VII.

SUL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 372–384.

1. Nella seduta del 3 febbraio scorso ebbi l'onore di comunicare all'Accademia una Nota [1] in cui ho stabilito le equazioni differenziali del moto attorno al baricentro di un sistema libero e non soggetto ad azioni esterne, nel quale sussistono moti interni stazionarii.

Tali equazioni sono le seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q = 0. \end{cases}$$

Nella stessa Nota ho dimostrato che queste equazioni ammettono i due integrali

$$(2)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

$$(3)\qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2$$

e che la loro integrazione può ridursi facilmente alle quadrature. Mi propongo ora di ottenere la effettiva determinazione delle relazioni in termini finiti che legano fra loro p, q, r, t. A tal fine osserviamo che se si potranno esprimere p, q, r come funzioni uniformi di un parametro ausiliario u, basterà sostituire queste espressioni in una delle equazioni differenziali (1) ed otterremo anche t espresso mediante il parametro u.

In luogo di p, q, r possiamo considerare le coordinate ξ, η, ζ dei punti della *polodia* ossia del luogo descritto dal polo sull'ellissoide d'inerzia, giacché queste ultime sono legate alle prime dalle relazioni

$$(4)\qquad \xi = \frac{p}{\sqrt{2h}} \quad , \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{2h}} \quad , \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{2h}}\,.$$

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* [In questo volume: VI, p. 108].

Quindi la questione è ridotta ad esprimere le coordinate dei punti della polodia come funzioni uniformi di un parametro ausiliario u. Ora dalle (2), (3), (4) segue che la polodia è la intersezione di due quadriche ed in conseguenza, come è noto, le sue coordinate si potranno esprimere in funzione di un parametro u mediante funzioni ellittiche [2].

2. Per eseguire effettivamente i calcoli potremo operare sia sulle ξ, η, ζ, sia anche direttamente sulle p, q, r e noi ci riferiremo subito a queste ultime quantità.

Si ponga

$$p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4}\,; \tag{5}$$

le (2), (3) diverranno

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - 2\,hx_4^2 = 0 \tag{2'}$$

$$(Ax_1 + m_1 x_4)^2 + (Bx_2 + m_2 x_4)^2 + (Cx_3 + m_3 x_4)^2 - K^2 x_4^2 = 0 \tag{3'}$$

ovvero ponendo

$$K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = K_1$$

esse si scriveranno

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - 2\,hx_4^2 = 0 \tag{2''}$$

$$\begin{gathered} A^2 x_1^2 + B^2 x_2^2 + C^2 x_3^2 - K_1 x_4^2 + \\ + 2\,Am_1 x_1 x_4 + 2\,Bm_2 x_2 x_4 + 2\,Cm_3 x_3 x_4 = 0\,. \end{gathered} \tag{3''}$$

Trasformiamo ora mediante una sostituzione lineare

$$x_i = \sum_1^4{}_s\, c_{is}\, \xi_s \qquad (i = 1\,, 2\,, 3\,, 4) \tag{6}$$

le due forme quadratiche che compariscono nei primi membri delle equazioni precedenti in modo da ridurle rispettivamente alle forme

$$\begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \\ \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2 . \end{cases} \tag{7}$$

A tal fine, come è noto, i coefficienti della sostituzione (6) dovranno soddisfare le equazioni seguenti

$$\begin{cases} (A^2 - A\lambda_s)\, c_{1s} + Am_1\, c_{4s} = 0 \\ (B^2 - B\lambda_s)\, c_{2s} + Bm_2\, c_{4s} = 0 \\ (C^2 - C\lambda_s)\, c_{3s} + Cm_3\, c_{4s} = 0 \\ Am_1\, c_{1s} + Bm_2\, c_{2s} + Cm_3\, c_{3s} - (K_1 - 2\,h\lambda_s)\, c_{4s} = 0 \end{cases} \qquad (s = (1\,, 2\,, 3\,, 4) \tag{8}$$

(2) G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. II, p. 449.

insieme alle altre

(9) $$Ac_{1s}^2 + Bc_{2s}^2 + Cc_{3s}^2 - 2hc_{4s}^2 = 1 \qquad (s = 1, 2, 3, 4).$$

