Kochanemu kolega
Aleksandrowi Czajewiczowi
w dowód przyjaźni
S Kramsztyk

WYKŁAD
ARYTMETYKI HANDLOWÉJ.

CZĘŚĆ OGÓLNA

obejmująca zastosowanie zasad arytmetyki do potrzeb i zwyczajów kupieckich

przez

Stanisława Kramsztyka

magistra nauk fiz. mat., urzęd. Ban. Pol. i nauczyciela Szk. Handl. Pryw. w Warszawie.

NAKŁADEM SZKOŁY HANDLOWÉJ PRYWATNÉJ.

WARSZAWA.
Drukiem S. Orgelbranda Synów,
Bednarska Nr. 20.

1879.

Дозволено Цензурою.

Варшава.—3 Февраля 1879 года.

Arytmetyka handlowa obejmuje zastosowanie zasad arytmetyki ogólnéj do zwyczajów i potrzeb handlowych; rozpada się przeto na dwie części: na arytmetykę handlową ogólną, wykładającą używane w kupiectwie sposoby prowadzenia rachunków, i na arytmetykę handlową specyalną, rozbierającą szczegółowe zadania, ze stosunków kupieckich wypływające.

Pierwsza przeto część podaje uproszczenia, ułatwienia i skrócenia nastręczające się przy ogólném prowadzeniu rachunków, przechodząc kolejno elementarne działania arytmetyczne i zastosowania proporcyj, czyli tak zwane reguły, z których — rozumie się — największą baczność zwraca na regułę procentu. Druga obejmuje szczegółowe rachunki odnoszące się do różnych gałęzi handlu, zatém rachunki tyczące się monet, weksli, papierów publicznych i towarów.

Głównemi cechami rachunku kupieckiego są szybkość, pewność i porządek

Szybkość jest niezbędnym warunkiem, gdzie rachunek prowadzonym być musi w obec oczekującego interesanta, gdzie więcéj niż gdziekolwiekbądź indziéj brzmi zasada — „czas to pieniądz.“ Szybkość prowadzenia rachunków polega oczywiście na nadaniu im krótkości i zwięzłości.

Pewność jest konieczną, gdzie błąd jest niemożliwym, gdzie omyłka rachmistrza z własnéj jego kieszeni wynagrodzoną być musi; pewność jest wypływem biegłości, która tylko przez wprawę zdobytą być może. Dla téj pewności rachunkowość handlowa poświęca to, co się w matematyce nazywa dokładnością, unika drobnych reszt, poświęca ułamki i t. d.

Porządek umożliwia przejrzenie rachunku, ułatwia odkrycie popełnionego błędu i sprostowanie takowego; ład taki osiągamy, trzymając się pewnéj przyjętéj formy, pewnego stałego sposobu grupowania liczb.

Zachowywanie tych warunków, połączone z pięknem pisaniem cyfr, z unikaniem wszelkich zbytecznych znaków i notowań, uczyni rachunek kupiecki wytwornym. Wytworność ta zaleca się tu tak samo, jak przy prowadzeniu ksiąg handlowych i korespondencyi kupieckiéj, — nieraz stanowić może o powodzeniu w zawodzie handlowym.

Wynikiem wszystkich tych uwag jest praktyczność, — najogólniejsza cecha całéj arytmetyki handlowéj i najistotniejszy warunek każdego rachmistrza.

PRZEDMOWA DO CZĘŚCI OGÓLNÉJ.

Książka niniejsza, ułożona na podstawie najlepszych przewodników niemieckich, odstępuje od nich w ogólności o tyle, że większą baczność zwraca na uzasadnienie każdego sposobu rachunkowego. W wykładach bowiem arytmetyki handlowéj często napotkać można wiele prawideł rachunkowych, podawanych w rodzaju przepisów, bez należytego dowiedzenia. Sądzę wszakże, że prawidło każde tém chętniéj jest przyjmowaném i tém łatwiéj następnie stosowaném, im lepiéj jest rozumianém.

U czytelnika przypuszczałem znajomość zasad arytmetyki ogólnéj i najelementarniejszych początków algebry; dla uprzystępnienia jednak téj książki czytelnikom, którzyby chcieli pomijać wywody teoretyczne, odbitą jest ona drukiem podwójnym; ustępy drukowane pismem drobniejszém mogą być opuszczane przez tych, którym idzie jedynie o nabycie praktycznéj znajomości rachunku, i co zresztą stanowi główne zadanie téj pracy.

Dla téj jednakże części młodzieży, oddającéj się zawodowi handlowemu, która ma czas i możność poświęcenia dłuższego czasu nauce przygotowawczéj, uważałem za stosowne uzupełnić tu braki, jakie zwykle pozostają przy początkowéj nauce arytmetyki. W szkołach handlowych, z natury swéj przepełnionych mnóstwem przedmiotów, matematyka zajmować może szczupły stosunkowo zakres; obowiązkiem arytmetyki jest spełniać, choć w części, to zadanie pedagogiczne, jakie matematyce w ogóle przypada.

To niech posłuży za usprawiedliwienie niektórych ustępów, mogących się w arytmetyce handlowéj wydawać zbytecznemi; praktycznéj stronie książki one zgoła nie uwłaczają.

Rozdział wstępny.

Układ miar dziesiętnych.

§ 1.

Miarą nazywamy wielkość przyjętą za jednostkę do porównywania czyli mierzenia wielkości tegoż samego rodzaju. Jeżeli miara obraną jest z pewnego stosunku zachodzącego w przyrodzie, nazywamy ją naturalną; konwencyjną zaś, jeżeli oznaczoną jest jedynie przez dowolną ugodę. Pierwotne miary niewątpliwie były naturalnemi, ale nie posiadały wielkości ściśle oznaczonéj; często odnosiły się wprost do wymiarów ciała ludzkiego, jak to wskazują dotąd przechowane nazwy stopy, łokcia, sążnia i t. p. Przybliżony ten sposób oznaczania wielkości, jaki dotąd napotykamy u narodów na niskim stopniu ogłady zostających, w miarę rozwoju stosunków społecznych, ustąpić musiał wszędzie miejsca systemowi konwencyjnemu, który aż do końca wieku zeszłego wszędzie, a dotąd w wielu jeszcze krajach się utrzymał. Przedstawia on wszakże liczne niedogodności, które już dawno uczuwać się dawały.

„Ktokolwiek zastanawia się, mówi Laplace, nad olbrzymią liczbą miar używanych, nietylko u różnych narodów, ale nawet u jednego narodu; nad ich podziałami dziwacznemi i do rachunku niedogodnemi; nad trudnością poznania ich i porównywania, — ten zgodzić się musi na to, że jedną z największych usług, jakąby rządy oddać mogły społeczeństwu, byłoby przyjęcie układu miar, którychby podziały jednostajne nadawały się jak najłatwiéj do rachunku, i któreby, w sposób jak najmniéj dowolny, wyprowadzały się z miary zasadniczéj, przez samą przyrodę wskazanéj.“

Usiłowania Laplace'a i innych znalazły chętne przyjęcie w zgromadzeniu ustawodawczém, rządzącem podówczas Francyą, i na jego zlecenie akademija nauk powierzyła 1790 r. opracowanie nowego układu miar komisyi, do składu któréj należeli najznakomitsi ówcześni uczeni, jak Borda, Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet, Delambre, Berthollet i t. d. — Trudne to zadanie komisya spełniła w sposób, przynoszący istotną chlubę Francyi.

„Tożsamość rachunku dziesiętnego, mówi daléj Laplace, z rachunkiem liczb całkowitych nie pozostawia żadnéj wątpliwości co do korzyści, jaką przedstawia podział wszystkich rodzajów miar na części dziesiętne; dla przekonania się o tém, dosyć porównać trudności mnożenia i dzielenia liczb wielorakich z łatwością tychże działań na liczbach całkowitych... Nie wahano się przeto zgoła co do przyjęcia podziału dziesiętnego, a dla osiągnięcia jednostajności w całym układzie miar postanowiono wyprowadzić je wszystkie z jednéj i téjże saméj miary linijnéj i jéj podziałów dziesiętnych. Zadanie zostało przeto sprowadzoném do wyboru téj miary powszechnéj, któréj nadano nazwę *metra.*“

Dwie głównie wielkości przedstawiały się korzystnie w tym celu, — długość wahadła sekundowego, zalecana niegdyś przez Huyghensa, i odległość między dwoma oznaczonemi punktami na powierzchni ziemi, a w szczególności pewna oznaczona część południka, co pierwszy proponował astronom Gabryel Mouton w Lyonie (1670). Były wprawdzie i inne pomysły, — tak np. John Herschell za podstawę układu miar radził użyć dziesięciomilijonową część osi ziemskiéj, inni znów polecali drogę, jaką ciało wolno spadające przebiega w ciągu pierwszej sekundy spadku, — różne te atoli projekty przedstawiają liczne niedogodności. Za długością wahadła sekundowego przemawia to głównie, że oznaczenie jéj jest łatwém i nie pociąga szczególnych kosztów, atoli nie należy zapominać, że długość ta zależy od szerokości geograficznéj, a nadto ulega wpływom miejscowym, zależnym od natury geologicznéj okolicy. Ważniejszą jednak o wiele okolicznością jest to, że długość wahadła sekundowego jest stosunkowo niewielką jednostką miar, a nieznaczny błąd w jej oznaczeniu przez uwielokrotnienie może się stać doniosłym. Pomiar natomiast południka ziemskiego, jakkolwiek jest pracą uciążliwą i kosztowną, choćby był przeprowadzonym z błędem nawet dosyć znacznym, to takowy na drobną cząstkę tego południka bardzo mało wpływa. Dla tych i innych powodów komisya postanowiła za podstawę nowego układu miar użyć długość ćwiartki południka ziemskiego, mianowicie odległość między równikiem a biegunem północnym, i jéj dziesięciomilijonową część przyjęła pod nazwą metra za jednostkę miar długości.

