2 + 2\varepsilon\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\,p \pm 2\varepsilon\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,r = \text{cost.},$$

che può anche scriversi:

$$(4)\qquad \left[\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\,p \pm \sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,r + \varepsilon(\mathrm{A}-\mathrm{C})\right] \times \left[\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\,p \mp \sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,r + \varepsilon(\mathrm{A}+\mathrm{C})\right] = \text{cost.}$$

Supponiamo di prendere i valori iniziali di p ed r tali che il primo fattore della precedente equazione sia nullo; ne seguirà che lo stesso fattore *si conserverà sempre nullo*. Infatti, se i valori iniziali scelti per p ed r non annullano anche il secondo fattore ciò è evidente; se lo annullassero dovremmo avere:

$$p = \frac{-\varepsilon\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}} = \frac{m_1}{\mathrm{B}-\mathrm{A}}\ ,\ r = \frac{\pm\varepsilon\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}} = \frac{\pm\varepsilon\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}} = \frac{m_3}{\mathrm{B}-\mathrm{C}},$$

quindi il moto sarebbe permanente (vedi Mem. citata negli « Annali di Mat. », § 8, II caso) e perciò p ed r si conserverebbero costanti, onde il primo fattore si manterrebbe nullo. Ora l'annullarsi di questo fattore porta alla condizione (3'''); possiamo dunque concludere che la *forza viva si conserverà costante quando sia*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\quad,\quad m_2 = 0\quad,\quad m_3 = \pm\varepsilon\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})},$$

e le condizioni iniziali del moto sono tali che:

$$\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\,p \pm \sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,r + \varepsilon(\mathrm{A}-\mathrm{C}) = 0,$$

q essendo qualunque.

Reciprocamente se la condizione (3'') deve essere soddisfatta o essa deve coincidere coll'annullarsi del primo fattore della (4), o altrimenti dovrà essere costante anche l'altro fattore e quindi p, q, r dovranno essere costanti ed il moto permanente.

Osserviamo finalmente che se si suppone, oltre m_2, anche m_1 oppure m_3 costante deve aversi $\mathrm{B} = \mathrm{A}$, oppure $\mathrm{B} = \mathrm{C}$ e si ricade nelle condizioni stabilite da principio.

Riassumendo l'analisi fatta può concludersi.

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché la forza viva del sistema si conservi costante si riducono ad uno dei gruppi seguenti:

1° *che il moto di rotazione del sistema sia permanente;*

2° *che sia:*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\quad,\quad m_2 = 0\quad,\quad m_3 = \pm\varepsilon\sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\quad,\quad \mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C},$$

e le condizioni iniziali del moto tali che:

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C) = 0;$$

3° *che l'ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione intorno all'asse dei moti interni;*

4° *che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera.*

Negli ultimi due casi le condizioni iniziali del moto possono essere qualunque.

Esclusi questi casi ora discussi, la forza viva del sistema varierà col tempo; e per conseguenza onde mantenere stazionarii i moti interni occorreranno delle forze interne; o in altri termini se non esistessero queste forze i moti interni cesserebbero di essere stazionarii. Dunque, come i moti interni alterano il moto d'insieme del sistema, così il moto d'insieme tende ad alterare i moti interni.

Nel caso in cui i moti interni sono stazionari è facile calcolare la forza viva T del sistema in funzione del tempo giovandosi delle formule che abbiamo dato nelle Memorie precedenti.

Abbiamo trovato (4):

$$p = m_1 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4}$$

$$q = m_2 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4}$$

$$r = m_3 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 + C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4},$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i \left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

in cui per simmetria si è sostituito σ_4 a σ. Abbiamo ora:

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

$$= \frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^3}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda - C} = -2h\lambda_i + K_1,$$

giacché le λ_i sono le radici dell'equazione (5):

$$\frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} + 2h\lambda_i - K_1 = 0,$$

(4) *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* «Atti della R. Accad. di Torino», 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129–140].

(5) *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* «Atti R. Acc. di Torino», 3 marzo, 1895 (vedi § 2). [In questo vol.: VII, pp. 113–121].

quindi [6] poiché:

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2,$$

sarà:

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h,$$

e per conseguenza:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4 M_i \left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} - 2h.$$

Dunque, poiché:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h,$$

si avrà:

$$T = K^2 \frac{\Sigma \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\Sigma M_i \sigma_i} - h + T_0.$$

4. Procediamo ora alla ricerca delle alterazioni prodotte nei moti interni dal moto d'insieme del sistema quando manchino le forze interne capaci di conservarli stazionarii.

Per fissare le idee immaginiamo dapprima un caso particolare, e cioè che i moti interni consistano nel moto di rotazione di un toro di rivoluzione omogeneo attorno al proprio asse fisso nell'interno del corpo. Chiamiamo ω la velocità angolare di rotazione; α, β, γ i coseni degli angoli che l'asse del toro forma con gli assi ξ, η, ζ; μ il momento d'inerzia del toro rispetto al proprio asse. Le componenti nelle direzioni ξ, η, ζ della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni saranno:

$$m_1 = \mu\omega\alpha \quad , \quad m_2 = \mu\omega\beta \quad , \quad m_3 = \mu\omega\gamma,$$

mentre la forza viva dei moti interni sarà:

$$T_0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Quindi la forza viva totale del sistema, la cui forma e distribuzione di densità non si altererà, verrà data da [vedi (1)]:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Se ammettiamo che nessuna forza esterna si eserciti sopra il sistema, le equazioni del moto risulteranno [7]:

(6) Ibid, § 2.

(7) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. « Atti R. Acc. di Torino », 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112]. Vedi le equazioni (6).

$$(2') \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + \mu\omega(q\gamma - r\beta) + \mu\alpha\dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + \mu\omega(r\alpha - p\gamma) + \mu\beta\dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + \mu\omega(p\beta - q\alpha) + \mu\gamma\dfrac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ammettiamo ora che il toro di rivoluzione nella rotazione attorno al proprio asse non sia sollecitato da alcuna forza.

Avremo allora pel principio delle forze vive:

$$(1') \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 = \text{cost.}$$

Abbiamo dunque ottenute quattro equazioni: le (2') e (1'), ove compariscono come funzioni incognite p, q, r, ω. Di queste quantità le prime tre individueranno il moto d'insieme del sistema, e l'ultima individuerà il moto interno.