Semplificando le equazioni precedenti esse divengono

(8′) $$\begin{cases} (A - \lambda_s)\, c_{1s} + m_1 c_{4s} = 0 \\ (B - \lambda_s)\, c_{2s} + m_2 c_{4s} = 0 \\ (C - \lambda_s)\, c_{3s} + m_3 c_{4s} = 0 \\ Am_1 c_{1s} + Bm_2 c_{2s} + Cm_3 c_{3s} - (K_1 - 2h\lambda_s)\, c_{4s} = 0 \end{cases}$$

e per conseguenza le λ_s saranno le radici della equazione di quarto grado in λ

$$\begin{vmatrix} A - \lambda, & 0, & 0, & m_1 \\ 0, & B - \lambda, & 0, & m_2 \\ 0, & 0, & C - \lambda, & m_3 \\ Am_1, & Bm_2, & Cm_3, & 2h\lambda - K_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione sviluppata diverrà

$$(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)(K_1 - 2h\lambda) + Am_1^2 (B - \lambda)(C - \lambda)$$
$$+ Bm_2^2 (C - \lambda)(A - \lambda) + Cm_3^2 (A - \lambda)(B - \lambda) = 0$$

ed il primo membro di essa si potrà scrivere

(10) $$f(\lambda) = 2h(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

Dividendo per $(A - \lambda)$ $(B - \lambda)\, C - \lambda)$ si avrà

(10′) $$\frac{f(\lambda)}{(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)} = \frac{Am_1^2}{A - \lambda} + \frac{Bm_2^2}{B - \lambda} + \frac{Cm_3^2}{C - \lambda} - 2h\lambda + K_1.$$

In tutto ciò che segue ammetteremo che A, B, C, siano differenti fra loro e m_1, m_2, m_3 siano diversi da zero; in tale ipotesi nessuna delle radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ potrà ridursi eguale ad A, B, C. Ammetteremo inoltre che le quattro radici siano semplici.

3. Dalle (8′) segue

(11) $$\frac{c_{1s}}{\left(\dfrac{m_1}{A - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{2s}}{\left(\dfrac{m_2}{B - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{3s}}{\left(\dfrac{m_3}{C - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{4s}}{-1}$$

onde chiamando θ_s questo rapporto, avremo

$$\theta_s = \frac{\sqrt{Ac_{1s}^2 + Bc_{2s}^2 + Cc_{3s}^2 - 2hc_{4s}^2}}{\sqrt{\dfrac{Am_1^2}{(A - \lambda_s)^2} + \dfrac{Bm_2^2}{(B - \lambda_s)^2} + \dfrac{Cm_3^2}{(C - \lambda_s)^2} - 2h}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{Am_1^2}{(A - \lambda_s)^2} + \dfrac{Bm_2^2}{(B - \lambda_s)^2} + \dfrac{Cm_3^2}{(C - \lambda_s)^2} - 2h}}$$

a cagione della eguaglianza (9).

Ora derivando la (10′) rispetto a λ si ottiene

$$\frac{Am_1^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{Bm_2^2}{(B-\lambda)^2}+\frac{Cm_3^2}{(C-\lambda)^2}-2h=$$

$$=\frac{f'(\lambda)}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}+f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}$$

e ponendo λ_s in luogo di λ

$$\frac{Am_1^2}{(A-\lambda_s)^2}+\frac{Bm_2^2}{(B-\lambda_s)^2}+\frac{Cm_3^2}{(C-\lambda_s)^2}-2h=\frac{2h(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}.$$

Ne segue che

$$\theta_s=\frac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}$$

e quindi

$$(12)\quad\begin{cases} c_{1s}=\dfrac{m_1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\dfrac{(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{A-\lambda_s}}\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\dfrac{m_1}{A-\lambda_s}\theta_s \\[2ex] c_{2s}=\dfrac{m_2}{\sqrt{2h}}\sqrt{\dfrac{(C-\lambda_s)(A-\lambda_s)}{B-\lambda_s}}\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\dfrac{m_2}{B-\lambda_s}\theta_s \\[2ex] c_{3s}=\dfrac{m_3}{\sqrt{2h}}\sqrt{\dfrac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)}{C-\lambda_s}}\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\dfrac{m_3}{C-\lambda_s}\theta_s \\[2ex] c_{4s}=-\dfrac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=-\theta_s. \end{cases}$$

