IV.

ESERCIZI DI FISICA MATEMATICA

« Rivista di Matematica », vol. IV, 1894, pp. 1–14.

Mi permetto di presentare ai lettori di questa Rivista alcune note sopra varii punti delle teorie fisico–matematiche (*). Questi articoli non hanno lo scopo di offrire sia risultati originali, sia ricerche condotte con metodi originali. Come il loro titolo lo denota essi hanno un fine molto più modesto, quale è quello di presentare alcune semplici applicazioni delle teorie che ordinariamente si svolgono in un corso di fisica matematica; ed è perciò che spero abbiano da riescire non inutili per chi cerchi delle esercitazioni sopra argomenti uditi nelle scuole.

I.

Sulle funzioni potenziali.

1. Nella teoria del potenziale si dimostra che, se in un dato campo, ove non esistono masse, le tre derivate della funzione potenziale sono nulle, esse si conservano sempre nulle finché non si attraversano delle superficie o degli spazii ove sono distribuite delle masse. Il teorema sussiste, tanto se il *campo* dato è una porzione qualunque dello spazio, quanto se esso è un pezzo di superficie così piccola come si vuole.

Questo teorema conduce alla conseguenza che, quando sopra un elemento di superficie si conosce il valore della funzione potenziale e della sua derivata rispetto alla normale alla superficie, la funzione stessa è determinata in tutta la parte dello spazio i cui punti possono collegarsi mediante una linea continua colla superficie, senza incontrare masse. Mediante una ben nota formula dovuta al Poisson si risolve il problema della costruzione effettiva della funzione potenziale quando si suppongono noti i valori di essa e della sua derivata rispetto alla normale nei punti di un pezzo di piano tanto piccolo quanto si vuole.

Questa notevole formula stabilisce un legame fra ogni funzione potenziale ed una funzione di *due* variabili complesse. Indipendentemente da

(*) Di tali note questa è la sola che sia stata pubblicata [N. d. R.].

questo risultato il Mehler [1] ed il Beltrami [2] hanno mostrato che i *potenziali simmetrici* possono connettersi colle funzioni di una variabile complessa, per mezzo di una formula la quale, senza ricorrere a sviluppi in serie [3], risolve il problema di costruire una funzione potenziale simmetrica quando se ne conosce il valore lungo una porzione dell'asse di simmetria.

I due risultati hanno relazione molto intima fra loro. Il ravvicinarli e farli dipendere in modo molto semplice dalle formule sul potenziale dell'ellissoide, che di solito si espongono in ogni corso sulla teoria del potenziale, credo che sia cosa non del tutto inutile, tanto più che la formula di Poisson suole ordinariamente ricavarsi dall'integrale generale dell'equazione del suono, ed in un corso sulla teoria del potenziale può riescire comodo di ottenerla invece direttamente valendosi soltanto di risultati già stabiliti nella detta teoria.

2. Partendo dalla funzione potenziale di un'ellissoide di rivoluzione intorno all'asse maggiore, e supponendo che due degli assi tendano a zero, si trova la funzione potenziale di una retta sotto la forma

$$V = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} f\left(1 - \frac{x^2+y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{a^2+\lambda}},$$

in cui $2\,a$ rappresenta la lunghezza della retta, x, y, z le coordinate del *punto potenziato*, riferite alla retta presa come asse z ed a due altre x e y ortogonali, supponendo l'origine nel punto di mezzo della retta stessa. Fra la densità in un punto della retta e la funzione f passa la relazione

$$\rho(z) = \pi f\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right); \tag{1}$$

λ è la radice positiva dell'equazione

$$H = 1 - \frac{x^2+y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2+\lambda} = 0 .$$

In modo analogo la funzione potenziale di un disco circolare di raggio b giacente nel piano xy col centro nell'origine può mettersi sotto la forma

$$V_1 = \pi b^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \varphi\left(1 - \frac{x^2+y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\lambda}},$$

(1) *Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern.* «Math. Ann.», Bd. XVIII.

(2) *Sulle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica.* «Mem. Acc. di Bologna», S. IV, T. IV.