Derivando la (1') rispetto a t otterremo:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt}\right)$$
$$+ \mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \mu\omega\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Moltiplicando le (2') per p, q, r rispettivamente, e sommando avremo:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu(p\alpha + q\beta + r\gamma)\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

quindi:

$$\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

e integrando:

$$(5) \qquad \alpha p + \beta q + \gamma r + \omega = \text{cost.}$$

Esiste dunque una relazione lineare a coefficienti costanti fra p, q, r ed ω. Eliminando ω nelle (2') mediante questa relazione, otterremo tre equazioni differenziali in p, q, r dalle quali potremo determinare queste quantità; e quindi dalla (5) ricaveremo ω. Ora è facile vedere che in questo caso il problema si riconduce alle quadrature e può risolversi mediante funzioni ellittiche. Infatti, oltre l'integrale (1'), le (2') ammettono l'integrale delle aree dato da [8]:

$$(Ap + \mu\omega\alpha)^2 + (Bq + \mu\omega\beta)^2 + (Cr + \mu\omega\gamma)^2 = \text{cost.}$$

Se in (1') e nella equazione precedente sostituiamo ad ω il valore ricavato dalla (5) i primi membri di questi due integrali diventano funzioni di 2° grado in p, q, r, e perciò queste quantità potranno esprimersi come funzioni ellittiche di un parametro che si otterrà espresso mediante il tempo con una

(8) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. «Atti R. Acc. di Torino», 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112].

quadratura [9]; e dalla (5) segue che anche ω sarà suscettibile di una analoga espressione. Noi non staremo ad approfondire la soluzione di questo caso particolare seguendo questa via, giacché potremo ottenere la soluzione, anche più semplicemente, nel caso generale, per altro mezzo.

5. Il caso che abbiamo esaminato di un toro di risoluzione girevole attorno al proprio asse non è altro che il caso tipo di un *sistema monociclico* di HELMHOLTZ [10] in cui ω rappresenta l'intensità ciclica del sistema [11]. Quindi l'analisi fatta nel paragrafo precedente è evidentemente estensibile senz'altro al caso della rotazione di un corpo nel cui interno esiste un sistema monociclico i cui parametri si suppongono costanti.

Ma immaginiamo in generale di avere un corpo girevole attorno al proprio baricentro nel cui interno esista un *sistema policiclico* qualunque. Siano $p_1, p_2, \cdots, p_n$ le coordinate cicliche del sistema; $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3 \cdots, \tilde{\omega}_m$ ne siano i parametri. La forza viva dei moti interni si potrà prendere allora sotto la forma:

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_i^{n}{}_{1} \sum_s^{n}{}_{1} a_{is} \frac{dp_i}{dt} \frac{dp_s}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s ,$$

chiamando $\omega_i = dp_i/dt$ le intensità cicliche del sistema. Nella precedente espressione dovremo ritenere che la a_{is} siano funzioni dei soli parametri $\tilde{\omega}_h$. Le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni saranno della forma:

$$(6) \quad \begin{cases} m_1 = \sum_{1}^{n}{}_i a_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_{1}^{m}{}_h e_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i a_i \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h e_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_2 = \sum_{1}^{n}{}_i b_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_{1}^{m}{}_h f_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i b_i \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h f_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_3 = \sum_{1}^{n}{}_i c_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_{1}^{m}{}_h g_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i c_i \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h g_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} , \end{cases}$$

in cui a_i, b_i, c_i; e_h, f_h, g_h sono funzioni dei soli parametri $\tilde{\omega}_r$, dei quali parametri potremo ammettere anche che siano funzioni i momenti d'inerzia A, B, C ed i momenti misti D, E, F.

La forza viva del sistema risulterà dunque:

$$(7) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ m_1 p + m_2 q + m_3 r + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s .$$

Uno spostamento virtuale sarà individuato dalle componenti $\delta\tilde{\omega}, \delta\chi, \delta\rho$ di una rotazione infinitesima e dalle δp_i e $\delta\tilde{\omega}_i$.

(9) Cfr. la Nota: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* «Atti R. Acc. di Torino», 3 marzo, 1895. [In questo vol.: VII, pp. 113–121].

(10) «Crelle's Journal», vol. 97, 1884, pp. 111 e 317.

(11) Vedi HERTZ, *Die prinzipien der Mechanik.* Vol. II, Abschnitt 5.

Poniamo il lavoro virtuale delle forze interne ed esterne agenti sul sistema sotto la forma:

$$U = M_\xi \delta\tilde{\omega} + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho + \sum_i{}_1^n P_i \delta p_i + \sum_h{}_1^m \Pi_h \delta\tilde{\omega}_h .$$

Chiameremo M_ξ, M_η, M_ζ le componenti della coppia di rotazione; P_i le forze relative alle coordinate cicliche p_i, e Π_h le forze relative ai parametri $\tilde{\omega}_h$.

Note relazioni cinematiche ci dànno:

$$\delta p = \frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi$$

$$\delta q = \frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho$$

$$\delta r = \frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega},$$

onde l'applicazione del principio di HAMILTON ci condurrà all'equazione:

$$\begin{aligned} o = \int_{t_0}^{t}(\delta T + U)\,dt = \int_{t_0}^{t}\Big\{ & \frac{\partial T}{\partial p}\Big(\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi\Big) + \frac{\partial T}{\partial q}\Big(\frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho\Big) \\ & + \frac{\partial T}{\partial r}\Big(\frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega}\Big) + \sum_1^n (a_i p + b_i q + c_i r + \Sigma_s a_{is}\,\omega_s)\frac{d}{dt}\delta p_i \\ & + \sum_h{}_1^m (e_h p + f_h q + g_h r)\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega}_h + \sum_h{}_1^m \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h + M_\xi\delta\tilde{\omega} + M_\eta\delta\chi + M_\zeta\delta\rho \\ & + \sum_i{}_1^n P_i\,\delta p_i + \sum_h{}_1^m \Pi_h\,\delta\tilde{\omega}_h\Big\}\,dt, \end{aligned}$$

in cui dovremo supporre nulli $\delta\tilde{\omega}$, $\delta\chi$, $\delta\rho$, δp_i, $\delta\tilde{\omega}_h$ ai tempi estremi t_0 e t_1.