Pomiary południka dokonywane były już na długo przed czasem, gdy przystępywano do owych robót nad wprowadzeniem nowych miar. Rozumie się, że o zmierzeniu całéj ćwiartki południka mowy być nie może, można oznaczyć jéj długość rachunkiem już z kilku stopni południka, wymierzonych pod różnemi szerokościami geograficznemi. Gdyby ziemia była istotną kulą, południk zatém kołem, dostateczną byłoby rzeczą zmierzyć na południku jeden jego stopień, którego granice łatwo przez obserwacye astronomiczne dają się oznaczyć; ale że południk dosyć znacznie odstępuje od figury okręgu koła z powodu spłaszczenia ziemi, konieczna przeto przeprowadzić pomiary stopnia południka pod różnemi szerokościami. — Prace takie, w celu oznaczenia kształtu ziemi, podejmowane były już dawno, a komisya ustanowiona do przeprowadzenia nowego układu miar miała już niejako przygotowany bogaty materyał. Picard w r. 1669 pierwszy użył do pomiaru południka zasad istotnie ścisłych, matematycznych, i zmierzył długość południka we Francyi od Malvoisine do Amiens; w r. 1736 Godin, Bouguer i la Condamine dokonali podobnéj pracy w Peru, a współcześnie Maupertuis, Clairaut i i. w Laponii. Około tegoż samego czasu Cassini de Thury i Lacaille potwierdzili we Francyi pomiary Picarda. Z danych, zebranych przez tych uczonych, można już było wyprowadzić długość południka, „ale gdy nowy pomiar łuku większego jeszcze, mówi znów Laplace, — dokonany na zasadach dokładniejszych, powinien był na korzyść nowego układu miar i wag wzbudzić zajęcie ogólne, któreby mogło przyczynić się do jego rozpowszechnienia, postanowiono zmierzyć łuk południka między Dunkierką a Barceloną.“ Ogromna ta praca powierzoną została Delambre'owi i Méchainowi, który dokonali jéj szczęśliwie pomimo trudności sprowadzonych przez ówczesne zaburzenia polityczne. Opierając się na rezultatach téj pracy, i przyjmując na zasadzie prac dawniejszych, że spłaszczenie ziemi (1) wynosi $\frac{1}{334}$, oznaczono długość ćwiartki południka ziemskiego na 5.130.740 dawnych sążni paryzkich (*toises*). Dziesięciomilijonową część téj długości, t. j. 0,513.074 sąż. par. czyli 443,296 linij par. przyjęto za wartość metra, a rezultat ten przyjętym został postanowieniem ciała prawodawczego d. 4 messidora r. VII (22 czerwca 1799), całkowity zaś układ nowych miar uchwalonym został 2 listopada 1801.

Tak oznaczona wszakże długość metra nie stanowi rzeczywiście dziesięciomilijonowéj części ćwiartki południka ziemskiego; pochodzi to z miejscowych nieregularności łuku zmierzonego i ztąd, że użyta do obliczania wielkość spłaszczenia ziemskiego jest zbyt małą; według późniejszych bowiem obliczeń wynosi takowa $\frac{1}{299}$. W tym już wieku przedsiębraneḿi były liczne pomiary południka, co posłużyło Besslowi do dokładniejszych obliczeń. Według tego astronoma (1841) ćwiartka południka wynosi 5.131.179,811 sąż. par., co zredukowane na wyżéj orzeczoną długość metra legalnego czyni 10.000.855,76 metrów; metr zatém istotny wynosi, według obecnie przyjmowanych wymiarów ziemi, 1,0000856 metra legalnego, ten ostatni jest przeto za małym blisko o 0,0001 swéj długości ($^1/_{10}$ millimetra); różnica ta wszakże jest zbyt małą, iżby wymagała zmiany raz wprowadzonéj jednostki długości, i dla tego, gdy w r. 1870 zebrała się konferencya międzynarodowa, mająca na celu ujednostajnienie miar i wag we wszystkich krajach, nie było zgoła mowy o nowém wyprowadzeniu długości metra, wolnéj od powyższego błędu. Jakkolwiek bowiem, ściśle biorąc, metr nie jest jednostką zupełnie naturalną, to wszakże dogodność układu miar francuzkich polega nie tyle na obiorze téj jednostki, ile na podziale dziesiętnym i na tém, że wszystkie rodzaje miar z téj jednostki się wyprowadzają.

Główném téż zadaniem wspomnionéj wyżéj „konferencyi metrycznéj“ międzynarodowéj jest obmyślenie metod dla otrzymania wybornych kopij metra legalnego francuzkiego, przechowywanego w archiwum państwa (*mètre des archives*), któreby, rozesłane wszyst-

---

(1) Stosunek różnicy osi wielkiéj (równikowéj) i osi małéj (biegunowéj) do osi wielkiéj.

kim rządom, służyć mogły wszędzie za pierwowzory czyli prototypy do przyrządzania miar. Pierwotny metr francuzki odlanym był z platyny, materyałem obecnie przygotowywanych pierwowzorów jest stop 90 części na wagę platyny i 10 części irydu. W ogóle dobre modele miar długości odpowiadać winny wielu warunkom i wywołują mnóstwo trudności mechanicznych, fizycznych i chemicznych, którym nauka dzisiejsza, pomimo wysokiego rozwoju swéj strony technicznéj, zaledwie sprostać jest w stanie.

Układ miar metrycznych już obecnie wprowadzonym jest w większéj części państw ucywilizowanych, a niezadługo zapewne stanie się powszechnym, dla tego dokładne obznajmienie się z takowym jest obecnie niezbędném dla każdego.

§ 2.

Miary długości (*linijne*). Jednostką miar długości jest *metr*= 1,406 arszyna=1,734 łokcia war.

Dla oznaczenia nazw podziałów drobniejszych miary zasadniczéj używa się, dla miar wszelkiego rodzaju, liczebników łacińskich *deci*, *centi*, *milli*; dla oznaczenia zaś miar większych czyli wielokrotnych miary zasadniczéj liczebników greckich *deka*, *hekto*, *kilo*, *myria*. W ten sposób miary długości, poczynając od najwyższych, przedstawiają szereg następny, w którym każda miara poprzednia dzieli się na dziesięć następnych:
myriametr (Mm), *kilometr* (Km), *hektometr* (Hm), *dekametr* (Dm), *metr* (m), *decimetr* (dm), *centimetr* (cm), *millimetr* (mm).

Jeden metr dzieli się na 10 dm, 1 dm na 10 cm, 1 cm na 10 mm, czyli 1 m=10 dm=100 cm=1000 mm, 10 m stanowią 1 Dm, 10 Dm 1 Hm, 10 Hm 1 Km, 10 Km 1 Mm. Zamiana miar wyższych na niższe i niższych na wyższe nie przedstawia zatém żadnéj trudności; tak np. 7 Dm=70 m=700 cm=7000 mm =0,7 Hm=0,07 Km. Długość 7 Hm 8 Dm 9 m 7 dm 8 mm stanowi 789,708 m, albo 7,89708 Hm, albo 78,9708 Dm, albo 7897,08 dm, albo 789708 mm, albo 0,789708 Km i t. d. Długość 508,084 m. znaczy 5 Hm 8 m 8 cm 4 mm.

Myriametr i kilometr są miarami drogowemi.

Miary powierzchni (kwadratowe). Jednostką miar kwadratowych jest *metr kwadratowy*, t. j. kwadrat, którego każdy bok równy jest metrowi. Z zasad geometryi wnieść łatwo, że 1 m □ = 100 dm □ = 10000 cm □ = 1.000.000 mm □, że na 1 Dm □ idzie 100 m □ i t. d. — w ogólności każda miara wyższa dzieli się nie na 10 a na 100 miar niższych. Należy o tém pamiętać zawsze przy odczytywaniu i wypisywaniu miar powierzchni wyrażonych w metrach kwadratowych. Tak np. 460823,0473 m. □ znaczą 46 Hm 8 Dm 23 m 4 dm 73 cm □; a 7 Dm 8 m 53 dm 7 cm □ czynią 708,5307 m □.

Gdy idzie o większe powierzchnie rolne, bierze się za jednostkę 1 Dm kwadratowy, t. j. kwadrat, którego bok równa się dekametrowi czyli 10 metrom; jednostka taka nazywa się *arem (are)*, a cały szereg miar rolnych jest: *myriar* (Ma, 10000 arów), *kilar* (Ka, 1000 arów), *hektar* (Ha, 100 arów), *dekar* (Da, 10 arów), *ar*, *deciar* (da, 0,1 ara), *centiar* (ca, 0,01 ara), milliar (ma, 0,001 ara); 1 ar czyni zatém 100 m □, 1 Ha = 10000 m □, 1ca = 1 m □.

Jednostką zwykłą miar rolnych jest hektar.—Oprócz niego używa się tylko myriar, ar, centiar.

Miary objętości (sześcienne, kubiczne). Jednostką miar objętości jest sześcian, t. j. bryła ograniczona sześciu ścianami kwadratowemi, którego każda krawędź wynosi 1 metr. Z zasad geometryi wypływa, że 1 m sześc. = 1000 dm sześc., a na 1 Dm sześc. idzie 1000 m sześc. i t. d.—każda miara wyższa zawiera 1000 miar bezpośrednio niższych., tak np. 27 m., 3 dm., 25 cm. sześc. czynią 27,003025 m. sześc., albo 0,027003025 Dm sześc.

Gdy miary objętości odnoszą się do drzewa opałowego lub do materyałów budowlanych, jednostka zasadnicza czyli metr sześcienny nosi nazwę *stera* (*stère*). Oprócz jednak *dekasteru* czyli dziesięciu sterów nie używa się osobnych nazw dla różnych podziałów téj miary.

Miary objętości dla ciał ciekłych i sypkich. Jednostką zasadniczą tych miar jest *litr*, który jest decymetrem sześciennym, stanowi zatém tysiączną część metra sześciennego. Co do podziałów dziesiętnych litra są w używaniu *hektolitr* (Hl, 100 litrów), *dekalitr* (Dl, 10 litrów), *litr* (l), *decilitr* (dl, 0,1 litra), *centilitr* (cl, 0,01 l.).