(3) Vedi Thomson und Tait, *Handbuch der Theoretischen Phisik.* I Bd., II Th., § 546.

ove fra la densità $\rho_1(s)$ del disco in un punto distante dal centro di $z = b\sqrt{1-s}$ e la funzione φ passa la relazione

$$(2\,a) \qquad \rho_1(s) = \int_0^s \frac{\varphi'(\mu)}{\sqrt{s-\mu}}\,d\mu + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{s}},$$

la cui relazione inversa è

$$(2\,b) \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}};$$

λ_2 è la radice positiva dell'equazione

$$H_2 = 1 - \frac{x^2+y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 0\ ^{(4)}.$$

Ora V diventa eguale a V_1 prendendo

$$ib = a \quad , \quad \varphi(s) = -\frac{1}{a}\,f(s).$$

Infatti avremo

$$V_1 = -\pi a^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} -\frac{1}{a}\,f\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{(-a^2+\lambda)\sqrt{\lambda}}$$

e cambiando in questa formola λ in $a^2+\lambda$ si ottiene

$$(3) \qquad V_1 = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} f\left(1 - \frac{x^2+y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{a^2+\lambda}} = V.$$

Dalle (2) segue

$$\rho_1(s) = -\frac{1}{a}\int_0^s \frac{f'(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}} - \frac{1}{a}\,\frac{f(0)}{\sqrt{s}}$$

e dalla (1)

$$f(\mu) = \frac{1}{\pi}\,\rho\left(a\sqrt{1-\mu}\right)$$

$$f'(\mu) = -\frac{a}{2\pi\sqrt{1-\mu}}\,\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right);$$

quindi

$$(4\,a) \qquad \rho_1(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu - \frac{1}{a\mu}\,\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}.$$

(4) Vedi E. Betti, *Teoria delle Forze Newtoniane*, p. 85 e sg.

Dalla (2 *b*) si deduce poi la relazione inversa alla precedente

$$(4\,b) \qquad \rho(s) = -a \int_0^{1-s^2/a^2} \frac{\rho_1(\mu)\, d\mu}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \mu}}\,.$$

Osserviamo che, come la funzione

$$\frac{m}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

rappresenta la funzione potenziale di un punto di massa m e di coordinate x_1, y_1, z_1, così potremo dire che

$$\frac{m}{\sqrt{[x-(x_1+ix_2)]^2 + [y-(y_1+iy_2)]^2 + [z-(z_1+iz_2)]^2}}$$

è la funzione potenziale di una massa m concentrata nel punto immaginario dello spazio avente le coordinate $x_1 + ix_2, y_1 + iy_2, z_1 + iz_2$.

Ciò premesso le formule (3), (4 *a*), (4 *b*) conducono alla seguente proposizione:

TEOREMA 1 *a*. – *Abbiansi tre assi* x, y, z *ortogonali, ed una massa distribuita sull'asse* z *dal punto* $-a$ *al punto* a *colla densità* $\rho(z)$ (*essendo* $\rho(z) = \rho(-z)$). *La funzione potenziale di una tale massa è uguale a quella di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano* xy *di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0),$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'(a\sqrt{1-\mu})}{\sqrt{s-\mu}\sqrt{1-\mu}}\, d\mu - \frac{1}{a\pi}\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}\,,$$

essendo

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2}\,.$$

TEOREMA 1 *b*. – *Abbiasi una massa distribuita nei punti del cerchio di raggio* b *situato nel piano* xy *col centro nell'origine, colla densità superficiale* $\rho_1(r)$. *Questo disco avrà la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse* z *di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$\rho = -ib\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s-\mu}}\,,$$

essendo

$$s = 1 - \frac{z^2}{b^2}\,.$$

In particolare, prendendo successivamente le densità ρ e ρ_1 costanti ed eguali a K, i teoremi precedenti divengono:

TEOREMA 2 *a*. – *La funzione potenziale di una massa di densità costante* K *distribuita sull'asse z dal punto — a al punto a è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0)\,,$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = -\frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

TEOREMA 2 *b*. – *La funzione potenziale di un disco omogeneo di densità* K *di raggio b, situato nel piano xy col centro nell'origine, è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)\,,$$

colla densità lineare

$$\rho = -2\,i\mathrm{K}\sqrt{b^2 - z^2}\,.$$

Un'altra conseguenza del teorema 1 *a* è la seguente:

TEOREMA 3 *a*. – *La funzione potenziale di due punti di masse* $+1$ *e* -1, *situati sull'asse z alle distanze rispettive* $+a$ *e* $-a$ *dall'origine, è eguale alla funzione potenziale di un doppio strato distribuito nei punti immaginari del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0),$$

col momento

$$\mu = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

Supponiamo infatti dapprima distribuita sull'asse z dal punto $-a$ al punto a una massa omogenea M_1 di densità —K. Essa avrà la stessa funzione potenziale della massa M'_1 di densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}$$

distribuita nei punti di coordinate

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = 0 \quad (a \geqq r \geqq 0)\,.$$