4. Ciò premesso consideriamo le due equazioni equivalenti alle (2″) (3″)

$$(13)\quad\begin{cases}\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=0\\ \lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\lambda_3\xi_3^2+\lambda_4\xi_4^2=0;\end{cases}$$

poniamo

$$(14)\quad \xi_1^2=a_1\sigma_1^2(u)\quad,\quad \xi_2^2=a_2\sigma_2^2(u)\quad,\quad \xi_3^2=a_3\sigma_3^2(u)\quad,\quad \xi_4^2=a_4\sigma^2(u)$$

e cerchiamo di determinare le costanti a_1, a_2, a_3, a_4 e le tre radici e_1, e_2, e_3 in modo che le (13) restino verificate. La sostituzione (14) trasforma le (13) nelle due equazioni seguenti

$$a_1\sigma_1^2+a_2\sigma_2^2+a_3\sigma_3^2+a_4\sigma^2=0$$

$$\lambda_1a_1\sigma_1^2+\lambda_2a_2\sigma_2^2+\lambda_3a_3\sigma_3^2+\lambda_4a_4\sigma^2=0.$$

Teniamo conto delle due relazioni che legano fra loro i quadrati delle σ, cioè [3]

$$\sigma_2^2=\sigma_3^2-(e_2-e_3)\sigma^2$$

$$\sigma_1^2=\sigma_3^2-(e_1-e_3)\sigma^2;$$

(3) Vedi K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, p. 28.

le due equazioni precedenti diverranno

$$\sigma_3^2 (a_1 + a_2 + a_3) - \sigma^2 (a_1 (e_1 - e_3) + a_2 (e_2 - e_3) - a_4) = 0$$

$$\sigma_3^2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) - \sigma^2 (\lambda_1 a_1 (e_1 - e_3) + \lambda_2 a_2 (e_2 - e_3) - \lambda_4 a_4) = 0$$

e per conseguenza

$$(15) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 (e_1 - e_3) + a_2 (e_2 - e_3) - a_4 = 0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \\ \lambda_1 a_1 (e_1 - e_3) + \lambda_2 a_2 (e_2 - e_3) - \lambda_4 a_4 = 0 . \end{cases}$$

Eliminando fra queste equazioni a_1, a_2, a_3, a_4, otterremo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 & , & 0 \\ e_1 - e_3 & , & e_2 - e_3 & , & 0 & , & 1 \\ \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & 0 \\ \lambda_1 (e_1 - e_3) & , & \lambda_2 (e_2 - e_3) & , & 0 & , & \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata diviene [(4)]

$$(16) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_3} .$$

Dalle (15) segue

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \lambda_3 - \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_3 : \lambda_2 - \lambda_1 : (e_1 - e_3) \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_4} ;$$

quindi potremo prendere

$$(17) \qquad \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{a_1} = \sqrt{2h(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ \mu_2 = \sqrt{a_2} = \sqrt{2h(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ \mu_3 = \sqrt{a_3} = \sqrt{2h(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ \mu_4 \sqrt{a_4} = \sqrt{2h(e_1 - e_3) \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_4}} \end{cases}$$

e avremo

$$\xi_1 = \mu_1 \sigma_1 \quad , \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2 \quad , \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3 \quad , \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma$$

onde le (6) ci daranno

$$(18) \qquad x_i = \sum_{1}^{4} {}_s \mu_s c_{is} \sigma_s \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

in cui si è posto per uniformità $\sigma_4 = \sigma$.

(4) Vedi K. Weierstrass, op. cit., p. 30.

Resulterà quindi finalmente a cagione delle (12) e delle (17)