Litr jest zwykłą jednostką handlową, odpowiadającą kwarcie;

dekalitr i hektolitr zastępują miary objętości większe, jak korzec i t. p. *Kilolitr*, równający się metrowi sześciennemu, zgoła się nie używa.

Wagi. Jednostką zasadniczą wag jest *gram* (*gramme*), ciężar jednego centymetra sześciennego wody dystylowanéj, ważonéj w temperaturze 3,2°C, t. j. w stanie największéj gęstości wody.

Szereg ogólny wag jest:

Myriagram (Mg, 10000 g), *kilogram* (Kg, 1000 g) *hektogram* (Hg, 100 g), *dekagram* (Dg, 10g), *gram* (g), *decigram* (dg, 0,1 g), *centigram* (cg, 0,01 g), *milligram* (mg, 0,001 g).

Zwykłą wagą handlową jest kilogram, czyniący z górą dwa funty różnych krajów; ½ Kg. zastępuje mniéj więcéj znaczenie funta. [1]

Monety nie wyprowadzają się z metra w tak prosty sposób, jak inne miary. Jednostką nowych monet francuzkich jest *frank (franc)*, przedstawiający wartość pięciu gramów stopu, złożonego z 9 części srebra i 1 miedzi. Frank dzieli się na 100 *centymów* (*centimes*); inne podziały nie są używane. Nie wszystkie jednak państwa, które wprowadziły miary metryczne, przyjęły tę jednostkę monetarną.

Dla wykazania korzyści, jaką przedstawia łączność różnych rodzajów miar, będąca zasadą układu metrycznego, przytoczymy tu jeden tylko przykład. Ciężar właściwy, jak wiadomo, jest to liczba okazująca, ile razy dane ciało cięższém jest od wody; ponieważ zaś gram jest ciężarem jednego centymetra sześciennego wody, przeto ciężar właściwy wyraża bezpośrednio ciężar centymetra sześciennego danego ciała w gramach. Tak np. jeżeli

---

[1] Jest tu pewne odstępstwo od miar długości i miar objętości, gdyż jednostka zasadnicza wag nie jest jednostką główną dla zwykłych stosunków handlowych. W istocie też komisya, któréj zawdzięczamy układ miar dziesiętnych, miała początkowo zamiar za jednostkę wag użyć ciężaru jednego decymetra sześciennego wody, t. j. obecnego kilograma, któremu proponowano nadać nazwę *grave*. W takim jednak razie tysiączna część tego ciężaru, *milligrave*, odpowiadałaby obecnemu gramowi i byłaby jeszcze znacznie większą od ciężarów używanych przy ważeniach nieco czulszych. Trzebaby zatém było albo podział takiego milligrawa prowadzić daléj aż milijonigrawa, albo nadać mu nową nazwę, jak proponowano *gravet*, i tu znów użyć dalszego podziału aż do *milligravet*,—w obu jednak razach jednostajność słownictwa miar byłaby zerwaną. Z drugiéj strony miary wyższe, jak hektograw, kilograw, byłyby wagami zbyt wielkiemi względem używanych pospolicie w handlu. Z tych powodów za jednostkę zasadniczą wag obrano gram w dzisiejszém jego znaczeniu.

ciężar właściwy stali wynosi 7,5, a ciężar właściwy oleju skalnego (nafty) 0,8, znaczy to, że jeden centymetr szcścienny żelaza waży $7^1/_2$ grama, a centymetr sześcienny oleju skalnego 8 decygramów. Metr zatem sześcienny żelaza (1.000.000 cm sześc.) ważyć będzie 7,5 × 1.000.000 gramów = 7500 kilogramów, a litr oleju skalnego (1000 cm sześc.) 8 × 1000 decigramów = 800 gramów.

Uwaga. Miary i wagi różnych krajów na końcu tomu.

Rozdział I.

Ułatwienia i skrócenia w czterech działaniach arytmetycznych.

Sposób prowadzenia rachunku oraz własności różnych liczb w wielu bardzo razach prowadzą do istotnych uproszczeń, pozwalających często rachunek wykonać prędzéj, niż według ogólnych zasad arytmetyki szkolnéj. Korzystne używanie wszelkich ułatwień rachunkowych wymaga jednak dwu warunków: zrozumienia i wprawy. Bez należytego rozumienia danego sposobu niepodobna nabrać pewności w jego używaniu, przy braku wprawy nie dostrzegamy szybko, jakie uproszczenie w danym razie być może najkorzystniejszém, a sama robota, prowadzona nieśmiało, nie dosyć prędko się wykonywa.

Wszelkie ułatwienia rachunkowe z początku wydają się jakby zabawkami tylko arytmetycznemi, bez istotnéj wartości, i przyjmowane są w ogólności z pewną nieufnością. Nabierają one należytéj wagi dopiero po po pewném oswojeniu się z niemi, ale wtedy stają się niewątpliwie szacownym nabytkiem dla każdego, co wiele z liczbami ma do czynienia.

Dodawanie i odejmowanie.

§ 3.

Łatwo wnieść, że o istotnych ułatwieniach przy *dodawaniu* mowy być nie może. Pewien pośpiech w robocie zyskujemy, przyzwyczajając się chwytać naraz sumę dwu cyfr po sobie w danéj kolumnie następujących; mając np. do dodania:

7+8+4+6+8+1+3+4,

zbieramy te liczby po dwie, t. j. mówimy, 15, 25, 34, *41*, tak jakbyśmy do dodania mieli liczby: 15+10+9+7. Uwaga ta nadaje się zwłaszcza, gdy suma dwu cyfr tuż obok siebie lub blisko położonych stanowi 10. Cyfry jednakowe kilka razy występujące łączyć można przez proste mnożenie; tak np. summę liczb 6+7+7+4+7+5+6 znajdujemy, łącząc 10 (6+4) +21 (3×7) +11, czyli mówiąc: 10, 31, *42*.

Jedyném istotnie praktyczném sprawdzeniem czyli próbą dodawania jest powtórne dodanie; jeżeliśmy np. pionową kolumnę cyfr dodali raz idąc od góry ku dołowi, zbieramy ją powtórnie idąc od dołu ku górze. Jeżeli w obu razach suma wypada jednakowa, możemy ją uważać za dobrą. Przytém korzystném jest wypisywanie sum oddzielnych kolumn, tak np.

75486,27	36
3514,32	43
610832,73	47
49726,51	52
25384,73	42
10489	48
721384,26	34
59146,48	16
389723,75	1992771,66
47083,61	

Pożytek z takiego postępowania polega na tém, że gdy przy powtórném dodawaniu znajdziemy odmienną summę pewnéj kolumny, to błąd znajdować się może tylko w téj kolumnie i ją tylko należy raz jeszcze przesumować, nie rozpoczynając dodawania od samego początku.—Można też bezpośrednio łączyć dziesiątki jednéj kolumny z kolumną następną, przyczém sumy oddzielne powyższego dodawania przedstawią się jak następuje:

36
46
―――
51
57
47
―――
52
39
19

Suma szukana przeto wypisze się wprost: 1.992.771,66. W tym razie, w przypadku napotkania błędu w pewnéj kolumnie, należy powtórzyć i sumowanie kolumny poprzedniéj.

Przy sumowaniu ksiąg handlowych napotykamy zwykle długie szeregi liczb, a długie takie dodawania stanowią trudność dla początkujących; ułatwić sobie można robotę, dzieląc te liczby na grupy, których sumy zbieramy oddzielnie. Tak np.

73486	
9858	
27161	
32000	
15495	
35617	
42493	
80612	316722
30571	
46273	
8371	
52479	
30628	
2154	
28356	
32107	230939
14923	
31685	
13458	
14615	
30172	
70918	
81522	257293
	804954

Przy niewielkiéj jednak wprawie postępowanie takie staje się zgoła niepotrzebném. Dodając według poprzednich wskazówek, mamy tu:

104
115
109
84
80
804954

§ 4.

Zwykły, szkolny sposób *odejmowania* z tak zwaném „pożyczamiem“ przedstawia wiele niedogodności i stanowczo zarzuconym być winien. Należy odejmować przez dopełnienia, to znaczy, wynajdywać wprost liczbę, która dodana do odjemnika wydaje odjemną; to jest mówimy nie 5 od 7 . . . *2*, ale 5 a *2* . . . 7. Jeżeli pewna cyfra odjemnika jest większą od odpowiedniéj cyfry odjemnéj, nie zmniejszamy następnéj (idąc od ręki prawéj ku lewéj) cyfry odjemnéj, ale powiększamy następną cyfrę odjemnika, co do jednakiego wypadku prowadzi. Tak np. w odejmowaniu:

$$\begin{array}{r} 867 \\ 293 \\ \hline 574 \end{array}$$

mówimy: 3 a *4* . . . 7, 9 a *7* . . . 16, 1 a 2 . . . 3 a *5* . . . 8. Najmniejszą bowiem liczbą, zakończoną na 6, od któréj odjąć można 9 jest 16, szukamy tedy dopełnienia 9 do 16 t. j. 7. Następna przeto cyfra, t. j. 8 została zmniejszoną o 1 i należy odejmować 2 od 7, ale zamiast zmniejszyć 8 powiększamy o 1 odpowiednią cyfrę odjemnika t. j. 2. W ten sposób odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 4300261 \\ 3804507 \\ \hline 495754 \end{array}$$

prowadzimy, mówiąc: 7 a *4* . . . 11, 1 a 0 . . . 1 a *5* . . . 6, 5 a *7* . . . 12, 1 a 4 . . . 5 a *5* . . . 10, 1 a 0 . . . 1 a *9* . . . 10, 1 a 8 . . . 9 a *4* . . . 13, 1 a 3 . . . 4 a *0* . . . 4, t. j. wypisujemy zawsze tę cyfrę, którą wymawiamy po wyrazie *a*.