Distribuiamo poi sull'asse z una massa M_2 della densità $+$ K dal punto $-a + \varepsilon$ al punto $a + \varepsilon$. Ad essa corrisponderà una massa M'_2 distribuita nei punti di coordinate

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \varepsilon \quad (a \geqq r \geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_2 = -\frac{\mathrm{K}}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} .$$

Prendiamo l'insieme delle due masse M_1 e M_2 e facciamo tendere ε a zero, mentre $\mathrm{K}\varepsilon$ si conserva eguale ad 1. Otterremo al limite sull'asse z due punti di masse $+1$ e -1 alle distanze $+a$ e $-a$ dall'origine. Prendendo invece l'insieme delle due masse M'_1 e M'_2 al limite si otterrà un doppio strato di momento

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} .$$

Il teorema resta quindi dimostrato.

In modo del tutto analogo partendo dal teorema $2\,b$ relativo al disco omogeneo e passando da esso al caso di un anello circolare si trova il teorema seguente:

TEOREMA $3\,b$. – *Un anello circolare di densità eguale ad* 1, *situato nel piano xy col centro nell'origine ha la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$-\frac{2\,ib}{\sqrt{b^2-z^2}} .$$

3. Premessi questi teoremi, denotiamo per semplicità con m_1 la massa distribuita sull'asse z secondo l'ipotesi fatta nel teorema $2\,a$ e con m'_1 la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii del piano xy e analogamente indichiamo con m_2 l'insieme dei due punti materiali considerati nel teorema $3\,a$ e con m'_2 il doppio strato equivalente distribuito nei punti immaginarii del piano xy. Abbiasi un sistema qualunque di masse che supporremo esterne al segmento dell'asse compreso fra $z=-a$ e $z+a$. Sia V la funzione potenziale delle masse m. Pel teorema di GAUSS il potenziale P_1 di m su m_1 sarà eguale al potenziale di m su m'_1. Ora il potenziale di m su m_1 si calcola immediatamente e si trova

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{K}\int_{-a}^{a} \mathrm{V}\,(0\,,0\,,z)\,dz .$$

Per avere il potenziale su m'_1 bisognerà prendere la V nei punti del piano xy cioè $\mathrm{V}\,(x\,,y\,,0)$ e prolungarla per i valori complessi di x e di y. Otterremo così la funzione di due variabili complesse

$$\mathrm{V}\,(x+i\xi\,,y+i\zeta\,,0) \tag{5}$$

tale, che

$$\mathrm{V}\,(x+i\xi\,,y+i\zeta\,,0)_{\xi=0,\,\zeta=0} = \mathrm{V}\,(x\,,y\,,0) .$$

La (5) dà i valori della funzione potenziale delle masse m nei punti immaginarii del piano x, y; quindi otterremo immediatamente:

$$\mathrm{P}_1 = -\frac{\mathrm{K}}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{ir\cdot i\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

Eguagliando i due valori trovati per P_1 si ha

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,,$$

e derivando i due membri rispetto ad a

$$\mathrm{V}\,(0\,, 0\,, a) + \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, -a)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

In modo analogo prendiamo successivamente il potenziale P_2 delle masse m su m_2 e m'_2; tenendo conto del modo con cui vanno calcolati i potenziali sui doppi strati, otterremo

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}_2 &= \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, a) - \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, -a)\,,\\ \mathrm{P}_2 &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}'_z\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{ir\cdot i\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}'_z\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,,\end{aligned}\right.$$

ove V'_z rappresenta la derivata parziale di V rapporto a z; funzione che dovremo supporre prolungata anch'essa per i valori complessi delle variabili x ed y.

Eguagliando fra loro i due valori trovati per P_2, abbiamo

$$(7)\quad \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, a) - \mathrm{V}\,(0\,, 0\,, -a)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \mathrm{V}'_z\,(ir\cos\theta\,, ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 0)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

Dalle (6) e (7) segue

$$V(0,0,a) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(ir\cos\theta, ir\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(ir\cos\theta, ir\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

Cambiando l'origine nel piano x, y e ponendo z in luogo di a, la formula precedente dà luogo all'altra

$$\text{(A)}\qquad V(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V(x+ir\cos\theta, y+ir\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V'_z(x+ir\cos\theta, y+ir\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}\,,$$

la quale è valida ammettendo che la parallela all'asse z che dal punto $x, y, -z$ va al punto x, y, z sia esterna alle masse m.

