II.

SULLA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO DI UN CORPO ELASTICO ISOTROPO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. II₁, 1° sem. 1893, pp. 549–558.

1. In una Nota comunicata nella precedente seduta (*), ho considerato le equazioni differenziali delle vibrazioni di un corpo elastico isotropo, allorché le componenti degli spostamenti sono indipendenti da una delle coordinate cartesiane che abbiamo chiamata z.

Allorché si teneva conto soltanto degli spostamenti normali all'asse z, le equazioni differenziali stesse si scrivevano sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - a^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \tag{2}$$

essendo

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nella Nota suddetta ho stabilito delle formule le quali dànno i valori di u e v al vertice comune di due *coni caratteristici*, mediante i valori degli spostamenti stessi e delle loro derivate lungo una superficie qualunque inclusa entro i due coni e che limita insieme a ciascuno di essi una regione adiacente al vertice.

Mi propongo ora di ottenere delle formule analoghe, allorché la superficie lungo la quale sono dati i valori di u e v e delle loro derivate giace esternamente ai detti coni.

2. Nel campo delle tre variabili x, y, t, conduciamo un cono R di rotazione il cui asse ζ sia parallelo a t, avente il vertice nel punto x_1, y_1, t_1 e la cui apertura sia 2ρ essendo $\operatorname{tg} \rho > a$. Quindi mediante una superficie σ si limiti una porzione di spazio esterna al cono adiacente al vertice, e finalmente si conduca un cilindro c di rotazione di raggio ε avente per asse ζ (fig. 1) [1].

(*) In questo volume: I, p. 1 [N. d. R.].

(1) In questa figura, come pure nella successiva ciascun elemento S, σ, R, $c \cdots$ è formato dall'insieme di quelli rappresentati colla stessa lettera aventi uno e due apici.

Le osservazioni che abbiamo fatto nella Nota precedente dimostrano che la parte dell'integrale che comparisce nel secondo membro la quale è estesa al cono R è nulla; e facendo diminuire l'angolo ρ finché si riduca $\operatorname{tg} \rho = a$, avremo che al limite sparirà nel primo membro la parte dell'integrale pure estesa al cono R. Osserviamo poi che sul cilindro c si ha $\cos nt = 0$, $\cos nx = \cos \omega$, $\cos ny = \operatorname{sen} \omega$, $dc = \varepsilon d\omega\, dt$, per conseguenza allorché $\operatorname{tg} \rho = a$, la equazione (3) diventerà

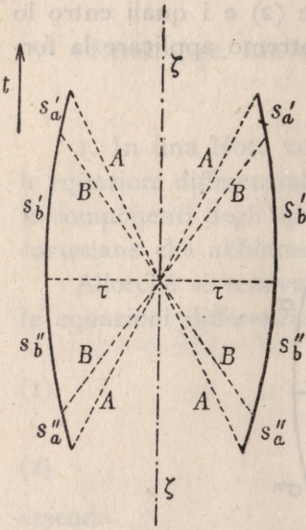

Fig. 2.

$$\int_\sigma \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r} \{ U \operatorname{sen} \omega - V \cos \omega \} \right.$$

$$- \frac{a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega - r \cos ny]\, u$$

$$\left. - [(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx]\, v \} \right] d\sigma$$

$$= \int_c \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r} \{ U \operatorname{sen} \omega - V \cos \omega \} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right] dc$$

$$= - a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \varepsilon/a}^{t_1 + \varepsilon/a} \sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1 - t)^2}\, \tilde{\omega}\, dt$$

$$+ a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \varepsilon/a}^{t_1 + \varepsilon/a} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1 - t)^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega)\, dt .$$

Quindi facendo tendere ε verso zero, l'ultimo membro va a zero.