Mały na pozór użytek z takiego postępowania okazuje się istotnym, jeżeli idzie o odjęcie od liczby danéj iloczynu z pewnéj liczby przez liczbę jednocyfrową, jak np.

$$\begin{array}{rr} & 7402673 \\ \div & 8\times 650497 \\ \hline & 2198697 \end{array}$$

Mamy tu najpierw odjąć $8\times 7=56$ od 3, ale że najmniejszą liczbą zakończoną na 3, od któréj odjąć można 56 jest 63, odejmujemy 56 od 63, t. j. mówimy 56 a *7* . . . 63; w miejsce przeto 7 dziesiątków mamy obecnie tylko 1 dziesiątek, od którego odjąć należy $8\times 9=72$, liczbę tę przeto 72 odejmujemy od 81, jako najmniejszéj liczby zakończonéj na 1, od któréj odjąć można 72, i otrzymamy $81-72=9$; zamiast jednak zmniejszać o 6 cyfrę odjemnéj 7 powiększamy o 6 odpowiednią cyfrę odjemnika, i zamiast różnicy $81-72$ bierzemy równą jéj różnicę $87-78$, t j. mówimy; 8 razy 9 . . . 72 a 6 78 a *9*... 87, i t. d. Całą zatém powyższą różnicę wynajdujemy, mówiąc:

8 razy 7 . . . 56 a *7* . . . 63
8 „ 9 . . . 72 a 6 . . . 78 a *9* . . . 87
8 „ 4 . . . 32 a 8 . . . 40 a *6* . . . 46
8 „ 0 . . 0 a 4 . . . 4 a *8* . . . 12
8 „ 5 . . . 40 a 1 . . . 41 a *9* . . . 50
8 „ 6 . . . 48 a 5 . . . 53 a *1* . . . 54
5 a *2* . . . 7

Ważność tego postępowania w dzieleniu jest widoczną.

Zupełnie tak samo odjąć można bezpośrednio od jednéj liczby sumę kilku innych:

1746832,94
÷ { 324518,13
714369,58
23490,39 }
684454,84

t. j. mówimy 9+8+3 . . . 20 a *4* . . . 24,
2+3+5+1 . . . a *8* . . . 19
1+0+9+8 . . . a *4* . . . 22
i t. d.

Przykłady dla wprawy czytelnik sam zadać sobie może.

Mnożenie.

§ 5.

Uwagi ogólne. Spożytkowanie cyfry 1 w mnożniku. W mnożeniu napotykamy znaczną liczbę istotnych ułatwień, które po wprawie pozwalają rachunek w daleko krótszym przeprowadzić czasie, niż przy trzymaniu się zwykłéj, szkolnéj rutyny. Dogodnie jest przedewszystkiém pisać mnożnik nie pod mnożną, a obok niéj; zamiast np. pisać

7946
327

należy umieszczać te liczby obok siebie: 7946×327, co zawsze prowadzi do oszczędności miejsca, a często do oszczędności cyfr, jeżeli mianowicie w mnożniku znajduje się cyfra 1. Tak np.:

```
   7489×731
  23467
 52423
 -------
 5484459
```

W tym przykładzie iloczyn mnożnéj przez pierwszą cyfrę mnożnika, t. j. przez 1, jest samą tą mnożną, dla tego bez powtarzania takowéj uważamy ją już za pierwszy cząstkowy iloczyn. Ale z tejże saméj uwagi korzystać można i wtedy, gdy 1 nie jest ostatnią cyfrą mnożnika, ale zajmuje w nim którekolwiek miejsce, pamiętając tylko o należytém podpisywaniu cząstkowych iloczynów jednych pod drugiemi, tak aby cyfry jednakiego rzędu znajdywały się zawsze w jednéj kolumnie pionowéj. Tak np.

```
 7489  ×173         7489×317
 52423             23467
  23467              52423
 -------           -------
 1296597           2474013
```

W wielu zresztą innych przypadkach korzystném być może rozpoczynanie mnożenia nie od jedności mnożnika, a od któréjkolwiek innéj jego cyfry, wprawić się przeto należy w ten sposób wypisywania iloczynów cząstkowych, aby w danym razie nie przedstawiał trudności.

Mnożna i mnożnik mają wprawdzie odmienne znaczenie ([1]), ale że iloczyn jest zawsze jednakim, którąkolwiek z liczb danych do mnożenia bierzemy za mnożnik, należy zatém używać za mnożnik liczby złożonéj z mniejszéj liczby cyfr albo też inne dogodności przedstawiającéj.

---

[1]) Mnożenie liczb całkowitych jest działaniem, za pomocą którego mnożną uwielokrotniamy tyle razy, ile mnożnik ma w sobie jedności; mnożenie zatém przez liczbę całkowitą jest jedynie skróconém dodawaniem; 5×3 znaczy toż samo co 5 dodać do siebie 3 razy: 5+5+5. Rozmaitość zatém znaczenia mnożnéj i mnożnika wyraźnie się z tego okazuje. Iloczyn atoli jest ten sam, czy mnożymy 5×3 czy 3×5, bo trzykrotne powtórzenie 5 jedności daje tenże sam wypadek, co pięciokrotne powtórzenie 3 jedności. Właściwy wszakże swój charakter mnożna i mnożnik zachowują zawsze, z któréjkolwiek strony znaku mnożenia są umieszczone. — Łatwiéj się to okazuje w zastosowaniach. Weźmy przykład najprostszy. Jeżeli funt towaru kosztuje 5 rs. ile kosztują 3 funty. Mówimy, że trzy funty kosztują *trzy razy* tyle co 1 funt, należy zatém cenę jednego funta t. j. 5 rs. pomnożyć przez 3, 5 rs. ×3=15 rs. Ale zupełnie toż samo będzie, gdy 5 rs. będą ceną jednego cetnara, łokcia i t. d. Mnożnik zatém musi być zawsze liczbą niemianowaną, a iloczyn jest liczbą tego rodzaju co mnożna.

475 × 3987
19935
27909
15948
1893825

314 × 987
2961
3948
309918

60104 × 479
1916
2874
28789816

Jeżeli w mnożniku jedna cyfra jest sumą dwu lub trzech innych cyfr, to iloczyn mnożnéj przez tę cyfrę będzie sumą iloczynów mnożnéj przez cyfry, których ona jest sumą, bo A. (3+5) = A 8. Tak np.

8597 × 853
25791
42985
68776 . . . . . (8=5+3)
7333241

W tym przykładzie iloczyn mnożnéj przez 8 jest sumą dwu poprzednich cząstkowych iloczynów tejże mnożnéj przez 3 i 5, dla otrzymania przeto trzeciego cząstkowego iloczynu dodajemy dwa poprzednie, biorąc je, rozumie się, w znaczeniu bezwzględném, to jest nie uważając, że pierwszy przedstawia jedności, a drugi dziesiątki.

Tak samo byśmy postąpili, gdyby porządek powyższych cyfr mnożnika był innym, jak np. 8597 × 835
25791
42885
68776
7178495

W liczbie 8917 jest 17=8+9, zatém

41385 × 8917
331080
372465
17=8+9 . 703545
369030045

8179 × 41385
331080
372465
17=8+9 . . 703545
338487915

Uważać tylko należy, że w pierwszém np. z dwu ostatnich mnożeń trzeci iloczyn cząstkowy względem drugiego występować winien o 2 cyfry, bo iloczyn mnożnéj przez 9 przedstawia setki, iloczyn zaś przez 17 jedności. Ale i mnożenie przez 9 jest w powyższych przykładach zbytecznem, dosyć do iloczynu mnożnéj przez 8 dodać mnożną.

Zadania.

426×71	68275×1345
5497×19	46108×89
7548×143	37249×78
×413	83547×459
×314	321694×594
719×54837	432185×9189
5003×19547	506723×7815
3242×872439	×7158
5381×7943	×1587
1538×4726	1395×706493
5318×47693	6159×43809
5183×764923	9918×49637
6500×35927	9180×3759
23002×4967	97431×49768

§ 6.

Mnożenie przez 11, 111, 1111 i t. d. Dajmy, że mamy pomnożyć:

$$\begin{array}{r} 3526134\times 11 \\ 3526134 \\ \hline 38787474 \end{array}$$

Dostrzegamy tu łatwo, że dodawanie obu cząstkowych iloczynów dokonaném być może już na cyfrach saméj mnożnéj. Ostatnia cyfra mnożnéj stanowi ostatnią cyfrę iloczynu, następne jego cyfry tworzą się przez dodanie każdych dwu po sobie następujących cyfr mnożnéj, biorąc każdą po dwa razy, a pierwsza czyli najwyższa cyfra iloczynu jest znowu powtórzeniem najwyższéj cyfry mnożnéj. Iloczyn np. przez 11 liczby 654321, w któréj każda cyfra znaczeniem swojém wskazuje zarazem miejsce, na którém się znajduje, idąc od ręki prawéj ku lewéj, złożonym jest, idąc w tymże samym porządku, z sum następujących cyfr: 1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5, 5+6, 6, jest zatém

$$\frac{654321 \times 11}{7197531}$$

tak samo $\frac{670385 \times 11}{7374235}$ $\frac{2049708 \times 11}{22656788}$

W podobny sposób otrzymać można wprost iloczyn przez 111:

$$\begin{array}{r} 654321 \times 111 \\ 654321 \\ 654321 \\ \hline 72629631 \end{array}$$

Otrzymujemy zatém iloczyn żądany, zbierając sumy: 1, 1+2, 1+2+3, 2+3+4, 3+4+5, 4+5+6, 5+6, 6. Np.

$\frac{470385 \times 111}{52212735}$ $\frac{29500832 \times 111}{3274592352}$

Iloczyn liczby przez 1111 otrzymuje się według typu: 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 2+3+4+5, 3+4+5+6, 4+5+6, 5+6, 6; np.

$\frac{407853 \times 1111}{453124683}$ $\frac{89796 \times 1111}{99763356}$

Zadania.

9034 × 11	7328 × 111	4923 × 1111
48796 × 11	160047 × 111	3000894 × 1111
8004716 × 11	37986 × 111	4922268 × 1111
32546 × 110	8756 × 1110	326085 × 11110
478900 × 11	54300 × 11100	472600 × 1111

§ 7.