Mediante integrazioni per parti avremo le equazioni:

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta \\ & \frac{d}{dt}\Big(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_s{}_1^n a_{is}\,\omega_s\Big) = P_i \\ & \frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h} = \Pi_h, \end{aligned}\right.$$

le quali ci individuano il moto del sistema.

6. Supponiamo nulla la coppia di rotazione. In tale ipotesi moltiplicando le prime tre equazioni per $\partial T/\partial p$, $\partial T/\partial q$, $\partial T/\partial r$ e sommando avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = o,$$

ed integrando:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2=K^2. \tag{8}$$

Se ora immaginiamo una terna di assi x, y, z fissi nello spazio e rappresentiamo colla seguente tabella i coseni di direzione che essi formano con gli assi x, y, z

	ξ	η	ζ
x	α_1,	α_2,	α_3
y	β_1,	β_2,	β_3
z	γ_1,	γ_2,	γ_3

dalle prime tre equazioni (a) seguirà, applicando le formule del POISSON,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

onde integrando avremo:

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.}$$
$$\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.}$$
$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.},$$

i quali sono gli integrali delle aree e da cui si deduce immediatamente l'integrale (8).

Supponendo di scegliere per piano invariabile il piano x, y nelle equazioni precedenti si annulleranno le due prime costanti e la terza si ridurrà eguale a K, onde:

$$\gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial p} \quad , \quad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial q} \quad , \quad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{9}$$

Dalle (a) segue:

$$p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^{\nu}{}_i\,\omega_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$
$$+\sum_1^m{}_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}\frac{d}{dt}(e_h p+f_h q+g_h r)-\sum_1^m{}_h\frac{\partial T}{\partial\bar\omega_h}\frac{d\bar\omega_h}{dt}$$
$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}{}_i P_i\omega_i+\sum_1^m{}_h\Pi_h\frac{d\bar\omega_h}{dt},$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left\{p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^{\nu}{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{d\omega_i}+p\sum_1^m{}_h e_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}+q\sum_1^m f_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}+r\sum_1^m g_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}\right\}-$$

$$-\left\{\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_1^\nu{}_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}+\sum_1^m{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial\tilde\omega_h}\frac{d\tilde\omega_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\tilde\omega_h}{dt^2}\right]\right\}$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^\nu{}_i P_i\omega_i+\sum_1^m\Pi_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}.$$

Ora si ha:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_1^n\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}$$

$$+\sum_1^m{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial\tilde\omega_h}\frac{d\tilde\omega_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\tilde\omega_h}{dt^2}\right]$$

$$2T=p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^n{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}+p\Sigma_h e_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}+q\Sigma_h f_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}+r\Sigma_h g_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt},$$

quindi l'equazione precedente diverrà:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^\nu P_i\omega_i+\sum_1^m\Pi_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}-\sum_{\nu+1}^n\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}.$$

Ammettiamo che le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \cdots, \omega_n$ si conservino costanti, avremo allora:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^\nu P_i\omega_i+\sum_1^m{}_h\Pi_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}.$$

Se esiste la *funzione delle forze* Φ del sistema ciclico [12], sarà

$$\sum_1^m{}_h\Pi_h\frac{d\tilde\omega_h}{dt}=\frac{d\Phi}{dt},$$

quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^\nu{}_i P_i\omega_i+\frac{d\Phi}{dt}.$$

Moltiplicando per dt e integrando, avremo:

$$(10)\qquad T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}=\int^t(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\sum_1^\nu{}_i\int^t P_i\omega_i\,dt+\Phi+h,$$

denotando con h una costante. Se i moti interni sono *isociclici*, cioè tutte le intensità cicliche sono costanti, l'integrale precedente diverrà:

$$(10')\qquad T-\sum_1^n{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}=\int^t(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\Phi+h,$$

mentre se nessuna delle ω_i è costante sarà:

$$(10'')\qquad T=\int^t(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\sum_1^n\int^t P_i\omega_i\,dt+\Phi+h.$$

(12) Vedi HERTZ, op. cit., p. 240.

7. Il caso più importante da esaminarsi è quello in cui le forze relative alle coordinate cicliche sono nulle. Supponendosi infatti $P_i = 0$, avremo:

$$\frac{d}{dt}(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s) = 0\,,$$

ed integrando:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s = K_i\,, \tag{11}$$

in cui K_i denotano delle costanti.

Mediante gli integrali ora ottenuti potremo eliminare le intensità cicliche del sistema. Siano A_{is} i rapporti degli elementi aggiunti alle $a_{is} = a_{si}$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

al determinante stesso.

Dalle equazioni precedenti seguirà:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_{1}^{n} a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r \tag{12}$$

$$\omega_i = \Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s\,, \tag{13}$$

quindi:

$$2\,T_0 = \Sigma_i \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i}\,\omega_i$$

$$= \Sigma_i (K_i - a_i p - b_i q - c_i r)\,(\Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s).$$

Si ponga:

$$a = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, a_i a_s \quad , \quad b = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, b_i b_s \quad , \quad c = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, c_i c_s$$

$$d = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, c_i b_s \quad , \quad e = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, a_i c_s \quad , \quad f = \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, b_i a_s\,,$$

avremo allora:

$$T_0 = \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2\,fpq) - p\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s$$

$$- q\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s - r\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s + \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\,.$$

Dalle (6) segue:

$$\left\{\begin{aligned} m_1 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s - ap - fq - er + \sum_{1}^{m}{}_h e_h \frac{d\bar{\omega}_h}{dt} \\ m_2 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s - fp - bq - dr + \sum_{1}^{m}{}_h f_h \frac{d\bar{\omega}_h}{dt} \\ m_3 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s - ep - dq - cr + \sum_{1}^{m}{}_h g_h \frac{d\bar{\omega}_h}{dt} \end{aligned}\right.$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = -(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq)$$
$$+ p\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s + q\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s + r\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s$$
$$+ p \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

e finalmente:

$$(\mathrm{T}) = \frac{1}{2} \{(A - a) p^2 + (B - b) q^2 + (C - c) r^2$$
$$- 2(D + d) qr - 2(E + e) rp - 2(F + f) pq\}$$
$$+ p \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s.$$

Noi scriviamo qui (T) invece di T per denotare la espressione della forza viva in cui furono eliminate le intensità cicliche del sistema.