Si può dunque concludere:

Essendo s_a una superficie che limita una porzione di spazio esterna al cono A (considerato nella precedente Nota) *ed adiacente al vertice, abbiamo* (vedi fig. 2)

$$\text{(III)} \quad \int_{s_a} \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r^2} \{ U(y - y_1) - V(x - x_1) \} \right.$$

$$- \frac{a^2}{r^2 \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t)(y - y_1) \cos nt - r^2 \cos ny]\, u$$

$$\left. - [(t_1 - t)(x - x_1) \cos nt - r^2 \cos nx]\, v \} \right] ds_a = 0 .$$

Analogamente partendo dagli integrali

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{r^2} (x - x_1) = \frac{\sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{r} \cos \omega \\ v_1 &= \frac{\sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{r^2} (y - y_1) = \frac{\sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \end{aligned} \right.$$

delle equazioni (1) e (2) si giungerebbe al seguente risultato:

Esaminiamo lo spazio S racchiuso entro le tre superficie σ, R, c; in esso gl'integrali (I) della Nota precedente avranno valori immaginari. Onde ridurli reali moltiplichiamoli per i; otterremo in tal modo le funzioni

$$
(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} u_1 = \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\dfrac{y - y_1}{r^2} = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\operatorname{sen}\omega \\[2ex] v_1 = -\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\dfrac{x - x_1}{r^2} = -\dfrac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\cos\omega \end{cases}
$$

che costituiranno un sistema di integrali delle (1) e (2) e i quali entro lo spazio S si conserveranno reali e regolari. Perciò potremo applicare la for-

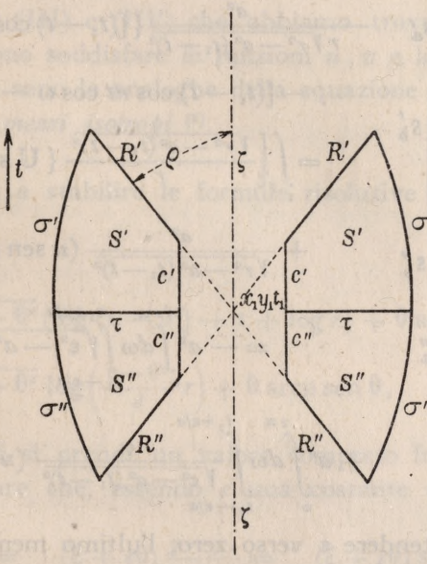

Fig. 1.

mula (7) della Nota citata, avvertendo di mutare il segno alle espressioni che compariscono entro i radicali, e nel medesimo tempo di cambiare il segno al secondo membro. Avremo allora

$$
(3)\quad \int_\Sigma \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\{\mathrm{U}\operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega\}\,d\Sigma
$$

$$
= \int_\Sigma \frac{a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}\{[(t_1 - t)\cos nt \operatorname{sen}\omega - r\cos ny]\,u
$$

$$
- [(t_1 - t)\cos nt\cos\omega - r\cos nx]\,v\}\,d\Sigma
$$

in cui per semplicità si è posto

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos nx - a^2\tilde{\omega}\cos ny \\[2ex] \mathrm{V} = \dfrac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos ny + a^2\tilde{\omega}\cos nx. \end{cases}
$$

Se s_b è la porzione di s_a esterna al cono B (considerato nella Nota precedente) *si avrà*:

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \int_{s_b} \Bigg[\frac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r^2} \{ \mathrm{U} (x - x_1) + \mathrm{V} (y - y_1) \}$$

$$- \frac{b^2}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t)(x - x_1) \cos nt - r^2 \cos nx] \, u$$

$$+ [(t_1 - t)(y - y_1) \cos nt - r^2 \cos ny] \, v \} \Bigg] ds_b = 0 .$$

Le due formule (III) e (III′) che abbiamo trovato stabiliscono delle relazioni a cui debbono soddisfare le funzioni u, v e le loro derivate lungo le superficie s_a, s_b, e sono le analoghe della equazione (23) della Nota *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi* (2).