Mnożenie przez 12, 13, 14..., 21, 31, 41.... odbywać się może także podług skazówek poprzedniego §, dodając do każdéj cyfry mnożnéj iloczyn sąsiedniéj cyfry przez cyfrę mnożnika stojącą obok jedności:

$$\begin{array}{r} 457 \times 16 \\ 2742 \\ \hline 7312 \end{array}$$

Pierwsza cyfra iloczynu 2 powstaje z pomnożenia jedności mnożnéj 7 przez jedności mnożnika 6—,$7\times 6=42$; 4 dziesiątki zachowują się do dodania do dziesiątków iloczynu, które tu tworzą się z pomnożenia dziesiątków mnożnéj przez jedności mnożnika i jedności mnożnéj przez dziesiątki mnożnika,—a że tych ostatnich jest tylko 1, zatém dziesiątki iloczynu otrzymują się z dodania do jedności mnożnéj iloczynu z jéj dziesiątków przez jedności mnożnika (i dziesiątków pozostałych z poprzedniego mnożenia); podobnież setki iloczynów tworzą się z pomnożenia setek mnożnéj przez jedności mnożnika i dziesiątków mnożnéj przez dziesiątki mnożnika, t. j. przez 1, czyli, otrzymujemy cyfrę setek, dodając do dziesiątków mnożnéj iloczyn z jéj setek przez jedności mnożnika (i dziesiątki pozostałe z poprzedniego mnożenia); w ogólności, w tym razie każda cyfra iloczynu otrzymuje się, dodając do cyfry mnożnéj iloczyn z cyfry następnéj (idąc od ręki prawéj ku lewéj) przez jedności mnożnika, i zachowując dziesiątki dla dodania do następnego iloczynu. Możemy zatem wypisać wprost iloczyn.

$$\frac{457\times 16}{7312},$$

mnożąc, jak następuje: 6 razy 7 . . . 4*2*, 6 razy 5 . . . 30 a 4 . . . 34 a 7 . . . 4*1*, 6×4 . . . 24 a 4 . . . 28 a 5 . . . 3*3*, 4 a 3 . . . *7*.

Tak samo: $$\frac{360725\times 17}{6132325}$$

Jakkolwiek w mnożenie to bardzo szybko wprawić się można, korzystniéj zawsze będzie pamiętać iloczyny liczb jednocyfrowych przez 12, 13 . . . 19, czyli tak zwaną większą tabliczkę mnożenia, i mnożyć wprost przez te liczby dwucyfrowe, jak przez jednocyfrowe.

Skazówki powyższe posłużyć nam mogą natomiast do mnożenia przez liczby dwucyfrowe zakończone jednością t. j. przez 21, 31.... Tutaj do każdéj cyfry mnożnéj dodajemy iloczyn cyfry poprzedniéj (idąc od ręki prawéj ku lewéj) przez dziesiątki mnożnika:

$$\frac{365\times 41}{14965},$$

t. j. wykonywamy: *5*, 4×5 . . . 20+6 . . . 2*6*, 4×6 . . . 24+2 . . . 26+3 . . . 2*9*, 4×3 . . . 12+2 . . . *14*.

Np. $$\frac{402657\times 31}{12482367} \qquad \frac{3760792\times 71}{267016232}$$

Rozumie się, że w podobny sposób, łącząc odrazu iloczyny cząstkowe, możnaby otrzymywać bezpośrednio iloczyny przez inne liczby dwucyfrowe a nawet większe, ale mnożenie takie, jako wymagające więcéj natężenia uwagi i łatwo prowadzące do pomyłek, polecaném być nie może.

§ 8.

W mnożniku jedna cyfra lub grupa cyfr jest wielokrotnością innéj cyfry lub grupy cyfr. Mnożąc przez 84, gdzie $8=4\times 2$, gdy już otrzymamy iloczyn mnożnéj przez 4, dla otrzymania drugiego iloczynu cząstkowego, przez 8, dosyć jest pomnożyć pierwszy iloczyn cząstkowy przez 2, bo $A\times 8=A\times 4\times 2$.

$$\begin{array}{rl} 706543\times 84 & \\ \hline 2826172 & \ldots\ldots \times 4 \\ 5652344 & \ldots\ldots \times 2 \\ \hline 59349612 & \end{array}$$

Podobnie:

$$\begin{array}{rl} 472065\times 567 & \\ \hline 3304455 & \\ 26435640 & \ldots\ldots 56=7\times 8 \\ \hline 267660855 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 83758\times 672 & \\ \hline 502548 & \\ 6030576 & \ldots 72=6\times 12 \\ \hline 56285376 & \end{array}$$

W pierwszym przykładzie występujemy w drugim iloczynie o jednę cyfrę ku ręce lewéj, bo mnożąc przez 7, otrzymujemy w iloczynie jedności, mnożąc przez 56, otrzymujemy dziesiątki; w przykładzie drugim występujemy w drugim iloczynie o 2 cyfry ku ręce prawéj, bo mnożąc przez 6, otrzymujemy setki, mnożąc przez 72, otrzymujemy jedności.

$$\begin{array}{rl} 15105\times 367426 & \\ \hline 5511390 & \\ 38579730 & \ldots\ldots 105=15\times 7 \\ \hline 5549969730 & \end{array}$$

Mnożymy tu wprost przez 15, a następnie tak otrzymany iloczyn przez 7.

Zadania.

470632×2398	70928×10812
819×740892	1378×619346
366×78425	14112×43882
936728×927	872407×8414
257291×637	14412×679382
546×369182	349766×1498

§ 9.

Rozłożenie mnożnika na czynniki pozwala w ogólności mnożenie wykonać prędzéj, bo oszczędza dodawanie iloczynów cząstkowych. Mnożąc np. przez $72 = 8 . 9$, możemy mnożną pomnożyć przez 8, a tak otrzymany iloczyn przez 9; iloczyn z tego drugiego mnożenia wypadający będzie żądanym.

$$
\begin{array}{rl}
6508342 \times 72 & \\
\hline
52066736 & \quad (8 \\
\hline
468600624 & \quad (9
\end{array}
$$

Rozumie się, że porządek czynników nie ma wpływu na iloczyn.

Zadania.

6940×36	675489×144
5334×56	54783×96
81×51637	121×305741
64×87716	83427×91
32159×49	55×417283
42673×88	32457×444
30857×770	69724×6660

§ 10.

Mnożenie przez liczbę bliską 100, 1000, 10,000 i t. d. odbywa się łatwiéj, jeżeli od iloczynu mnożnéj przez 100, 1000 i t. d. odejmujemy iloczyn jéj przez dopełnienie mnożnika do 100, 1000 i t. d.; bowiem $A . 99 = A(100 - 1) = A . 100 - A$; aby zatém pomnożyć daną liczbę przez 99, należy ją przez (wyraźne lub tylko domyślne) dopisanie zer pomnożyć przez 100 i od tego iloczynu odjąć liczbę daną. Podobnie, aby liczbę pomnożyć przez 997 należy od iloczynu jéj przez 1000 odjąć iloczyn jéj przez 3.

$$\begin{array}{r} 87356 \times 99 \\ 87356 \\ \hline 8648244 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 705483 \times 997 \\ 2116449 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3 \\ \hline 703366551 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43796 \times 989 \\ 481756 \;.\;.\;.\;.\;.\; (11 \\ \hline 43314244 \end{array}$$

Zresztą, z uwagi téj korzystać można i wtedy, gdy mnożnik jest biiskim innéj liczby okrągłéj, jak 600, 5000 i t. d.:

$$\begin{array}{rl} 5877 \times 4992 & \\ \hline 29385 & (5 \\ 47016 & (8 \\ \hline 29337984 & \end{array}$$

Z a d a n i a.

37049 × 99	44312 × 989
875463 × 990	89526 × 9994
57428 × 98	4167 × 49
36083 × 930	37165 × 593
478536 × 999	60983 × 8995
30684 × 997	92177 × 4988

§ 11.

Mnożenie przez liczbę, która jest częścią wielokrotną 10, 100 1000 i t. d. Łatwość mnożenia przez potęgi z 10 t. j. przez 100, 1000 i t. d. i tu prowadzi do ważnych ułatwień, bo pomnożyć liczbę przez 25 ($^{100}/_4$) jest toż samo, co wziąć część czwartą liczby stokrotnéj; pomnożyć liczbę przez 5, toż samo, co wziąć połowę liczby dziesięciokrotnéj.

$$\begin{array}{r} 7849 \times 25 \\ \hline 196225 \end{array} \; :4 \qquad \begin{array}{r} 837054 \times 5 \\ \hline 4185270 \end{array} \; :2$$

Oto np. niektóre liczby, będące częściami wielokrotnemi 10, 100, 1000:

$5 = {}^{10}/_2$, $3^1/_3 = {}^{10}/_3$, $2^1/_2 = {}^{10}/_4$.

$50={}^{100}/_{2}$, $33^{1}/_{3}={}^{100}/_{3}$, $25={}^{100}/_{4}$, $16^{2}/_{3}={}^{100}/_{6}$, $12^{1}/_{2}={}^{100}/_{8}$, $11^{1}/_{9}={}^{100}/_{9}$, $9^{1}/_{11}={}^{100}/_{11}$, $8^{1}/_{3}={}^{100}/_{12}$, $6^{1}/_{4}={}^{100}/_{16}$.
$500={}^{1000}/_{2}$, $333^{1}/_{3}={}^{1000}/_{3}$, $250={}^{1000}/_{4}$, $166^{2}/_{3}={}^{1000}/_{6}$, $125={}^{1000}/_{8}$, $83^{1}/_{3}={}^{1000}/_{12}$.

i t. d.

Więc np.

$$\begin{array}{ll} 87654 \times 33^{1}/_{3} & \\ \hline 2921800 & :3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 34853 \times 16^{2}/_{3} & \\ \hline 580883^{2}/_{3} & :6 \end{array}$$

Niemniejszą dogodność przedstawiają i liczby będące dopełnieniami powyższych do 10, 100, 1000:
$6^{2}/_{3}=10-3^{1}/_{3}=10-{}^{1}/_{3}.\,10$, $7^{1}/_{2}=10-2^{1}/_{2}=10-{}^{1}/_{4}.\,10$.
$66^{2}/_{3}=100-{}^{1}/_{3}.100$, $75=100-{}^{1}/_{4}.100$, $83^{1}/_{3}=100-{}^{1}/_{6}.100$, $87^{1}/_{2}=100-{}^{1}/_{8}.\,100$, $91^{2}/_{3}=100-{}^{1}/_{12}.100$.
$666^{2}/_{3}=1000-{}^{1}/_{3}.\,1000$, $833^{1}/_{3}=1000-{}^{1}/_{6}.1000$, $875=1000-{}^{1}/_{8}.\,1000$ i t. d.