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
p &= m_1 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{11}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{12}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{13}\,\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{14}\,\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\,\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\,\sigma} \\
q &= m_2 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{21}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{22}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{23}\,\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{24}\,\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\,\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\,\sigma} \\
r &= m_3 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{31}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{32}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{33}\,\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{34}\,\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\,\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\,\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\,\sigma + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\,\sigma}
\end{aligned}
\right.
$$

in cui si è posto per brevità

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_{1s} &= \sqrt{\frac{(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{A-\lambda_s}}\,\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}} \\
A_{2s} &= \sqrt{\frac{(C-\lambda_s)(A-\lambda_s)}{B-\lambda_s}}\,\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}} \\
A_{3s} &= \sqrt{\frac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)}{C-\lambda_s}}\,\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}} \\
A_{4s} &= -\frac{\sqrt{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Per determinare il tempo riprendiamo le equazioni differenziali (1). Avremo:

$$
(21)\quad dt = \frac{A\,dp}{(Bq+m_2)\,r-(Cr+m_3)\,q} = \frac{B\,dq}{(Cr+m_3)\,p-(Ap+m_1)\,r} = \frac{C\,dr}{(Ap+m_1)\,q-(Bq+m_2)\,p}
$$

ovvero a cagione delle (7)

$$
(22)\quad \frac{dt}{du} = \frac{A\left(x_4\dfrac{dx_1}{du}-x_1\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Bx_2+m_2x_4)\,x_3-(Cx_3+m_3x_4)\,x_2} = \frac{B\left(x_4\dfrac{dx_2}{du}-x_2\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Cx_3+m_3x_4)\,x_1-(Ax_1+m_1x_4)\,x_3} = \frac{C\left(x_4\dfrac{dx_3}{du}-x_3\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Ax_1+m_1x_4)\,x_2-(Bx_2+m_2x_4)\,x_1}.
$$

Sostituendo per x_1, x_2, x_3, x_4, i valori ricavati dalle formule (18) le equazioni precedenti divengono:

$$\frac{dt}{du} = \frac{\mathrm{A}\,\Sigma\mu_i\,\mu_s\,(c_{1i}\,c_{4s} - c_{1s}\,c_{4i})\left(\sigma_i\,\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\,\frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\,(\mathrm{C}c_{3s} + m_3\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{2s}\,\sigma_s - \Sigma\mu_s\,(\mathrm{B}c_{2s} + m_2\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{3s}\,\sigma_s}$$

$$= \frac{\mathrm{B}\,\Sigma\mu_i\,\mu_s\,(c_{2i}\,c_{4s} - c_{2s}\,c_{4i})\left(\sigma_i\,\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\,\frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\,(\mathrm{A}c_{1s} + m_1\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{3s}\,\sigma_s - \Sigma\mu_s\,(\mathrm{C}c_{3s} + m_3\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{1s}\,\sigma_s}$$

$$= \frac{\mathrm{C}\,\Sigma\mu_i\,\mu_s\,(c_{3i}\,c_{4s} - c_{3s}\,c_{4i})\left(\sigma_i\,\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\,\frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\,(\mathrm{B}c_{2s} + m_2\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{1s}\,\sigma_s - \Sigma\mu_s\,(\mathrm{A}c_{1s} + m_1\,c_{4s})\,\sigma_s\,\Sigma\mu_s\,c_{2s}\,\sigma_s}.$$

Abbiamo ora (Cfr. K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, p. 28):

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_i\,\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\,\frac{d\sigma_i}{du} = (e_i - e_s)\,\sigma_r\,\sigma \\ &\sigma\,\frac{d\sigma_i}{du} - \sigma_i\,\frac{d\sigma}{du} = -\sigma_s\,\sigma_r\,; \end{aligned}\right.$$

quindi dt/du potrà porsi in tre modi eguale al rapporto di due polinomii omogenei di secondo grado nelle σ, e perciò sarà una funzione doppiamente periodica.

Riprendiamo ora le formule (22) e osserviamo che x_1, x_2, x_3, x_4 sono funzioni olomorfe in tutto il piano. Togliamo i fattori comuni alle funzioni stesse, conservandole olomorfe, ma rendendole tali che non abbiano nessuno zero a comune, e mostriamo che in tale ipotesi i tre denominatori non possono annullarsi contemporaneamente. Infatti se ciò avvenisse si avrebbe

