VIII.

SOPRA UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 445-454.

1. Le equazioni differenziali del moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari appartengono al tipo di equazioni differenziali [1] (Cfr. § 5).

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} \end{aligned} \right.
$$

in cui f_1 e f_2 sono due funzioni di p, q, r ed i secondi membri rappresentano i determinanti funzionali delle funzioni stesse rispetto alle variabili $q, r; r, p; p, q$.

Esse ammettono gl'integrali

$$
(2) \qquad f_1 = \text{cost.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{cost.} = h_2
$$

come si verifica con un calcolo semplicissimo.

Si ponga

$$
(3) \qquad p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4}
$$

e si introducano le funzioni omogenee

$$
\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 \left[f_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_1 \right]
$$

$$
\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 \left[f_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_2 \right]
$$

il cui grado di omogeneità risulta eguale a due.

Avremo

$$
\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = \frac{1}{x_4^2} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}
$$

$$
\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_4^2} \frac{x_4\, dx_1 - x_1\, dx_4}{dt};
$$

(1) Vedi la mia Nota: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii*, presentata all'Acc. delle Scienze di Torino nella seduta 3 marzo 1895. [In questo volume, VII, p. 113].

quindi la prima delle (1) diverrà

(4) $$\frac{x_4\,dx_1 - x_1\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}$$

ed in modo analogo le altre due si trasformeranno nelle seguenti

(4') $$\frac{x_4\,dx_2 - x_2\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)}$$

(4'') $$\frac{x_4\,dx_3 - x_3\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)}$$

e gl'integrali (3) saranno sostituiti da

(5) $$\varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_2 = 0.$$

Prendiamo due qualunque di queste equazioni che potremo scrivere

$$\frac{x_4\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+1)}, x_{(r+2)})}$$

$$\frac{x_4\,dx_{(r+1)} - x_{(r+1)}\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+2)}, x_{(r)})}$$

in cui si ha

$$0 < (r) < 4 \quad , \quad (r) \equiv r \text{ mod. } 3.$$

Da esse segue

$$x_4 \frac{x_{(r+1)}\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r)}} \right)$$

$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r)}} \right).$$

Ora

$$x_{(r)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r)}} + x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r+2)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+2)}} + x_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} = 2\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2);$$

quindi l'equazione precedente si scriverà

$$\frac{x_{(r+1)}\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}.$$

Potremo dunque concludere: *se i_1, i_2, i_3, i_4 è una permutazione d'ordine pari dei numeri* 1, 2, 3, 4, *sussisterà la relazione*

(6) $$\frac{x_{i_2}\,dx_{i_1} - x_{i_1}\,dx_{i_2}}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})}.$$

2. Eseguiamo ora sulle variabili x_i una sostituzione lineare tale che

(7) $$x_i = \Sigma_s\, c_{is}\, \xi_s \quad , \quad \xi_s = \Sigma_i\, C_{is}\, x_i$$

e chiamiamo C il determinante delle c_{is} che supporremo diverso da zero.

Avremo

$$\begin{vmatrix} dx_{i_1}, dx_{i_2} \\ x_{i_1}, \ x_{i_2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\xi_{s_1}, d\xi_{s_2} \\ \xi_{s_1}, \ \xi_{s_2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})} = \Sigma \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})} \begin{vmatrix} C_{i_3 s_3}, C_{i_4 s_3} \\ C_{i_3 s_4}, C_{i_4 s_4} \end{vmatrix}.$$

Ma per un noto teorema sui determinanti (2)

$$\begin{vmatrix} C_{i_3 s_3}, C_{i_4 s_3} \\ C_{i_3 s_4}, C_{i_4 s_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix}$$

quindi l'equazione (6) si trasformerà nell'altra

$$\Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_2}, \xi_{s_4})}$$

da cui segue

(8) $$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}.$$

3. Si supponga che f_1 e f_2 siano due funzioni intere di secondo grado di p, q, r, cioè

(9) $$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(a_{11} p^2 + a_{22} q^2 + a_{33} r^2) + a_{23} qr + a_{31} rp \\ \qquad + a_{12} pq + a_{14} p + a_{24} q + a_{34} r + a \\ f_2 = \frac{1}{2}(b_{11} p^2 + b_{22} q^2 + b_{33} r^2) + b_{23} qr + b_{31} rp \\ \qquad + b_{12} pq + b_{14} p + b_{24} q + b_{34} r + b. \end{cases}$$