Cerchiamo ora come si trasformano le equazioni (*a*) per la eliminazione delle stesse quantità.

A tal fine osserviamo che si ha:

$$\delta \mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} \delta r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} \delta\omega_i + \sum_1^m{}_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tilde{\omega}_h} \delta\tilde{\omega}_h,$$

supponendo nulle le $\delta(d\tilde{\omega}_h/dt)$. Ora a cagione delle (11) segue:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} = K_i,$$

e per le (13):

$$\delta\omega_i = \sum_1^m{}_h \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s] \delta\tilde{\omega}_h$$
$$- \Sigma_s A_{is} a_s \cdot \delta p - \Sigma_s A_{is} b_s \cdot \delta q - \Sigma_s A_{is} c_s \cdot \delta r.$$

Quindi, posto:

$$\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s = l_1 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s = l_2 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s = l_3,$$

avremo:

$$\Sigma_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} \delta\omega_i = \Sigma_h \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r] \delta\tilde{\omega}_h$$
$$- l_1 \delta p - l_2 \delta q - l_3 \delta r,$$

e perciò:

$$\delta \mathrm{T} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - l_1\right) \delta p + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} - l_2\right) \delta q + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - l_3\right) \delta r$$
$$+ \sum_1^m{}_h \left\{ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tilde{\omega}_h} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r] \right\} \delta\tilde{\omega}_h.$$

Abbiamo ora:

$$\delta(\mathrm{T}) = \frac{\partial(\mathrm{T})}{\partial p} \delta p + \frac{\partial(\mathrm{T})}{\partial q} \delta q + \frac{\partial(\mathrm{T})}{\partial r} \delta r + \sum_1^m{}_h \frac{\partial(\mathrm{T})}{\partial \tilde{\omega}_h} \delta\tilde{\omega}_h,$$

quindi confrontando le due precedenti espressioni differenziali troveremo:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \dfrac{\partial \{(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\}}{\partial \tilde{\omega}_h} . \end{cases}$$

Le (*a*) dunque divengono, mediante la eliminazione delle intensità cicliche del sistema,

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) + q\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) - r\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) = M_\xi \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) + r\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) - p\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) = M_\eta \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) + p\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) - q\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) = M_\zeta \\ \qquad \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h}\{(T) + l_1 p + l_3 q + l_2 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\} = \Pi_h . \end{cases}$$

Queste equazioni possono mettersi ancora sotto una forma più simmetrica. Si ponga perciò:

$$(15)\qquad \Theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s$$

$$= \frac{1}{2}\{(A - a)p^2 + (B - b)q^2 + (C - c)r^2 - 2(D + d)qr - 2(E + e)rp - 2(F + f)pq\}$$

$$+ p\left(l_1 + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) + q\left(l_2 + \sum_1^m {}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) + r\left(l_3 + \sum_1^m {}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s .$$

Le (14) potranno scriversi:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Theta}{\partial p} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Theta}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}_h} ,$$

quindi le (*b*) assumeranno la forma:

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} + q\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} - r\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} + r\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} - p\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} + p\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} - q\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta \\ \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \dfrac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}_h} = \Pi_h . \end{cases}$$

8. Supponiamo ora che i parametri del sistema ciclico possano ritenersi costanti, allora spariscono le ultime fra le equazioni precedenti e potrà prendersi:

$$(16)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\} + l_1 p + l_2 q + l_3 r\,,$$

in cui i coefficienti dei termini di 1° e 2° grado in p, q, r saranno costanti. Le equazioni (c) corrispondono quindi in questo caso al moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii, ammettendo che il sistema abbia per momenti d'inerzia rispetto agli assi ξ, η, ζ

$$A-a \quad , \quad B-b \quad , \quad C-c\,,$$

per momenti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η

$$D+d \quad , \quad E+e \quad , \quad F+f\,,$$

e le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni siano:

$$l_1 \quad , \quad l_2 \quad , \quad l_3\,.$$

Avremo dunque il teorema:

Un corpo, di cui è costante la forma e la distribuzione di densità, nell'interno del quale esiste un sistema policiclico i cui parametri possono ritenersi invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota, sotto l'azione di una coppia motrice, attorno ad un punto fisso, come un altro corpo in cui esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.

Da questo teorema segue che, *se la coppia motrice è nulla, potremo esprimere le componenti della rotazione e le intensità cicliche del sistema come funzioni ellittiche del tempo e potremo esprimere i nove coseni degli angoli che gli assi mobili formano con gli assi fissi mediante funzioni uniformi del tempo* (13).

Quando la coppia motrice è nulla la soluzione del problema può dunque ottenersi riconducendola a quella già eseguita del moto di un sistema in cui esistono moti stazionarii. Senonché, volendo operare in questo modo, dovremmo prima ricondurre le equazioni differenziali alla forma (a) della mia Nota: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (14) e poi dovremmo eseguirne direttamente la integrazione. È facile però vedere che la soluzione può ottenersi con maggiore facilità.

Le (c) infatti prendono la forma:

(13) Vedi la Nota: *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* « Atti R. Acc. di Torino », 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129-140].

(14) « Atti R. Acc. di Torino », 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108-112].

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&(A-a)\frac{dp}{dt}-(F+f)\frac{dq}{dt}-(E+e)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_2, \varphi_3\\ q\ , r\end{vmatrix}\\
&-(F+f)\frac{dp}{dt}+(B-b)\frac{dq}{dt}-(D+d)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_3, \varphi_1\\ r\ , p\end{vmatrix}\\
&-(E+e)\frac{dp}{dt}-(D+d)\frac{dq}{dt}+(C-c)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_1, \varphi_2\\ p\ , q\end{vmatrix},
\end{aligned}\right.
$$

avendo posto:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= (A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1\\
\varphi_2 &= -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2\\
\varphi_3 &= -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3 .
\end{aligned}
$$