3. Passiamo ora a stabilire le formule risolutive della questione propostaci.

Si ponga

$$\xi = \sqrt{1 - \theta^2} (\log (1 - \theta^2) - 1 + \log r) + \theta \operatorname{arco\,sen} \theta$$

$$= \sqrt{1 - \theta^2} \log \left(\frac{1 - \theta^2}{e} r \right) + \theta \operatorname{arco\,sen} \theta ,$$

in cui per arco sen θ si prende un valore compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

È facile verificare che, essendo c una costante arbitraria,

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= (\xi + c\theta) \frac{y - y_1}{r} = (\xi + c\theta) \operatorname{sen} \omega , \\ v_1 &= -(\xi + c\theta) \frac{x - x_1}{r} = -(\xi + c\theta) \cos \omega , \end{aligned} \right. \qquad \theta = \frac{a (t - t_1)}{r}$$

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= (\xi + c\theta) \frac{x - x_1}{r} = (\xi + c\theta) \cos \omega , \\ v_1 &= (\xi + c\theta) \frac{y - y_1}{r} = (\xi + c\theta) \operatorname{sen} \omega , \end{aligned} \right. \qquad \theta = \frac{b (t - t_1)}{r}$$

formano due sistemi di integrali delle equazioni (1) e (2). Il primo di essi si conserva reale finché ci manteniamo nello spazio esterno al cono A, ed il secondo finché siamo esternamente a B.

Ciò premesso prendiamo a considerare il campo S rappresentato nella fig. 1, e conduciamo il piano τ avente per equazione $t = t_1$. Esso dividerà lo spazio S in due parti in una delle quali (che denoteremo con S′) i punti

(2) Ved. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. I, 2º sem., 1892, p. 265. [In queste Opere: volume primo, XXXV, p. 568].

hanno una coordinata t maggiore di t_1, mentre nell'altra (che indicheremo con S″) la coordinata t dei punti è inferiore a t_1.

Le parti di σ, R, c che appartengono al contorno di S′ le distingueremo ponendo un apice alle lettere stesse; mentre porremo due apici per indicare le parti delle stesse superficie che limitano S″.

4. Riprendiamo ora la formola (5) della precedente Nota ed applichiamola al campo S′ prendendo per funzioni u_1 e v_1 le (V).

Cominciamo dal calcolare i valori di ϑ_1, $\tilde{\omega}_1$, $\partial u_1/\partial t$, $\partial v_1/\partial t$ corrispondenti. Avremo

$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_1 = 0\\
&\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{r\sqrt{1-\theta^2}}(\log(1-\theta^2)+\log r)\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t} = \left[-\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}(\log(1-\theta^2)+\log r)+\operatorname{arco\,sen}\theta+c\right]\frac{a}{r}\,\frac{y-y_1}{r}\\
&\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\left[-\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}(\log(1-\theta^2)+\log r)+\operatorname{arco\,sen}\theta+c\right]\frac{a}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\,.
\end{aligned}\right.$$

Perciò la (5) della Nota precedente in questo caso diventerà

$$\int_\Sigma \Pi\, d\Sigma = 0 \tag{4}$$

quando si prenda

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & (\xi + c\theta)\{\mathrm{U}\operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega\}\\
& - \frac{(\log(1-\theta^2)+\log r)\,a}{r\sqrt{1-\theta^2}}\{u[-\theta\operatorname{sen}\omega\cos nt - a\cos ny]\\
& + v[\theta\cos\omega\cos nt + a\cos nx]\} - \frac{a}{r}(\operatorname{arco\,sen}\theta + c)\{u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega\}\cos nt\,.
\end{aligned}$$

Il contorno Σ è formato da σ', dalle parti di R′ e di τ esterne al cilindro c', e finalmente da quest'ultimo cilindro c'.

Sulla falda R′ del cono R abbiamo

$$\theta = \frac{a}{\operatorname{tg}\rho}\quad,\quad \cos nt = -\operatorname{sen}\rho\,,$$

quindi il valore di Π nei punti del cono R′ risulta il seguente

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{R}'} = {} & \left\{\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}}\left(\log\left(1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}\right)-1+\log r\right)\right.\\
& \left. + \frac{a}{\operatorname{tg}\rho}\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a}{\operatorname{tg}\rho}+c\right)\right\}\{\mathrm{U}\operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega\}\\
& - \frac{\left(\log\left(1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}\right)+\log r\right)a^2}{r\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}}}\{u[\operatorname{sen}\omega\cos\rho - \cos ny]\\
& + v[-\cos\omega\cos\rho + \cos nx]\} + \frac{a}{r}\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a}{\operatorname{tg}\rho}+c\right)(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\operatorname{sen}\rho.
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che sopra R′