Posto

$$a - h_1 = \frac{1}{2} a_{44} \quad , \quad b - h_2 = \frac{1}{2} b_{44}$$

risulterà

(9') $$\varphi_1 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} x_i x_s \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s b_{is} x_i x_s .$$

Eseguiamo la sostituzione (7) in modo da ottenere

(10) $$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2) \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2),$$

dovremo avere allora

(11) $$\begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s b_{is} c_{ih} c_{sh} = 1 \\ \Sigma_i \Sigma_s b_{is} c_{ih} c_{sk} = 0 \end{cases} \qquad (h \gtrless k)$$

(11') $$\begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} c_{ih} c_{sh} = \lambda_h \\ \Sigma_i \Sigma_s a_{is} c_{ih} c_{sk} = 0 \end{cases}$$

(2) R. BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*. III Auflage, p. 50.

e le λ_i saranno le radici dell'equazione di quarto grado in λ

$$(12) \qquad f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13}, & a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23}, & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33}, & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41}, & a_{42} - \lambda b_{42}, & a_{43} - \lambda b_{43}, & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0$$

onde chiamando B il discriminante della forma φ_2, avremo

$$(13) \qquad f(\lambda) = \mathrm{B}\,(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

Ammetteremo che le quattro radici siano diverse fra loro.

Siano $\alpha_{r,s}$ gli elementi aggiunti a quelli del determinante (12); e denotiamo i loro valori con $\alpha_{rs}^{(i)}$ quando sostituiamo λ_i in luogo di λ. Sarà

$$\frac{c_{1s}}{\alpha_{1r}^{(s)}} = \frac{c_{2s}}{\alpha_{2r}^{(s)}} = \frac{c_{3s}}{\alpha_{3r}^{(s)}} = \frac{c_{4s}}{\alpha_{4r}^{(s)}} \sqrt{\frac{\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} c_{hs} c_{ks}}{\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hr}^{(s)} \alpha_{kr}^{(s)}}} = \theta_s.$$

Ma (3)

$$\alpha_{hr}^{(s)} \alpha_{kr}^{(s)} = \alpha_{rr}^{(s)} \alpha_{hk}^{(s)};$$

quindi in virtù della prima delle (11)

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{rr}^{(s)} \Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk}^{(s)}}}.$$

Ora dalla (12) si deduce

$$-f'(\lambda) = -\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk}$$

quindi per la (13)

$$\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk} = -f'(\lambda_s) = \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)$$

e per conseguenza

$$(14) \qquad c_{is} = \frac{\alpha_{ir}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{rr}^{(s)} \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha_{ii}^{(s)}}{\mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}.$$

Abbiamo poi dalle (11) per la regola dei prodotti dei determinanti

$$\mathrm{BC}^2 = 1,$$

d'onde

$$(14') \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

(3) R. BALTZER, op. cit., p. 54.

4. In virtù delle (10), le (8) prenderanno la forma

$$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{s_3} - \lambda_{s_4}) \xi_{s_3} \xi_{s_4}.$$

Pongasi

(15) $\xi_1 = \mu_1 \sigma_1 (u) \quad , \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2 (u) \quad , \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3 (u) \quad , \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma (u)$

si otterrà

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4 \sigma_{(r+2)} \sigma ;$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)} (\sigma'_{(r+2)} \sigma - \sigma_{(r+2)} \sigma') \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+1)}) \mu_{(r)} \mu_{(r+1)} \sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)}$$

onde applicando le note relazioni differenziali fra le σ (4)

$$\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)} = (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \sigma_{(r+2)} \sigma$$

$$\sigma'_{(r+1)} \sigma - \sigma_{(r+1)} \sigma' = - \sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)}$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \mu_{(r)} \mu_{(r+1)}$$

da cui segue

(16) $$\frac{\mu_r \mu_{(r+1)}}{\mu_4 \mu_{(r+2)}} = \frac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)}{C (e_{(r+1)} - e_{(r)})} \frac{dt}{du} = \frac{C}{(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \dfrac{dt}{du}}$$

quindi

(17) $$e_{(r+1)} - e_{(r)} = \frac{1}{C^2} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \left(\frac{dt}{du}\right)^2$$

e per conseguenza

(18) $$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Dalla (16) si deduce

$$\mu^2_{(r+2)} \frac{\mu_4}{\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} \mu_{(r+2)}} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \frac{dt}{du}$$

$$\frac{\mu^2_{(r)} \mu^2_{(r+1)}}{\mu^2_4 \mu^2_{(r+2)}} = \frac{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}{(e_{(r+1)} - e_{(r)}) (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})}$$

(4) K. Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*, p. 28.