Risolvendo le (17) rispetto a $dp/dt, dq/dt, dr/dt$ otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix}\varphi_2, \varphi_3\\ q\ , r\end{vmatrix}\begin{vmatrix}B-b\ , & -(D+d)\\ -(D+d), & C-c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_3, \varphi_1\\ r\ , p\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(D+d), & C-c\\ -(F+f), & -(E+e)\end{vmatrix}\right.\\
&\qquad\left.+\begin{vmatrix}\varphi_1, \varphi_2\\ p\ , q\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(F+f), & -(E+e)\\ B-b\ , & -(D+d)\end{vmatrix}\right\}\\
&= \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{Vmatrix}\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\\ p\ , q\ , r\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-(F+f), & B-b\ , & -(D+d)\\ -(E+e), & -(D+d), & C-c\end{Vmatrix}\right\}\\
&= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}-(F+f)\varphi_1+(B-b)\varphi_2-(D+d)\varphi_3, & -(E+e)\varphi_1-(D+d)\varphi_2+(C-c)\varphi_3\\ -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r, & -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial q}, & \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\\ -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r, & -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r\end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

in cui si è preso:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}A-a\ , & -(F+f)\ , & -(E+e)\\ -(F+f)\ , & B-b\ , & -(D+d)\\ -(E+e)\ , & -(D+d)\ , & C-c\end{vmatrix}.
$$

In modo analogo si ottengono $dq/dt, dr/dt$, per cui ponendo:

$$
(18)\qquad \left\{
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\{[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1]^2\\
&\quad+[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2]^2\\
&\quad+[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3]^2\}\\
F_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\{(A-a)p^2+(B-b)q^2+(C-c)r^2\\
&\quad-2(D+d)qr-2(E+e)rp-2(F+f)pq\},
\end{aligned}\right.
$$

le (17) si trasformeranno nelle equazioni seguenti:

$$(19)\qquad \frac{dp}{dt}=\frac{d(F_1,F_2)}{d(q,r)}\quad,\quad \frac{dq}{dt}=\frac{d(F_1,F_2)}{d(r,p)}\quad,\quad \frac{dr}{dt}=\frac{d(F_1,F_2)}{d(p,q)}\,,$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una precedente Memoria nella quale essa fu ricondotta a dipendere dalla risoluzione di una equazione del quarto grado [15].

Questa equazione nel nostro caso si costruisce immediatamente partendo dalla (12) della Memoria ora citata. In tal modo otterremo le componenti della rotazione del sistema e tutte le intensità cicliche espresse mediante funzioni ellittiche dalle formule seguenti:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{N_1^{(1)}\sigma_1 u + N_1^{(2)}\sigma_2 u + N_1^{(3)}\sigma_3 u + N_1^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u} \\ q &= \frac{N_2^{(1)}\sigma_1 u + N_2^{(2)}\sigma_2 u + N_2^{(3)}\sigma_3 u + N_2^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u} \\ r &= \frac{N_3^{(1)}\sigma_1 u + N_3^{(2)}\sigma_2 u + N_3^{(3)}\sigma_3 u + N_3^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u} \\ \omega_i &= \frac{L_i^{(1)}\sigma_1 u + L_i^{(2)}\sigma_2 u + L_i^{(3)}\sigma_3 u + L_i^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}\,, \end{aligned}\right.$$

in cui le $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sono quantità costanti. Introducendo le quantità $\alpha_{ir}^{(h)}$ usate nella Memoria ora citata, avremo:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} N_i^{(h)} &= M^{(h)}\cdot\frac{\alpha_{i4}^{(h)}}{\alpha_{44}^{(h)}} \\ L_i^{(h)} &= M^{(h)}\cdot\frac{\Sigma_s\left(-a_s\alpha_{14}^{(h)} - b_s\alpha_{24}^{(h)} - c_s\alpha_{34}^{(h)} + K_s\alpha_{44}^{(h)}\right)A_{is}}{\alpha_{44}^{(h)}}\,. \end{aligned}\right.$$

La u sarà legata al tempo t dalla relazione lineare:

$$(22)\qquad u=\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)}{(e_1-e_3)D}}\,(t-t_0)\,,$$

essendo t_0 una costante arbitraria e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ le radici della equazione di quarto grado.

Per ottenere i coseni di direzione che gli assi fissi formano con quelli mobili, basterà cominciare dal determinare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mediante le (9) le quali nel nostro caso si riducono a

(15) Vedi: *Sopra un sistema di equazioni differenziali*. «Atti R. Accadem. di Torino», 31 marzo, 1895. [In questo vol.: VIII, pp. 122-128].

$$
(23) \quad \left\{
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{K}[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1]\\
\gamma_2 &= \frac{1}{K}[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2]\\
\gamma_3 &= \frac{1}{K}[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3],
\end{aligned}
\right.
$$

e quindi, applicando il metodo indicato nella mia Nota: *Un teorema sulla rotazione, ecc.* [16], otterremo le espressioni dei rimanenti sei coseni.

9. Il caso che abbiamo trattato nelle Memorie precedenti corrisponde a quello in cui i parametri del sistema ciclico e le intensità cicliche sono costanti. Infatti quando ambedue queste condizioni sono soddisfatte i moti interni sono evidentemente stazionarii. Il detto caso corrisponde quindi a quello in cui il moto interno è *isociclico*.

Nel caso trattato nel paragrafo precedente le intensità cicliche sono variabili, ma sono nulle tutte le forze, tanto la coppia di rotazione, quanto le forze relative alle coordinate cicliche. Questo moto possiamo chiamarlo un moto *adiabatico* dell'intero sistema; non però un moto adiabatico pel sistema ciclico. Infatti esaminando il moto ciclico relativo agli assi ξ, η, ζ abbiamo che i momenti ciclici sono dati da:

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r\,,$$

e quindi non sono costanti ma variano linearmente rispetto alle componenti della rotazione del sistema [17].

In ambedue i casi in cui, essendo costanti i parametri, il moto dell'intero sistema è isociclico o adiabatico, abbiamo ottenuto la soluzione per mezzo di funzioni ellittiche.

Noi vogliamo ora trattare un caso che li comprende ambedue e in cui pure la soluzione può ottenersi nella stessa maniera.

Ritorniamo perciò alle equazioni generali (a) e supponiamo che non tutte le forze relative alle coordinate cicliche, ma solo le prime ν siano nulle.

Allora avremo soltanto ν integrali della forma (11), cioè quelli che corrispondono agli indici $i = 1, 2, \cdots, \nu$. Se poniamo:

$$v_i = \sum_{\nu+1}^n {}_r\, a_{ir}\,\omega_r\,,$$

essi potranno scriversi:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^\nu {}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i - v_i\,.$$

(16) «Atti R. Acc. di Torino», 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129-140].
(17) Cfr. Hertz, op. cit., sopra, p. 239.