$$\cos ny = \operatorname{sen}\omega \cos\rho \quad , \quad \cos nx = \cos\omega\cos\rho ,$$

quindi, togliendo i termini che si annullano, la espressione precedente diventerà

$$\Pi_{R'} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}}\left[\log\left(1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}\right) - 1 + \log r\right][U \operatorname{sen}\omega - V\cos\omega]$$

$$+ a\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a}{\operatorname{tg}\rho} + c\right)\Bigg\}\frac{1}{\operatorname{tg}\rho}[U\operatorname{sen}\omega - V\cos\omega] + \frac{1}{r}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\operatorname{sen}\rho\Bigg\}.$$

Diminuiamo ora l'angolo ρ finché si abbia

$$\operatorname{tg}\rho = a , \tag{5}$$

allora basterà prendere la costante arbitraria $c = -\pi/2$, perché $\Pi_{R'}$ si annulli al limite.

Perciò quando si suppone soddisfatta la (5) dovremo estendere nella (4) la integrazione a σ', a c' e a τ soltanto.

Sopra c' abbiamo

$$\theta = \frac{a(t - t_1)}{\varepsilon},$$

$$\cos nt = 0 \quad , \quad \cos nx = \cos\omega \quad , \quad \cos ny = \operatorname{sen}\omega ,$$

quindi, nei punti del cilindro c', Π assumerà la forma

$$\Pi_{c'} = -\left[\sqrt{1 - \frac{a^2(t_1 - t)^2}{\varepsilon^2}}\left(\log\left(1 - \frac{a^2(t_1 - t)^2}{\varepsilon^2}\right) - 1 + \log\varepsilon\right)\right.$$

$$\left. + \frac{a(t - t_1)}{\varepsilon}\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} + c\right)\right] a^2\tilde{\omega}$$

$$+ \frac{\left(\log\left(1 - \dfrac{a^2(t - t_1)^2}{\varepsilon^2}\right) + \log\varepsilon\right)a^2}{\varepsilon\sqrt{1 - \dfrac{a^2(t - t_1)^2}{\varepsilon^2}}}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega).$$

Ma sopra c' si ha

$$dc' = d\Sigma = \varepsilon\, d\omega\, dt$$

quindi ponendo

$$\frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} = \eta \quad , \quad dt = \frac{\varepsilon}{a}d\eta$$

avremo che la parte dell'integrale (4) estesa a c' potrà scriversi

$$\int_{c'}\Pi_{c'}\,dc' = \frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^1\Big\{-\left[\sqrt{1 - \eta^2}\left(\log(1 - \eta^2) - 1\right)\right.$$

$$\left. + \eta(\operatorname{arco\,sen}\eta + c)\right]\varepsilon a^2\tilde{\omega} + \frac{\log(1 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \eta^2}}a^2(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\Big\}d\eta$$

$$+ a\varepsilon\log\varepsilon\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^1\Big\{-\varepsilon\sqrt{1 - \eta^2}\,\tilde{\omega} + \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega\Big\}d\eta.$$

Di qui si vede che facendo impiccolire indefinitamente ε, l'integrale esteso al cilindro c' tende verso zero, e per conseguenza nella (4) potremo prendere per campo d'integrazione la superficie σ' e il piano τ. Sopra questo si ha

$$\cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad \cos nt = 1 \quad , \quad \theta = 0$$

onde, essendo $c = -\pi/2$, avremo che il valore di Π corrispondente ai punti di τ sarà

$$\Pi_\tau = (\log r - 1)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\,.$$

Se dunque chiamiamo $\Pi'_{\sigma'}$ il valore di Π sopra la superficie σ', otterremo la formula

$$(6')\qquad \int_{\sigma'}\Pi'_{\sigma'}\,d\sigma' = \int_\tau\left[(\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\right]d\tau\,.$$