Aby np. pomnożyć liczbę przez $83^{1}/_{3}$, mnożymy ją przez 100 i odejmujemy od tego iloczynu część szóstą:

$$\begin{array}{ll} 58869 \times 83^{1}/_{3} & \\ 981150 & :6 \\ \hline 4905750 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 50264 \times 75 & \\ 1256600 & :4 \\ \hline 3769800 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 70635 \times 875 & \\ 8829375 & :8 \\ \hline 61805625 & \end{array}$$

I inne zresztą mnożniki dają się pod powyższe uwagi podciągnąć, jak:
$15=10+{}^{1}/_{2}.10$, $37^{1}/_{2}={}^{100}/_{4}+{}^{1}/_{2}.{}^{100}/_{4}$, $62^{1}/_{2}={}^{1}/_{2}.100+{}^{1}/_{4}.{}^{100}/_{2}$, $41^{2}/_{3}={}^{100}/_{3}+{}^{1}/_{4}.{}^{100}/_{3}$, $58^{1}/_{3}={}^{100}/_{2}+{}^{1}/_{6}.{}^{100}/_{2}$, $133^{1}/_{3}=100+{}^{1}/_{3}.100$, $375={}^{1000}/_{4}+{}^{1}/_{2}.\,{}^{1000}/_{4}$, $625={}^{1000}/_{2}+\frac{1}{4}.\,{}^{1000}/_{2}$ albo $={}^{10000}/_{16}$ i t. d.

Aby np. liczbę pomnożyć przez $37^{1}/_{2}$, bierzemy czwartą część téj liczby pomnożonéj przez 100 i do téj czwartéj części dodajemy jéj połowę; aby liczbę pomnożyć przez $133^{1}/_{3}$, do liczby pomnożonéj przez 100 dodajemy tegoż iloczynu część trzecią i t. d. Np.

$$\begin{array}{ll} 87645 \times 37^{1}/_{2} & \\ \hline 2191125 & 25={}^{100}/_{4} \\ 1095562^{1}/_{2} & 12^{1}/_{2}={}^{25}/_{2} \\ \hline 3286687^{1}/_{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 65384 \times 133^{1}/_{3} & \\ 2179466^{2}/_{3}/ & 33^{1}/_{3}={}^{1}/_{3}.100 \\ \hline 8717866^{2}/_{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 54972 \times 625 & \\ \hline 27486000 & 500={}^{1}/_{2}.1000 \\ 6871500 & 125={}^{1}/_{4}.500 \\ \hline 34357500 & \end{array} \qquad \text{albo} \quad \begin{array}{ll} 54972 \times 625 & \\ \hline 34357500 & :16 \end{array}$$

Powyższe ułatwienia dają nam dogodny sposób zamiany rubli srebrem na złote polskie i złotych polskich na ruble. Aby bowiem pewną liczbę rubli zamienić na złote, należy ją pomnożyć przez $6\frac{2}{3}$, co wykonywamy, mnożąc przez dziesięć i odejmując od tego iloczynu część jego trzecią; dajmy np. 27684 rs.

Rs.	27684	
	92280	:3
Złp.	184560	

Aby znów pewną liczbę złotych zamienić na ruble, zamieniamy ją na kopiejki, mnożąc przez 15, t. j. dopisując 0, biorąc tego połowę i dodając,—następnie sumę tę dzielimy przez 100 przez odcięcie dwu cyfr.

złp.	184560
	922800
rs.	27684,00

rs.	4786,53	złp.	31910	6 gr.
	15955,1		159550	
złp.	31910,2		4786,50	
	6 gr.		3 k.	
		rs.	4786,53	

Zadania.

6641×5	$4248 \times 37\frac{1}{2}$
$72389 \times 3\frac{1}{3}$	6250×4754
$63489 \times 6\frac{2}{3}$	49726×375
$8274 \times 2\frac{1}{2}$	1375×9456
$42857 \times 16\frac{2}{3}$	$4708 \times 166\frac{2}{3}$
7285×25	$12\frac{1}{2} \times 70485$
2500×4693	625×14089
$8\frac{1}{3} \times 7085$	$7248 \times 58\frac{1}{3}$
4786×1125	$3085 \times 41\frac{2}{3}$
$40853 \times 11\frac{1}{9}$	$9\frac{1}{11} \times 7946$
$62\frac{1}{2} \times 9254$	$67113 \times 137\frac{1}{2}$
$39562 \times 91\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3} \times 14068$
$4405 \times 333\frac{1}{3}$	$4763 \times 106\frac{1}{4}$
875×89128	47782×1625

§ 12.

Podzielenie jednego a pomnożenie drugiego czynnika przez jednę i tęż samą liczbę, jeżeli przez to one oba zamieniają się w liczby okrągłe, może często przynosić istotną korzyść, nadając się dobrze do pamięciowego mnożenia. Tak np.:

$$125 \times 72 = 125 \times 8 \times {}^{72}/_{8} = 1000 \times 9 = 9000.$$

Zadania.

25×32
75×12
625×48
625×56
45×18
125×44
18×25
375×28
225×52
$16^2/_3 \times 66$
$9^1/_{11} \times 77$
$333^1/_3 \times 27$

§ 13.

Zastosowanie twierdzenia algebraicznego

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

posłużyć może często do szybkiego, nawet pamięciowego mnożenia:

$$97 \times 103 = (100-3)(100+3) = 100^2 - 9 = 9991$$
$$86 \times 74 = (80+6)(80-6) = 6400 - 36 = 6364$$

Również korzystnie używać można i innych twierdzeń algebraicznych, jak:

$$(a \pm b)(a \pm b) = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a-b)(a-c) = a^2 - (b+c)a + bc.$$

i t. p.

$$97 \times 97 = (100-3)(100-3) = 10000 - 2.3.100 + 9 = 9409.$$
$$994 \times 997 = (1000-6)(1000-3) 1000^2 + 18 - (3+6).1000 = 991018.$$

Zadania.

83×97	491×509
71×89	4997×4997
89×111	297×291
980×1020	603×611
293×307	991×93

§ 14.

Przydatną być może także uwaga, że

$$(a+\tfrac{1}{2})(a+\tfrac{1}{2})=a(a+1)+\tfrac{1}{4}$$

Zatem $6^1/_2 \times 6^1/_2 = 6 \times 7 + ^1/_4 = 42^1/_4$

$11^1/_2 \times 11^1/_2 = 132^1/_4$

Podobnież: $(10a+5)(10a+5) = a(a+1).100+25$, zatém

$25 \times 25 = 2.3.100 + 25 = 625$

$75 \times 75 = 5625$

$205 \times 205 = 42025$ t. j. dosyć jest pomnożyć liczbę dziesiątków przez tęż liczbę powiększoną o 1 i do tego iloczynu dopisać 25.

§ 15.

Ciekawą własność posiada liczba 37, że mianowicie $3 \times 37 = 111$, ztąd

$6 \times 37 = 222$	$21 \times 37 = 777$
$9 \times 37 = 333$	$24 \times 37 = 888$
$12 \times 37 = 444$	$27 \times 37 = 999$
$15 \times 37 = 555$	$30 \times 37 = 1110$
$18 \times 37 = 666$	$33 \times 37 = 1221$ i t. d.

Łatwo również sprowadzić do powyższego mnożenia przez 37 przypadki, gdy mnożna nie jest wielokrotnością 3, np. $25 \times 37 = 888 + 37 = 925$, $29 \times 37 = 1110 - 37 = 1073$.

§ 16.

Ponieważ *mnożenie ułamków dziesiętnych* odbywa się jak liczb całkowitych, pamiętając tylko w iloczynie odciąć tyle cyfr na części dziesiętne, ile ich było w mnożnéj i mnożniku, przeto wszystkie powyższe uwagi odnoszą się również i do mnożenia ułamków dziesiętnych. Przypomnieć téż można, że dla pomnożenia ułamku dziesiętnego przez 10, 100, 1000 i t. d. należy przecinek posunąć od ręki lewéj ku prawéj o 1, 2, 3 . . . miejsca, bo wtedy każda cyfra nabiera wartości względnéj 10, 100, 1000 . . . razy większéj, zatém cała liczba powiększa się 10, 100, 1000 . . . razy.

Rozmaite zadania.

$790{,}513 \times 54{,}9$	$605{,}437 \times 1{,}2$
$65347 \times 1{,}25$	$7352{,}63 \times 11{,}11$
$9{,}81 \times 475{,}83$	$149{,}527 \times 694785$
$7{,}2 \times 87546$	$63{,}583 \times 13{,}78$
$61{,}854 \times 794{,}73$	$63592{,}1 \times 98{,}17$
$6{,}25 \times 370{,}84$	$85{,}467 \times 10{,}515$

475638 × 9,99	0,0864 × 75
72,9 × 478,73	8,75 × 9,478
112,44 × 875,73	6548 × $833\frac{1}{3}$
18,9256 × 7,98	4,083 × $62\frac{1}{2}$
8739,46 × 1,41	13,75 × 40837
4597,8347 × 75,649	9,2718 × 546,387
872,84 × 9,817	408,364 × 3750
7934,27 × 0,56	11,5 × 115
0,09724 × 4200	6,4 × 70835
674,73 × 0,98	4,96 × 50,4
478,37 × $37\frac{1}{2}$	76593 × 415,9
6,348 × 660	369,18 × 72,4086
4,9 × 306138	4,44 × 749
76,224 × 130	8,2 × 9,8
0,92113 × 86,4	9,97 × 9,5
526,765 × 4,27	67408 × 99,89
34,875 × 1,8	582,413 × 76983,259
64,87 × 3,47	82,472 × 97469
151,05 × 0,68436	31,74 × 876,49
0,037 × 0,27	11,4 × 760944
658,04 × 4,93	130 × 76278
12,5 × 12,5	38,473 × 250
4,5 × 4,5	2,7 × 3,3

§ 17.