Denotiamo con A'_{is} gli elementi aggiunti a quelli del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & , & a_{12} & , \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & , & a_{22} & , \ldots & a_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1} & , & a_{\nu 2} & , \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

avremo:

$$\omega_i = -p \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, a_s - q \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, b_s - r \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, c_s + \sum_{1}^{\nu}{}_s A_{is}\,(K_i - v_i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots \nu),$$

e mediante queste formule potremo eliminare dalle equazioni del moto le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$. A tal fine basterà ripetere un calcolo analogo a quello fatto precedentemente.

Se poniamo:

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{\nu+1}^{n}{}_r \sum_{\nu+1}^{n}{}_s a_{rs}\, \omega_r\, \omega_s,$$

avremo:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s a_{is}\, \omega_i\, \omega_s + \sum_{1}^{\nu} v_i\, \omega_i + \tau,$$

quindi eliminando le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ otterremo:

$$T_0 = \frac{1}{2}(a' p^2 + b' q^2 + c' r^2 + 2 d' qr + 2 e' rp + 2 f' pq) - p \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, a_i\, K_s$$

$$- q \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, b_i\, K_s - r \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, c_i\, K_s + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A'_{is}\, K_i\, K_s - \Sigma_i \Sigma_s A'_{is}\, v_i\, v_s + \tau,$$

in cui:

$$a' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, a_i\, a_s \quad , \quad b' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, b_i\, b_s \quad , \quad c' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, c_i\, c_s$$

$$d' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, b_i\, c_s \quad , \quad e' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, c_i\, a_s \quad , \quad f' = \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, a_i\, b_s .$$

Facciamo:

$$\sum_{\nu+1}^{n}{}_r a_r\, \omega_r = m'_1 \quad , \quad \sum_{\nu+1}^{n}{}_r b_r\, \omega_r = m'_2 \quad , \quad \sum_{\nu+1}^{n}{}_r c_r\, \omega_r = m'_3,$$

resulterà:

$$m_1 = m'_1 + \sum_{1}^{\nu}{}_i a_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \quad , \quad m_2 = m'_2 + \sum_{1}^{\nu} b_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

$$m_3 = m'_3 + \sum_{1}^{\nu}{}_i c_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}.$$

Quindi dalla espressione (7) della forza viva, otterremo questa quantità in cui sono eliminate le $\omega_i \, (i = 1, 2, \cdots, \nu)$ data dalla formula:

$$(T') = \frac{1}{2} \{ (A - a') p^2 + (B - b') q^2 + (C - c') r^2$$

$$- 2 (D + d') qr - 2 (E + e') rp - 2 (F + f') pq \}$$

$$+ p \left[m'_1 - \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i v_r + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right] + q \left[m'_2 - \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_i v_s + \sum_1^m f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right]$$

$$+ r \left[m'_3 - \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} c_i v_s + \sum_1^m g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right] + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} (K_i K_s - v_i v_s) + \tau \, .$$

Calcolando ora il δT, eliminandovi le $\delta \omega_i$ ricavate dalle espressioni precedenti di ω_i, e confrontando la espressione che si ottiene con $\delta (T')$, abbiamo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial (T')}{\partial p} + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_s K_i \quad , \qquad \frac{\partial T}{q} = \frac{\partial (T')}{\partial q} + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i b_s \, ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial (T')}{\partial r} + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i c_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial (T')}{\partial \omega_r} + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i a_{sr} \qquad (r = \nu + 1, \nu + 2, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} \Bigg[(T') + p \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i a_s + q \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i b_s + r \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i c_s$$

$$- \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i (K_s - v_s) \Bigg] \, ,$$

onde ponendo:

$$\Omega = (T') + p \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i a_s + q \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i b_s + r \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i c_s$$

$$- \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} K_i (K_s - v_s) \, ,$$

avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Omega}{\partial p} \quad , \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial q} \quad , \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}_r} \qquad (r = \nu + 1, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}_h} \, ,$$

e le equazioni (a) del moto diverranno:

$$
(d)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial p}+q\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}-r\dfrac{\partial\Omega}{\partial q}=\mathrm{M}_\xi \\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial q}+r\dfrac{\partial\Omega}{\partial p}-p\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}=\mathrm{M}_\eta \\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}+p\dfrac{\partial\Omega}{\partial q}-q\dfrac{\partial\Omega}{\partial p}=\mathrm{M}_\zeta \\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\left(a_r p+b_r q+c_r r+\sum_s^{n}{}_{1}\, a_{rs}\,\omega_s\right)=\mathrm{P}_r \qquad (r=\nu+1\,,\ \nu+2\,,\dots n) \\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\left(e_h p+f_h q+g_h r\right)-\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial\tilde{\omega}_h}=\Pi_h\,,
\end{cases}
$$

in cui si ha:

$$
\Omega=\frac{1}{2}\{(\mathrm{A}-a')\,p^2+(\mathrm{B}-b')\,q^2+(\mathrm{C}-c')\,r^2
-2\,(\mathrm{D}+d')\,qr-2\,(\mathrm{E}+e')\,rp-2\,(\mathrm{F}+f')\,pq\}
$$

$$
+\,p\left[m_1'+\sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s\,\mathrm{A}'_{is}\,a_i\,(\mathrm{K}_s-v_s)+\sum_{1}^{m}{}_h\,e_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]
$$

$$
+\,q\left[m_2'+\sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s\,\mathrm{A}'_{is}\,b_i\,(\mathrm{K}_s-v_s)+\sum_{1}^{m}{}_h\,f_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]
$$

$$
+\,q\left[m_3'+\sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s\,\mathrm{A}'_{is}\,a_i\,(\mathrm{K}_s-v_s)+\sum_{1}^{m}{}_h\,g_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s\,\mathrm{A}'_{is}\,(\mathrm{K}_i-v_i)\,(\mathrm{K}_s-v_s)+\tau\,,
$$

e

$$
m_1'=\sum_{\nu+1}^{n}{}_r\,a_r\,\omega_r \qquad v_i=\sum_{\nu+1}^{n}{}_r\,a_r\,\omega_r
$$

$$
m_2'=\sum_{\nu+1}^{n} b_r\,\omega_r \qquad \tau=\frac{1}{2}\sum_{\nu+1}^{n}{}_r\sum_{\nu+1}^{n}{}_s\,a_{rs}\,\omega_r\,\omega_s
$$

$$
m_3'=\sum_{\nu+1}^{n} c_r\,\omega_r\,.
$$

Se i parametri del sistema sono costanti e le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+2},\cdots,\omega_n$ sono pure costanti, allora spariscono le equazioni (d) e in Ω i coefficienti di $p\,,q\,,r\,,p^2,q^2,r^2,qr\,,rp\,,pq$ divengono costanti, onde *il teorema del* § 8 *si estende immediatamente al caso in cui sopra alcune coordinate cicliche non agisce alcuna forza e le intensità cicliche corrispondenti alle rimanenti coordinate cicliche sono costanti*.