perciò

$$\frac{\mu_{(r)}}{\sqrt{\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)}}}=\frac{\mu_{(r+1)}}{\sqrt{\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)}}}=\frac{\mu_{(r+2)}}{\sqrt{\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}}} \tag{19}$$

$$=\frac{\mu_4}{\sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}}.$$

Dalle (7) e (15) risulta

$$x_i=\Sigma_s\, c_{is}\, \mu_s\, \sigma_s$$

quindi tenendo presenti le (3), (14), (19) e togliendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore nelle espressioni di p, q, r, otterremo

$$\left\{\begin{aligned} p&=\frac{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{\mathrm{I}r}\,\sigma_r+A_{\mathrm{I}4}\,\sigma}{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma}\\ q&=\frac{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{2r}\,\sigma_r+A_{24}\,\sigma}{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma}\\ r&=\frac{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{3r}\,\sigma_r+A_{34}\,\sigma}{\sum_{\mathrm{I}}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma}\end{aligned}\right. \tag{20}$$

in cui si è posto per brevità

$$\left\{\begin{aligned} A_{i\mathrm{I}}&=\sqrt{\frac{\alpha_{ii}^{(\mathrm{I})}(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_{\mathrm{I}})(\lambda_3-\lambda_{\mathrm{I}})(\lambda_4-\lambda_{\mathrm{I}})}}\\ A_{i2}&=\sqrt{\frac{\alpha_{ii}^{(2)}(\lambda_{\mathrm{I}}-\lambda_2)}{(\lambda_{\mathrm{I}}-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\\ A_{i3}&=\sqrt{\frac{\alpha_{ii}^{(3)}(\lambda_2-\lambda_{\mathrm{I}})}{(\lambda_{\mathrm{I}}-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\\ A_{i4}&=\frac{\mathrm{I}}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}\sqrt{\alpha_{ii}^{(4)}(e_{(r+\mathrm{I})}-e_{(r)})\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+\mathrm{I})})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+\mathrm{I})})(\lambda_4-\lambda_{(r+2)})}}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Per determinare la relazione che passa fra la variabile t e l'argomento u delle σ basterà partire dalla (17): risolvendola rispetto a dt/du, integrando e tenendo conto della (14′) avremo

$$t=\sqrt{\frac{e_{(r+\mathrm{I})}-e_{(r)}}{B(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)(\lambda_{(r+\mathrm{I})}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_\circ) \tag{22}$$

in cui $u_\circ$ denota una costante arbitraria.

5. Volendo applicare questi resultati generali al caso del moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii basterà supporre (5)

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}[(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$

$$h_1 = \frac{K^2}{2\sqrt{ABC}} \quad , \quad h_2 = \frac{h}{\sqrt{ABC}}.$$

La equazione (12) si ridurrà allora a

$$\begin{vmatrix} A^2 - \lambda A & , & 0 & , & 0 & , & Am_1 \\ 0 & , & B^2 - \lambda B & , & 0 & , & Bm_2 \\ 0 & , & 0 & , & C^2 - \lambda C & , & Cm_3 \\ Am_1 & , & Bm_2 & , & Cm_3 & , & 2h\lambda - K_1 \end{vmatrix} = 0$$

in cui si è posto $K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2$.

Ammettendo le radici semplici; m_1, m_2, m_3 diversi da zero, e A, B, C differenti fra loro, avremo

$$\sqrt{\alpha_{11}^{(s)}} = \frac{\alpha_{14}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_1 \sqrt{\frac{(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}{\lambda_s - A}}$$

$$\sqrt{\alpha_{22}^{(s)}} = \frac{\alpha_{24}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_2 \sqrt{\frac{(\lambda_s - C)(\lambda_s - A)}{\lambda_s - B}}$$

$$\sqrt{\alpha_{33}^{(s)}} = \frac{\alpha_{34}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_3 \sqrt{\frac{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)}{\lambda_s - C}}$$

$$\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}} = \sqrt{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}.$$

Questi valori dovranno sostituirsi nelle (21). Sarà poi

$$B = -\frac{2h}{ABC};$$

quindi la (22) diverrà

$$t = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\,\frac{e_{(r)} - e_{(r+1)}}{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)(\lambda_{(r+1)} - \lambda_r)}}\,(u - u_0).$$

In tal modo siamo giunti ai risultati ottenuti nella Nota più volte citata, deducendoli dalla soluzione di un problema più generale di quello meccanico, e seguendo un cammino più semplice e più diretto.

(5) Vedi la mia Nota precedentemente citata.