$$(\mathrm{B}x_2 + m_2\,x_4)\,x_3 - (\mathrm{C}x_3 + m_3\,x_4)\,x_2 = 0$$

$$(\mathrm{C}x_3 + m_3\,x_4)\,x_1 - (\mathrm{A}x_1 + m_1\,x_4)\,x_3 = 0$$

$$(\mathrm{A}x_1 + m_1\,x_4)\,x_2 - (\mathrm{B}x_2 + m_2\,x_4)\,x_1 = 0$$

ovvero

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{A}x_1 + m_1\,x_4) - \mu x_1 = 0 \\ &(\mathrm{B}x_2 + m_2\,x_4) - \mu x_2 = 0 \\ &(\mathrm{C}x_3 + m_3\,x_4) - \mu x_3 = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Moltiplicando queste equazioni per $\mathrm{A}x_1, \mathrm{B}x_2, \mathrm{C}x_3$ e sommando, abbiamo, quando si tien conto delle (2'') (3''),

$$(25)\qquad x_4\,(-\mathrm{A}m_1\,x_1 - \mathrm{B}m_2\,x_2 - \mathrm{C}m_3\,x_3 + \mathrm{K}_1\,x_4 - 2\,h\,\mu x_4) = 0\,.$$

Se ora x_4 fosse nulla, siccome si è supposto che A, B, C siano diversi fra loro, dovrebbero essere nulle due fra le x_1, x_2, x_3, e in virtù della (8) tutte e quattro le quantità x_1, x_2, x_3, x_4 sarebbero zero il che è contrario alla ipotesi fatta. Ne segue che x_4 è diversa da zero, e perciò dividendo la (25) per x_4, avremmo:

$$(26) \qquad \mathrm{A} m_1 x_1 + \mathrm{B} m_2 x_2 + \mathrm{C} m_3 x_3 - (\mathrm{K}_1 - 2 h\mu) x_4 = 0 .$$

Le (8') coincidono colle (24) e (26) quando si sostituiscano le x_i alle c_{is} e μ a λ_i; quindi i valori di x_1, x_2, x_3, x_4 che le soddisfano sarebbero tali che (vedi § 3)

$$\frac{x_1}{\left(\dfrac{m_1}{\mathrm{A}-\lambda_i}\right)} = \frac{x_2}{\left(\dfrac{m_2}{\mathrm{B}-\lambda_i}\right)} = \frac{x_3}{\left(\dfrac{m_3}{\mathrm{C}-\lambda_i}\right)} = \frac{x_4}{-1}$$

e per conseguenza a cagione della (2'')

$$\frac{\mathrm{A} m_1^2}{(\mathrm{A}-\lambda_i)^2} + \frac{\mathrm{B} m_2^2}{(\mathrm{B}-\lambda_i)^2} + \frac{\mathrm{C} m_3^2}{(\mathrm{C}-\lambda_i)^2} - 2h = 0 ,$$

onde (vedi equaz. (10')) λ_i sarebbe una radice multipla, contrariamente alle ipotesi fatte. I tre numeratori delle (22) sono funzioni intere, ed i denominatori non possono annullarsi contemporaneamente; dt/du non può dunque mai divenire infinito, e poiché essa è funzione doppiamente periodica, così se ne deduce che è costante. Chiamando n questa costante, si avrà:

$$(27) \qquad t = n(u - u_0)$$

in cui u_0 denota una costante arbitraria.

6. Per eseguire effettivamente il calcolo di n osserviamo che il denominatore della prima espressione trovata per dt/dn può scriversi

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 = {} & \Sigma\mu_i^2 \left[(\mathrm{C}-\mathrm{B})\, c_{3i} c_{2i} + m_3 c_{2i} c_{4i} - m_2 c_{3i} c_{4i}\right] \sigma_i^2 \\ & + \Sigma\mu_i \mu_s \left[(\mathrm{C}-\mathrm{B})(c_{3i} c_{4s} + c_{3s} c_{4i}) + m_3 (c_{4i} c_{2s} + c_{4s} c_{2i}) \right. \\ & \left. \qquad - m_2 (c_{4i} c_{3s} + c_{4s} c_{3i})\right] \sigma_i \sigma_s . \end{aligned}$$