Supponendo poi che la coppia di rotazione sia sulla rotazione si otterrà per mezzo di funzioni ellittiche; infatti le prime tre equazioni (d) si ridurranno alla forma (19):

$$
\frac{dp}{dt}=\frac{d(\mathrm{F}_1',\mathrm{F}_2')}{d(q\,,r)}\quad,\quad\frac{dq}{dt}=\frac{d(\mathrm{F}_1',\mathrm{F}_2')}{d(r\,,p)}\quad,\quad\frac{dr}{dt}=\frac{d(\mathrm{F}_1',\mathrm{F}_2')}{d(p\,,q)}\,,
$$

in cui:

$$\left\{\begin{aligned} F'_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}}\{[(A-a')p-(F+f')q-(E+e')r+l'_1]^2 \\ &\quad +[-(F+f')p+(B-b')q-(D+d')r+l'_2]^2 \\ &\quad +[-(E+e')p-(D+d')q-(C-c')r+l'_3]^2\} \\ F'_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}}\{(A-a')p^2+(B-b')q^2+(C-c')r^2 \\ &\quad -2(D+d')qr-2(E+e')rp-2(F+f')pq\}, \end{aligned}\right.$$

essendo:

$$l'_1 = m'_1 + \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, a_i (K_s - v_s)$$

$$l'_2 = m'_2 + \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, b_i (K_s - v_s)$$

$$l'_3 = m'_3 + \sum_{1}^{\nu}{}_i \sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is}\, c_i (K_s - v_s)$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A-a', & -(F+f'), & -(E+e') \\ -(F+f'), & B-b', & -(D+d'), \\ -(E+e'), & -(D+d'), & C-c' \end{vmatrix}$$

quindi $p, q, r;\ \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ assumeranno la forma (20). Per ottenere le forze $P_{\nu+1}, \cdots, P_n$ che conservano costanti le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \cdots, \omega_n$, basterà ricorrere alla formula:

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{d}{dt}\left(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{rs}\omega_s\right) = \frac{d}{dt}\left(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_{1}^{\nu}{}_i a_{ri}\omega_i\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{a_r p + b_r q + c_r r + \sum_{1}^{\nu}{}_i a_{ri}\left(-p\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_s - q\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} b_s - r\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} c_s\right)\right\} \\ &= \left(a_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} a_s\right)\frac{dp}{dt} + \left(b_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} b_s\right)\frac{dq}{dt} + \left(c_r - \sum_{1}^{\nu} A'_{is} c_{ri} c_s\right)\frac{dr}{dt} \\ &= \left(a_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} a_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(q, r)} + \left(b_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} b_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(r, p)} \\ &\quad + \left(c_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} c_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(p, q)}. \end{aligned}$$

Poniamo perciò:

$$\begin{aligned} F_0^{(r)} &= \left(a_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} a_s\right)p + \left(b_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} b_s\right)q \\ &\quad + \left(c_r - \sum_{1}^{\nu}{}_i\sum_{1}^{\nu}{}_s A'_{is} a_{ri} c_s\right)r, \end{aligned}$$

e avremo:

$$P_r = \frac{d(F_0^{(r)}, F_1', F_2')}{d(p, q, r)} \qquad (r = \nu + 1, \nu + 2, \cdots n),$$

quindi anche le forze P_r si esprimeranno mediante funzioni ellittiche del tempo.

Lugano, 8 agosto 1895.

NOTA

Dopo ultimato il precedente lavoro nell'agosto scorso, ebbi conoscenza di una Memoria del prof. BELTRAMI presentata al Reale Istituto Lombardo nell'adunanza del 20 giugno, la quale contiene delle osservazioni altrettanto importanti e profonde quanto ne è elegante e limpida la esposizione. Il prof. BELTRAMI si propone in essa lo scopo di porre in luce la importanza che ha nella dinamica l'impiego diretto di quella espressione del principio fondamentale di LAGRANGE che ordinariamente si chiama la equazione simbolica del moto. Questa equazione è suscettibile di trasformarsi in modo da potersi mettere in riscontro colle varie forme sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica, quali la lagrangiana e la hamiltoniana, ed anche con un tipo intermedio fra i due che il prof. BELTRAMI pone in evidenza. Una applicazione di ciò dà l'illustre Autore ottenendo quella che potrebbe chiamarsi la equazione simbolica corrispondente alle equazioni di THOMSON e TAIT. Mi permetto qui di ricavare dalla equazione simbolica $(5)_c$ del BELTRAMI il teorema che riconduce ad un moto isociclico il moto adiabatico di un sistema in cui sussistono moti ciclici. Perciò ammetterò che il lettore abbia presenti le notazioni ed i simboli usati dal prof. BELTRAMI.