Zasady *mnożenia ułamków* wyprowadzają się z ogólnego określenia mnożenia, jako działania, według którego z mnożnéj tworzy się iloczyn tak, jak mnożnik powstał z jedności. Użycie jednak tego działania należy nam tu objaśnić na przykładach.

Funt towaru kosztuje $^2/_5$ rs., ile kosztują 3 funty? Trzy funty kosztują 3 razy więcéj, należy zatém cenę jednego funta pomnożyć przez 3, t. j. $^2/_5$ rs. $\times 3 = {^6/_5}$ rs. $= 1\,^1/_5$ rs. W tym przykładzie mnożnikiem jest liczba całkowita i znaczenie tego działania jest takież samo, jak mnożenia liczb całkowitych (odsyłacz § 5); czy mnożna jest liczbą całkowitą, czy też ułamkiem, pomnożyć ją przez liczbę całkowitą, lub w ogóle, przez liczbę większą od jedności, znaczy powtórzyć tyle razy, ile mnożnik zawiera jedności.

Funt towaru kosztuje 3 rs., ile kosztuje $^2/_5$ funta? $^1/_5$ funta kosztuje piątą część tego co 1 funt, t. j. $^3/_5$ rs., $^2/_5$ funta zatém 2 razy więcéj, $^3/_5$ rs. $\times 2$, co wychodzi na pomnożenie 3 rs. $\times {^2/_5} = {^6/_5}$ rs. $= 1\,^1/_5$ rs.—W tym razie mnożenie ma znaczenie odmienne, niż w przypadku poprzedzającym: pomnożyć liczbę przez $^2/_5$ znaczy właściwie wziąć jéj $^2/_5$ części. Dla tego téż, ilekroć mnożnikiem jest ułamek właściwy, iloczyn jest mniejszym od mnożnéj; nie należy przeto pojęcia mnożenia łączyć z pojęciem pewiększania.

Podobnież, jeżeli mamy wziąć część pewnéj części całości, zatém ułamek ułamku, używamy mnożenia. Ile jest $^3/_7$ $^2/_5$-ych? Rozumując, jak w zadaniu poprzedniém, znajdujemy, że należy pomnożyć $^2/_5 \times {}^3/_7$. Dodać tu można, że $^2/_5 \times {}^3/_7 = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = {}^3/_7 \times {}^2/_5$, że przeto w mnożeniu ułamków, podobnie jak i w mnożeniu liczb całkowitych, wolno zmieniać porządek czynników, niemniéj jednak każdy z nich zachowuje stale znaczenie swoje jako mnożnéj i mnożnika.

§ 18.

Przy mnożeniu ułamków należy pamiętać zawsze o dokonywaniu wszelkich możliwych uproszczeń przed wykonaniem mnożenia.

$$32 \times {}^{19}/_{24} = 4 \times {}^{19}/_3 = {}^{76}/_3 = 25\,{}^1/_3$$
$$^5/_8 \times {}^4/_{15} = {}^1/_2 \times {}^1/_3 = {}^1/_6$$

Jeżeli licznik mnożnika jest jednością, działanie sprowadza się do podzielenia mnożnéj przez mianownik mnożnika. Można z tego korzystać téż, gdy mnożnik różni się od jedności o ułamek, mający za licznik jedność.

$$\begin{array}{rl} 327 & \times\, {}^7/_8\ (1 - {}^1/_8) \\ 40\,{}^7/_8 & (-327:8) \\ \hline 286\,{}^1/_8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 85\,{}^3/_8 & \times\, {}^{11}/_{12}\ (1 - {}^1/_{12}) \\ 7\,{}^{11}/_{96} & (-85\,{}^3/_8:12) \\ \hline 78\,{}^{25}/_{96} & \end{array}$$

Podobne uproszczenie często téż otrzymać można przez rozkład mnożnika na części dogodne; tak np. $^{13}/_{16} = {}^8/_{16} + {}^4/_{16} + {}^1/_{16} = {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_{16}$ zatém

$$\begin{array}{rl} 236 \times {}^{13}/_{16} & \\ \hline 118 & (236 \times {}^1/_2 = 236:2) \\ 59 & (236 \times {}^1/_4 = 236:4 = 118:2) \\ 14\,{}^3/_4 & (236 \times {}^1/_{16} = 236:16 = 59:4) \\ \hline 191\,{}^3/_4 & \end{array}$$

Tak samo:

$$\begin{array}{rl} 43 \times {}^{13}/_{24} & ({}^{12}/_{24} + {}^1/_{24}) \\ \hline 21\,{}^1/_2 & (43:2) \\ 1\,{}^{19}/_{24} & (43:24 = 21\,{}^1/_2:12) \\ \hline 23\,{}^7/_{24} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 124 \times {}^{13}/_{18} & ({}^9/_{18} + {}^3/_{18} + {}^1/_{18}) \\ \hline 62 & (124:2) \\ 20\,{}^2/_3 & (124:6 = 62:3) \\ 6\,{}^8/_9 & (124:18 = 20\,{}^2/_3:3) \\ \hline 89\,{}^5/_9 & \end{array}$$

W podobny sposób wykonamy mnożenia:

$$\begin{array}{rl} 487 \times 8\tfrac{5}{6} & (9-\tfrac{1}{6}) \\ \hline 4383 & (487\times 9) \\ 81\tfrac{1}{6} & (-487:6) \\ \hline 4301\tfrac{5}{6} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 865 \times 76\tfrac{1}{2} & (77-\tfrac{1}{2}) \\ \hline 6055 & (865\times 7) \\ \hline 66605 & (6055\times 11) \\ 432\tfrac{1}{2} & (-865:2) \\ \hline 66172\tfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 435 \times 1\tfrac{5}{8} & \\ 217\tfrac{1}{2} & (\tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{2}) \\ 54\tfrac{3}{8} & (\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{2}:4) \\ \hline 706\tfrac{7}{8} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 13\tfrac{3}{5} \times 12\tfrac{7}{12} & \\ \hline 163\tfrac{1}{5} & (13\tfrac{3}{5}\times 12) \\ 6\tfrac{4}{5} & (13\tfrac{3}{5}\times \tfrac{6}{12}=13\tfrac{3}{5}:2) \\ 1\tfrac{2}{15} & (13\tfrac{3}{5}\times \tfrac{1}{12}=6\tfrac{4}{5}:6) \\ \hline 271\tfrac{2}{15} & \end{array}$$

Jeżeli mnożnik jest całością z ułamkiem, którego licznik równa się téj całości,—można z tego skorzystać:

$$\begin{array}{rl} 157 \times 4\tfrac{4}{7} & \\ \hline 628 & (157\times 4) \\ 89\tfrac{5}{7} & (157\times \tfrac{4}{7}=628:7) \\ \hline 717\tfrac{5}{7} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 42\tfrac{3}{7} \times 3\tfrac{4}{11} & (3\tfrac{3}{11}+\tfrac{1}{11}) \\ \hline 127\tfrac{2}{7} & (42\tfrac{3}{7}\times 3) \\ 11\tfrac{4}{7} & (42\tfrac{3}{7}\times \tfrac{3}{11}=127\tfrac{2}{7}:11) \\ 3\tfrac{6}{7} & (42\tfrac{3}{7}\times \tfrac{1}{11}=11\tfrac{4}{7}:3) \\ \hline 142\tfrac{5}{7} & \end{array}$$

Zresztą, w ogólności dogodniéj będzie unikać włączania całości z ułamkiem w ułamek, zwłaszcza przy liczbach większych

$$\begin{array}{rl} 379\tfrac{4}{9} \times 4\tfrac{2}{5} & \\ \hline 1517\tfrac{7}{9} & (379\tfrac{4}{9}\times 4) \\ 151\tfrac{7}{9} & (379\tfrac{4}{9}\times \tfrac{2}{5}=1517\tfrac{7}{9}:10) \\ \hline 1669\tfrac{5}{9} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 453\tfrac{2}{3} \times 7\tfrac{3}{5} & \\ \hline 3175\tfrac{2}{3} & (453\tfrac{2}{3}\times 7) \\ (1361) & (453\tfrac{2}{3}\times 3) \\ 272\tfrac{1}{5} & (1361:5) \\ \hline 3447\tfrac{13}{15} & \end{array}$$

W ostatnim przykładzie liczbę 1361 zamykamy w nawias albo przekreślamy, dla wskazania, że nie ma być dodaną.

Zadania.

$$\begin{array}{r} 18\times\tfrac{5}{9} \\ 4\times\tfrac{5}{8} \\ \tfrac{5}{12}\times 72 \\ \tfrac{11}{32}\times 128 \\ 24\times\tfrac{9}{16} \\ \tfrac{11}{36}\times 40 \\ 45\times\tfrac{23}{30} \\ 72\times\tfrac{7}{27} \\ 32\times\tfrac{5}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38143\times 67\tfrac{6}{11} \\ 94065\times 9\tfrac{9}{13} \\ 3918\tfrac{3}{5}\times 4\tfrac{9}{16} \\ 27114\tfrac{3}{4}\times 8\tfrac{5}{12} \\ 4534\tfrac{2}{5}\times 7\tfrac{3}{8} \\ 63\times 4\tfrac{4}{5} \\ 7698\times 6\tfrac{6}{7} \\ 91\tfrac{2}{7}\times 6\tfrac{7}{9} \\ 18\tfrac{4}{5}\times 8\tfrac{9}{11} \end{array}$$

$81 \times {}^{15}/_{16}$	$38^{3}/_{7} \times 5^{6}/_{11}$
${}^{19}/_{20} \times 108$	$125^{2}/_{3} \times 6^{3}/_{5}$
${}^{15}/_{16} \times 376894$	$139^{5}/_{7} \times {}^{3}/_{4}$
$348 \times {}^{17}/_{24}$	$2166 \times 133^{1}/_{3}$
$65 \times {}^{5}/_{9}$	$764 \times 408^{1}/_{3}$
$969735 \times {}^{7}/_{16}$	$74^{1}/_{5} \times 7^{3}/_{8}$
${}^{25}/_{36} \times 57843$	$460^{1}/_{4} \times 8^{5}/_{12}$
$84324 \times 71^{1}/_{2}$	$96^{5}/_{8} \times 9^{5}/_{6}$
$32542 \times 119^{7}/_{8}$	$68^{1}/_{5} \times 7^{8}/_{11}$
$762629 \times 72^{1}/_{8}$	$9460 \times 8^{1}/_{3}$
$27211 \times 91^{1}/_{8}$	$59476^{1}/_{4} \times 359^{1}/_{2}$

Dzielenie.