Ora dalle (12) segue

$$\begin{aligned} & (\mathrm{C}-\mathrm{B})(c_{3i} c_{4s} + c_{3s} c_{4i}) + m_3 (c_{4i} c_{2s} + c_{4s} c_{2i}) - m_2 (c_{4i} c_{3s} + c_{4s} c_{3i}) \\ & = m_2 m_3 \theta_i \theta_s \Big\{ (\mathrm{C}-\mathrm{B}) \left[\frac{1}{(\mathrm{C}-\lambda_i)(\mathrm{B}-\lambda_s)} + \frac{1}{(\mathrm{C}-\lambda_s)(\mathrm{B}-\lambda_i)}\right] \\ & \qquad - \left[\frac{1}{\mathrm{B}-\lambda_s} + \frac{1}{\mathrm{B}-\lambda_i}\right] + \left[\frac{1}{\mathrm{C}-\lambda_s} + \frac{1}{\mathrm{C}-\lambda_i}\right] \Big\} \\ & = \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(\lambda_s - \lambda_i)^2 m_2 m_3 \theta_i \theta_s}{(\mathrm{B}-\lambda_i)(\mathrm{C}-\lambda_i)(\mathrm{B}-\lambda_s)(\mathrm{C}-\lambda_s)} . \end{aligned}$$

Di qui si deduce che il coefficiente di σ_i^2 nella D_1 è nullo, giacché si otterrà dalla precedente espressione ponendo $s = i$: quindi

$$\mathrm{D}_1 = (\mathrm{B}-\mathrm{C})\, m_2 m_3 \Sigma \frac{(\lambda_s - \lambda_i)^2 \theta_i \theta_s \mu_i \mu_s}{(\mathrm{B}-\lambda_i)(\mathrm{C}-\lambda_i)(\mathrm{B}-\lambda_s)(\mathrm{C}-\lambda_s)} \sigma_i \sigma_s .$$

Dalle (12) si ricava

$$c_{1i}\,c_{4s} - c_{1s}\,c_{4i} = \theta_i\,\theta_s\left(\frac{m_1}{A-\lambda_s}\,\frac{A-\lambda_i}{m_1}\right) = \frac{m_1\,\theta_i\,\theta_s\,(\lambda_s-\lambda_i)}{(A-\lambda_i)\,(A-\lambda_s)}$$

perciò il numeratore della prima espressione di dt/du sarà

$$N_1 = A m_1 \sum \frac{(\lambda_s-\lambda_i)\,\theta_i\,\theta_s\,\mu_i\,\mu_s}{(A-\lambda_i)\,(A-\lambda_s)}\left(\sigma_i\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\frac{d\sigma_i}{du}\right);$$

dunque applicando le formule (23) può concludersi che N_1 sarà al pari di D_1, una espressione lineare ed omogenea dei prodotti $\sigma_i\,\sigma_s$ e poiché il rapporto N_1/D_1 deve esser costante, esso potrà prendersi eguale al rapporto dei coefficienti di $\sigma_2\,\sigma_3$ nelle espressioni di N_1 e D_1. Perciò

$$n = \frac{dt}{du} = \frac{N_1}{D_1} = \frac{A m_1\,(\lambda_4-\lambda_1)\,\theta_1\,\theta_4\,\mu_1\,\mu_4\,(B-\lambda_2)\,(C-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(C-\lambda_3)}{(B-C)\,m_2\,m_3\,(A-\lambda_1)\,(A-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)^2\,\theta_2\,\theta_3\,\mu_2\,\mu_3}$$

$$= \frac{A m_1}{(B-C)\,m_2\,m_3}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}\sqrt{\frac{e_1-e_3}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)}}$$

avendo posto per brevità

$$\alpha = (A-\lambda_1)\,(A-\lambda_2)\,(A-\lambda_3)\,(A-\lambda_4)\,,$$

$$\beta = (B-\lambda_1)\,(B-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(B-\lambda_4)\,,$$

$$\gamma = (C-\lambda_1)\,(C-\lambda_2)\,(C-\lambda_3)\,(C-\lambda_4)\,.$$

Ora, se in $f(\lambda)$ (vedi form. (10)) poniamo al posto di λ successivamente A, B, C, otteniamo

$$\alpha = \frac{f(A)}{2h} = \frac{A m_1^2\,(B-A)\,(C-A)}{2h}\,.$$

$$\beta = \frac{f(B)}{2h} = \frac{B m_2^2\,(C-B)\,(A-B)}{2h}$$

$$\gamma = \frac{f(C)}{2h} = \frac{C m_3^2\,(A-C)\,(B-C)}{2h}$$

quindi

$$n = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\,\frac{e_3-e_1}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)}}\,.$$