Si supponga che il sistema sia girevole attorno ad un punto fisso e che si scelgano, come prime fra le coordinate che individuano la configurazione del sistema, tre variabili q_1, q_2, q_3 che determinino la posizione degli assi mobili rispetto ad assi fissi (per esempio i tre angoli di EULERO), mentre le successive coordinate indipendenti del sistema siano cicliche e tali da individuare il moto del sistema relativamente ai detti assi mobili. Le forze corrispondenti alle coordinate cicliche siano nulle. Quindi nel nostro caso le tre prime variabili indipendenti sarebbero le q del BELTRAMI, mentre le r' sarebbero le nostre ω_i. Nelle dette ipotesi l'equazione simbolica del BELTRAMI assume la forma:

$$\delta L = \delta U - \left(\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i'} \partial q_i\right)',$$

in cui si ha:

$$-U = T_q - \mathbf{T}_\lambda - \mathbf{T}_\varrho - \Sigma \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho .$$

In questa equazione per T_q deve prendersi la forza viva dovuta al moto di trascinamento degli assi mobili, cioè:

$$T_q = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

le λ debbono essere sostituite da:

$$a_i p + b_i q + c_i r,$$

e $\mathbf{T}$ deve essere la forma reciproca della

$$T_r = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s ,$$

vale a dire la forma:

$$\frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} \Omega_i \Omega_s ,$$

onde:

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} (a_i p + b_i q + c_i r)(a_s p + b_s q + c_s r)$$

$$= \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq) .$$

Quindi, sempre adottando le nozioni del prof. BETRAMI,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}[(A - a)p^2 + (B - b)q^2 + (C - c)r^2 - 2(D + d)qr - 2(E + e)rp - 2(F + f)pq]$$

$$- \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s ,$$

giacché le costanti K_i sostituiscono nel nostro caso le costanti ρ del BELTRAMI.

Quanto a $\mathbf{V}$ avremo:

$$\mathbf{V} = \Sigma \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho = \Sigma_i \Sigma_s A_{si} (a_i p + b_i q + c_i r) K_s$$

$$= p\Sigma_i \Sigma_s A_{is} a_i K_s + q\Sigma_i \Sigma_s A_{is} b_i K_s + r\Sigma_i \Sigma_s A_{is} c_i K_s$$

$$= l_1 p + l_2 q + l_3 r ,$$

onde:

$$- U = \frac{1}{2}[(A - a)p^2 + (B - b)q^2 + (C - c)r^2 - 2(D + d)qr - 2(E + e)rp - 2(F + f)pq]$$

$$+ l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s .$$

All'infuori dunque del termine costante $(1/2)\Sigma_i \Sigma_s A_{si} K_i K_s$, la U del BELTRAMI coincide colla Θ della precedente Memoria. Noi potremo dunque dire che:

$$\delta L = \left(\sum_1^3 \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}\delta q_i\right)' - \delta\Theta , \tag{1}$$

è la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti ciclici, quando son nulle le forze relative alle coordinate cicliche e i parametri sono costanti.

La precedente equazione ci conduce facilmente al teorema della Memoria precedente che abbiamo sopra ricordato, osservando che essa può interpretarsi come la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti isociclici. Il teorema risulta così dimostrato in un altro modo: le operazioni fatte nella precedente Memoria per giungervi furono eseguite sopra equazioni aventi il tipo che può chiamarsi di LAGRANGE–LIOUVILLE, mentre invece le trasformazioni ora eseguite valendosi del metodo del prof. BELTRAMI furono direttamente applicate sopra la equazione del moto nella così detta forma simbolica.

Mostriamo ora come dall'ultima equazione scritta possano ricavarsi direttamente le equazioni del moto aventi il tipo di LAGRANGE–LIOUVILLE, anche senza ricorrere all'impiego del principio di HAMILTON. Si osservi perciò che:

$$\sum_1^3 \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}\delta q_i = \frac{\partial \Theta}{\partial p}\sum_1^3 \frac{\partial p}{\partial q'_i}\delta q_i + \frac{\partial \Theta}{\partial q}\sum_1^3 \frac{\partial q}{\partial q'_i}\delta q_i + \frac{\partial \Theta}{\partial r}\sum_1^3 \frac{\partial r}{\partial q'_i}\delta q_i .$$

Tenendo conto che p, q, r debbono essere lineari nelle q'_i, cioè deve aversi:

$$p = \sum_1^3 P_i q'_i \quad , \quad q = \sum_1^3 Q_i q'_i \quad , \quad r = \sum_1^3 R_i q'_i ,$$

in cui P_i, Q_i, R_i sono indipendenti dalle q'_i, e (vedi § 5):

$$\delta\varpi = \sum_1^3 P_i \delta q_i \quad , \quad \delta\chi = \sum_1^3 Q_i \delta q_i \quad , \quad \delta\rho = \sum_1^3 R_i \delta q_i ,$$

si otterrà che:

$$\delta\varpi = \sum_1^3 \frac{\partial p}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad \delta\chi = \sum_1^3 \frac{\partial q}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad \delta\rho = \sum_1^3 \frac{\partial r}{\partial q_i} \delta q_i ,$$

e perciò la (1) diverrà:

$$\delta L = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial p} \delta\varpi + \frac{\partial \Theta}{\partial q} \delta\chi + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \delta\rho \right)' - \delta\Theta ,$$

ossia, poiché:

$$\delta\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \Theta}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \delta r ,$$

potrà scriversi:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial p} \delta\varpi + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial q} \delta\chi + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \delta\rho + \frac{\partial \Theta}{\partial p} (\delta\varpi' - \delta p) + \frac{\partial \Theta}{\partial q} (\delta\chi' - \delta q) + \frac{\partial \Theta}{\partial r} (\delta\rho' - \delta r).$$

Ma (vedi § 5):

$$\delta\varpi' - \delta p = r\delta\chi - q\delta\rho \quad , \quad \delta\chi' - \delta q = p\delta\rho - r\delta\varpi \quad , \quad \delta\rho' - \delta r = q\delta\varpi - p\delta\chi ,$$

quindi:

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial p} + q \frac{\partial \Theta}{\partial r} - r \frac{\partial \Theta}{\partial q} \right) \delta\varpi + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial q} + r \frac{\partial \Theta}{\partial p} - p \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \delta\chi$$
$$+ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + p \frac{\partial \Theta}{\partial q} - q \frac{\partial \Theta}{\partial p} \right) \delta\rho ,$$

e poiché:

$$\delta L = M_\xi \delta\varpi + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho ,$$

otterremo le equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial p} + q \frac{\partial \Theta}{\partial r} - r \frac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi \\ & \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial q} + r \frac{\partial \Theta}{\partial p} - p \frac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta \\ & \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + p \frac{\partial \Theta}{\partial q} - q \frac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta , \end{aligned} \right.$$

che sono appunto del tipo LAGRANGE-LIOUVILLE.

Analogamente potrebbe operarsi nel caso trattato nel § 9.