5. Analogamente consideriamo lo spazio S'' ed applichiamo lo stesso calcolo. Prendendo questa volta $c = \pi/2$, e chiamando $\Pi''_{\sigma''}$ il valore corrispondente di Π sopra σ'', avremo

$$(6'')\qquad \int_{\sigma''}\Pi''_{\sigma''}\,d\sigma'' = -\int_\tau\left[(\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\right]d\tau\,.$$

Sommando le (6') e (6'') avremo dunque

$$(6)\qquad \int_{\sigma'}\Pi'_{\sigma'}\,d\sigma' + \int_{\sigma''}\Pi''_{\sigma''}\,d\sigma'' = \pi a\int_\tau\frac{1}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\,d\tau\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial\log r}{\partial x_1} = -\frac{1}{r}\cos\omega \quad , \quad \frac{\partial\log r}{\partial y_1} = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\omega$$

quindi il secondo membro della equazione precedente potrà scriversi

$$\pi a\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\tau u\log r\,d\tau - \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\tau v\log r\,d\tau\right].$$

Per conseguenza (vedi fig. 2) *essendo s_a la solita superficie esterna al cono* A *che limita una porzione di spazio adiacente al vertice, e s'_a, s''_a le due parti di essa divise dal piano τ, posto*

$$\text{(a)}\qquad \Phi_a = \frac{1}{a}\int\limits_{s_a}\left\{\sqrt{1-\frac{a^2(t-t_1)^2}{r^2}}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(\mathrm{U}\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right)\right.$$

$$+\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{a^2}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\left[u\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{y-y_1}{r}\cos nt+\cos ny\right)\right.$$

$$\left.\left.-v\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\cos nx\right)\right]\right\}ds_a$$

$$+\int\limits_{s_a}\left\{\frac{t-t_1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(\mathrm{U}\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds_a$$

$$-\frac{\pi}{2}\left\{\int\limits_{s'_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{\mathrm{U}\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds'_a,\right.$$

$$\left.-\int\limits_{s''_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{\mathrm{U}\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds''_a\right\},$$

avremo

$$(7)\qquad \Phi_a = \pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{\tau}u\log r\,d\tau-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{\tau}v\log r\,d\tau\right].$$

In modo analogo possiamo operare partendo dagli integrali (VI) e si giunge allora alla seguente conclusione:

Se s_b *è la porzione di* s_a *inclusa nella parte esterna al cono* B *e* s'_b, s''_b *sono le due parti in cui essa viene divisa dal piano* τ, *posto*

$$\text{(b)}\qquad \Phi_b = \frac{1}{b}\int\limits_{s_b}\left\{\sqrt{1-\frac{b^2(t-t_1)^2}{r^2}}\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(\mathrm{U}\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)\right.$$

$$+\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{b^2}{\sqrt{r^2-b^2(t-t_1)^2}}\left[\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\cos nx\right)u\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{y-y_1}{r}\cos nt+\cos ny\right)v\right]\right\}ds_b$$

$$+\int\limits_{s_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(\mathrm{U}\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds_b$$

$$-\frac{\pi}{2}\left\{\int\limits_{s'_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(\mathrm{U}\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds'_b\right.$$

$$\left.-\int\limits_{s''_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(\mathrm{U}\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds''_b\right\},$$

si ha

$$\Phi_b = \pi \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \int_\tau u \log r \, d\tau + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\tau v \log r \, d\tau \right]. \tag{8}$$

7. Dalle (7) e (8) segue immediatamente

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau$$

in cui si è posto per brevità

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

Ma per un noto teorema sui potenziali logaritmici

$$\Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau = 2 \pi u (x_1, y_1, t_1)$$

$$\Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau = 2 \pi v (x_1, y_1, t_1)$$

quindi

$$\left\{ \begin{aligned} u (x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} \right] \\ v (x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} \right]. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Sono queste le formule cercate; esse sono le analoghe della formula (27) della Nota già citata *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.*