Questa formula (5) scioglie evidentemente la questione di determinare una funzione potenziale $V(x, y, z)$ quando si conosce, sopra un pezzo di piano σ esterno allo spazio occupato dalle masse, il suo valore e quello della sua derivata rispetto alla normale al piano σ. La soluzione si otterrà prendendo gli assi x, y, z in modo che il pezzo di piano σ appartenga al piano x, y. Bisognerà quindi considerare le funzioni note $V(x, y, 0)$, $V'_z(x, y, 0)$ e prolungarle pei valori complessi delle variabili x e y; finalmente si applicherà la formula (A). In tal modo si determineranno i valori di $V(x, y, z)$ nella porzione del cilindro S simmetrico rispetto al piano xy, avente per base σ entro il quale non capitano masse; ma una volta determinata la V entro S si potrà prendere un pezzo di piano arbitrario σ' contenuto in S. In esso conosceremo il valore di V e della derivata rispetto alla normale, quindi potremo ripetere per σ' le stesse operazioni già eseguite per σ e così procedendo di seguito potremo prolungare la funzione potenziale V finché sarà possibile.

Come abbiamo detto fin da principio la formula (A) stabilisce un legame fra le funzioni potenziali e le funzioni di *due* variabili complesse. Il teorema a cui si perviene mediante tale osservazione è il seguente.

TEOREMA 4. - *Siano* $F(\zeta_1, \zeta_2)$ *e* $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ *due funzioni arbitrarie delle variabili complesse* ζ_1 *e* ζ_2, *reali per i valori reali di* ζ_1 *e* ζ_2.

(5) La formula (A) è la formula data da POISSON nel § (8) della sua Memoria *Sur les équations aux différences partielles*. «Mem. de l'Acad. des Sciences», T. III.

Sia σ un campo tale che per tutti i valori reali di x e y interni a σ le funzioni

$$F(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y) \quad , \quad \Phi(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y)$$

si comportino regolarmente ed oltre a ciò i raggi di convergenza dei detti elementi siano sempre superiori ad R. *In tale ipotesi, posto*

$$\zeta_1 = x + ir\cos\theta \quad , \quad \zeta_2 = y + ir \operatorname{sen}\theta ,$$

la funzione

$$(A') \qquad V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + ir\cos\theta, y + ir\operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \Phi(x + ir\cos\theta, y + ir\operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

gode delle seguenti proprietà:

1° *entro il cilindro* S *simmetrico rispetto al piano xy avente per base σ e per altezza* 2 R *è reale finita e continua insieme alle sue derivate;*

2° *entro* S *soddisfa l'equazione differenziale*

$$\Delta^2 V = 0$$

3° *sul pezzo di piano σ si ha*

$$V(x, y, 0) = F(x, y) \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y).$$

Per dimostrare direttamente questo teorema, cominciamo dal considerare la funzione

$$(8) \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + ir\cos\theta, y + ir\operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Per mezzo di una integrazione per parti, avremo

$$f(x, y, z) = z\,F(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\operatorname{sen}\theta\right)\sqrt{z^2 - r^2}\,dr$$

e quindi

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = F(x, y) + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\operatorname{sen}\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Da questa formula segue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$+ \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Mediante l'integrazione per parti rispetto a θ, si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

e mediante integrazione per parti rispetto ad r

$$\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \operatorname{arco\,sen}\frac{r}{z}\right]_0^z$$

$$-\int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) \operatorname{arco\,sen}\frac{r}{z}\, dz,$$

onde

$$\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\operatorname{sen}^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}};$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Ora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} , \tag{10}$$

dunque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0. \tag{11}$$

Analogamente ponendo

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z \Phi(x+ir\cos\theta\,,y+ir\operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}, \tag{8'}$$

avremo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\Phi(x,y)+\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1}i\cos\theta+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_2}i\operatorname{sen}\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2-r^2}}, \tag{9'}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{11'}$$

Dalla (A′) segue

$$V(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}+\varphi$$

quindi

$$\Delta^2 V=0$$

e a cagione delle (9) e (8′)

$$V(x,y,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0}+\varphi_{z=0}=F(x,y).$$

Dalle (10) e (9′) si ha poi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=0}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=\Phi(x,y).$$

È facile finalmente riconoscere che V è reale. Infatti dalla (A′) segue che mutando θ in $\theta+\pi$, V non deve mutare, e questo cambiamento equivale a mutare, nella (A′) stessa, i in $-i$.

4. Procediamo per i potenziali simmetrici in modo analogo a quello che abbiamo tenuto precedentemente nel caso dei potenziali generali. Chiamiamo m_1 la massa distribuita nell'anello secondo il teorema 3 *b*, ed m'_1 la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii dell'asse z. Il potenziale sopra m_1 di un sistema di masse m distribuite simmetricamente rispetto all'asse z, sarà eguale al potenziale di m sopra m'_1.

Denotiamo con $V(r,z)$ la funzione potenziale della massa m. Il potenziale di m sopra m_1 sarà

$$2\pi b\,V(b,0)$$

ed il potenziale sopra m'_1 si otterrà prolungando i valori di $V(r, z)$ per valori immaginarii di z, ed avremo

$$-\int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{2ib}{\sqrt{b^2 - z^2}} i\,dz;$$

quindi eguagliando questi due valori del potenziale risulterà

$$V(b, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

da cui si deduce immediatamente

$$(12) \qquad V(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} V(0, z + is) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Separando in $V(0, z + is)$ la parte reale dalla parte immaginaria, si otterrà

$$V(0, z + is) = v(z, s) + iw(z, s) = f(z + is)$$

d'onde

$$(B) \qquad V(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{r} v(z, s) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Questa formula dà una relazione fra una funzione potenziale simmetrica $V(r, z)$ e la parte reale della funzione di variabile complessa che è reale sull'asse reale z ed assume su questo gli stessi valori di $V(r, z)$ per $r = 0$. La formula precedente si può invertire e si otterrà

$$(B_1) \qquad v(z, s) = \frac{d}{dr} \int_{0}^{r} \frac{V(t, z)}{\sqrt{r^2 - t^2}} t\,dt.$$

Passiamo a considerare la funzione associata alla funzione $v(r, z)$ e cerchiamo di esprimerla mediante la funzione di variabile complessa $f(z + is)$. A tal fine immaginiamo due dischi omogenei di densità $-K$ e K e di raggio b normali all'asse z i cui centri sono sopra questo asse ed hanno le coordinate z e $z + h$. Il potenziale delle masse m sopra questi due dischi sarà dato da

$$2\pi \int_{0}^{b} Kr\, V(r, z + h)\, dr + 2\pi \int_{0}^{b} -Kr\, V(r, z)\, dr$$

$$= 2\pi \int_{0}^{b} K \{V(r, z + h) - V(r, z)\}\, r\, dr.$$

Ma tenendo presente il teorema $2\,b$, lo stesso potenziale potrà esprimersi ancora sotto la forma

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{V}(0, z+h+is)\left(-2\,i\mathrm{K}\sqrt{b^2-s^2}\right) i\,ds$$

$$+\int_{-b}^{b} \mathrm{V}(0, z+is)\left(2\,i\mathrm{K}\sqrt{b^2-s^2}\right) i\,ds$$

$$= 2\int_{-b}^{b} \mathrm{K}\left\{\mathrm{V}(0, z+h+is) - \mathrm{V}(0, z+is)\right\}\sqrt{b^2-s^2}\,ds,$$

onde avremo, posto $\mathrm{K}=1/h$,

$$\int_0^b \frac{\mathrm{V}(r, z+h)-\mathrm{V}(r, z)}{h}\,r\,dr = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{\mathrm{V}(0, z+is+h)-\mathrm{V}(0, z+is)}{h}\sqrt{b^2-s^2}\,ds.$$

Facendo tendere h verso zero, si otterrà

$$\mathrm{W}(b, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{\partial \mathrm{V}(0, z+is)}{\partial z}\sqrt{b^2-s^2}\,ds,$$

in cui $\mathrm{W}(r, z)$ denota la funzione associata alla $\mathrm{V}(r, z)$. La formula precedente si potrà ancora scrivere con facili trasformazioni

$$(12') \qquad \mathrm{W}(r, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \mathrm{V}(0, z+is)\frac{s\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

ovvero

$$(\mathrm{C}) \qquad \mathrm{W}(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^r w(z, s)\frac{s\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

che è appunto la formula che cercavamo.

Le due formule (B) e (C) risolvono il problema: *Dati i valori di una funzione potenziale simmetrica lungo un segmento dell'asse di simmetria esterno alle masse attraenti, determinare la funzione stessa e la funzione associata in punti esterni all'asse appartenenti ad un cilindro circolare retto* (*avente per asse il segmento dato*) *entro il quale non si trovano masse attraenti*. Basterà perciò prolungare i valori dati della funzione potenziale simmetrica per valori complessi dell'argomento; quindi applicare le formule (B) e (C).