§ 19.

Dzielenie przez liczbę jednocyfrową łatwo prowadzonem być może bez wypisywania idących po sobie szczegółowych dzielnych, bo te łatwo pamiętać można; tak zresztą dzieliliśmy już przy mnożeniu wskazaném w § 11.

Dogodnie jest tu pisać iloraz pod dzielną, i to tak, aby każda cyfra ilorazu wypisywaną była pod tą cyfrą dzielnéj, do któréjśmy się w dzieleniu posunęli, przez co unikamy omyłek powstających z dwukrotnego brania lub opuszczania któréj cyfry.

$$\frac{4769248}{596156} :8 \qquad \frac{3721496}{531642^{2}/_{7}} :7$$

Podobnie zresztą postępować należy przy dzielnikach 11, 12 . . . 19, do czego, rozumie się, dobrze pamiętać należy iloczyny tych liczb przez liczby jednocyfrowe:

$$\frac{79369}{6614^{1}/_{12}} :12 \qquad \frac{894744}{55921^{1}/_{2}} :16$$

Dodać tu również należy, że w sferach kupieckich, zwłaszcza w Niemczech, wbrew zwykłemu sposobowi pisania, znak dzielenia umieszcza się między dzielnikiem a dzielną, 12:79369, co odpowiada wysłowieniu 12 w 79369. [1]

---

[1] W zastosowaniach dzielenia do zadań pamiętać należy, że zadania te są dwojakiego rodzaju. Dzielenie bowiem jest to działanie, mocą którego, mając iloczyn

Zadania.

Liczby : 9256348
1820033
81365463 podzielić przez 3, 4, . . . 19.

§ 20.

Przy należytéj wprawie możnaby w tenże sam sposób prowadzić dzielenie i przez dzielniki większe, postępowania tego jednak w ogólności zalecać nie można. Zwykły wszakże szkolny sposób dzielenia o tyle uprościć należy, aby nie wypisywać cząstkowych iloczynów, ale takowe, według § 4, wprost od szczegółowych dzielnych odejmować i otrzymywać bezpośrednio reszty.

```
789.632 : 87              albo  4329167 : 687
  663     9076 20/87             2071     6301
    542                           1067
     20                            380
```

Podajemy tu téż inny sposób ustawiania liczb do dzielenia wchodzących.

```
789632 :87          4329167 : 687
   664|0                706|0
    65|2                010|8
  9076                  2 1|3
                      6301
```

Reszty wypisujemy tu w kierunku pionowym pod następną cyfrą dzielnéj, tak że dzielne szczegółowe dane są tu jako liczby ustawione

---

i jeden czynnik, szukamy drugiego, a że mnożna i mnożnik mają znaczenie różne (uwaga do § 5), przeto dzielenie ma znaczenie dwojakie, stosownie do tego, czy mnożna czy mnożnik jest czynnikiem wiadomym. Objaśnijmy to prostym przykładem. Jeżeli funt towaru kosztuje 3 rs., 5 funtów kosztują 5 razy więcéj 3 rs.×5= 15 rs. Zadanie to na mnożenie prowadzi do dwu różnych zadań na dzielenie: 1) kupiono 5 funtów towaru za 15 rs.; po czemu płacono funt? 2) kupiono za 15 rs. towaru, płacąc funt po 3 rs; ile kupiono funtów? W pierwszym razie mówimy: jeżeli 5 funtów kosztowało 15 rs., to 1 funt kosztował 5 *razy* mniéj, 15 rs.: 5=3 rs. W drugim zaś: jeżeli płacąc funt towaru po 3 rs. kupiono tego towaru za 15 rs., to kupiono funtów tyle, ile razy 3 rs. mieszczą się w 15 rs., 15 rs. : 3 rs.=5. Dzielnik przeto może być albo liczbą niemianowaną, albo liczbą mianowaną, tegoż samego rodzaju co dzielna; w pierwszym razie otrzymujemy na iloraz liczbę mianowaną, tegoz rodzaju co dzielna; w drugim liczbę niemianowaną,—znaczenie jéj objaśnia jedynie natura zadania.

pionowo i czytane od dołu ku górze; w pierwszym np. z tych dzieleń dzielne są—789, 66, 663, 542. Iloraz 9076 wypisanym jest pod linijką, reszta jest 20. Sposób ten, używany podobno w kantorach angielskich, dogodnym jest zwłaszcza w długich dzieleniach:

```
67898043672 | : 365
   39804362 | 7
   11 87137 | 6
   32    12 | 1
-----------------------
  186022037
```

Z a d a n i a.

9256348 : 47	67143572908 : 89
438847 : 277	3706132649 : 948
1030059 : 659	46672918 : 2647
4693847 : 7967	8054372615 : 4809

§ 21.

Dzielenie przez rozkład dzielnika na czynniki. Ponieważ dzielenie przez liczby jednocyfrowe bardzo łatwo się prowadzi, rozkład przeto dzielnika na liczby jednocyfrowe może być nader pożytecznym. Podzielić bowiem liczbę przez 56 jest toż samo, co podzielić ją przez 7 a otrzymany ztąd iloraz przez 8.

```
 1452304  : 56
 ---------- :7
  207474
 ---------- :8
   25934
```

Jeżeli z dzieleń częściowych otrzymujemy reszty, łatwo znaleść resztę istotną, jakaby wypadła przy dzieleniu liczby przez dzielnik dany:

```
 4087654   : 63 (7×9)
 ----------: 7  (4
  583950
 ----------: 9  (3
   64883
```

Z pierwszego dzielenia otrzymujemy tu resztę 4, z drugiego 3; zupełna reszta otrzyma się przez pomnożenie drugiéj reszty przez pierwszy dzielnik i dodanie pierwszéj reszty: $37\times+4=25$. Istotnym bowiem ilorazem pierwszym jest $583950+\frac{4}{7}$, drugim zatém jest

$64883+\frac{3}{9}+\frac{4}{7.9}$; suma tych ułamków jest: $\frac{3.7+4}{63}=\frac{25}{63}$; 25 zatém jest resztą szukaną:

$$\begin{array}{rll} 5681021 & :72\ (8\times9) & \\ \hline 710127 & :8 & (5 \\ \hline 78903 & :9 & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 406924 & :44\ (4\times11) & \\ \hline 101731 & :4 & \\ \hline 9248 & :11 & 3) \end{array}$$

W pierwszym przykładzie z drugiego dzielenia reszty nie ma, 5 jest téż istotną resztą całego dzielenia; w drugim przykładzie z pierwszego dzielenia reszty nie ma, z drugiego jest 3, resztą przeto istotną jest $3\times4=12$.

Tak samo, gdy dzielnik rozkładamy więcéj niż na dwa czynniki, otrzymujemy resztę, mnożąc każdą resztę szczegółową przez poprzednie dzielniki i zbierając te iloczyny w sumę:

$$\begin{array}{rll} 44817283 & :196\ (4\times7\times7) & \\ \hline 11204320 & :4 & (3 \\ \hline 1600617 & :7 & (1 \\ \hline 228659 & :7 & (4 \end{array}$$

Reszty szczegółowe są tu 3, 1, 4, zatém reszta zupełna jest $4\times7\times4+1\times4+3=119$, czyli ilorazem szukanym jest $228659^{119}/_{196}$.

Jeżeli dzielnikiem jest liczba zakończona zerami, np. 6700, możemy ją uważać za iloczyn 67×100, zatém podzielić przez 100, a iloraz ztąd powstały przez 67. Ale dla podzielenia liczby przez 10, 100, 1000 . . . dosyć odciąć jednę, dwie, trzy . . . cyfry na dziesiętne, bo wtedy każda cyfra téj liczby otrzymuje wartość względną 10, 100, 1000 . . . razy mniejszą, a tém samém i cała liczba staje się 10, 100, 1000 . . . razy mniejszą. Zera przeto dzielnika przed wykonaniem dzielenia odrzucać zawsze należy, odcinając tyle cyfr w dzielnéj na dziesiętne, ile zer odrzucamy. Jakkolwiek zasada ta aż nadto jest znaną, często jednak jest zapominaną, np. 3480569 : 6700.

$$\begin{array}{rl} 34805{,}69 & :\ \underline{67{,}00} \\ 130 & \quad 519 \\ 635 & \\ \hline 3269 & \end{array}$$

Resztą jest tu 3269, co można widzieć, dzieląc liczbę przez zupełny dzielnik 6700, albo też według poprzedniego $32\times100+69=3269$.

Zadania.

123804 : 28	654936 : 132
5246389 : 36	45630849 : 121
940235 : 63	6582748 : 144
624807 : 42	4708536 : 315
6935906 : 45	3715587 : 168
9848396 : 81	9167435 : 245
3498326 : 900	46572834 : 7200

§ 22.

Dzielenie przez liczbę, która jest częścią wielokrotną 10, 100, 1000 . . . odpowiada podobnemuż mnożeniu,—podzielić liczbę przez 5, jest toż samo, co podwoić jéj część dziesiątą; przez 25 toż samo, co pomnożyć przez 4 jéj część setną.

$$\frac{65493 \quad : 5}{13098{,}6} \times 2 \qquad \frac{472538 \quad : 25}{18901{,}52} \times 4$$

czyli $13098\frac{3}{5}$ $\qquad$ $18901\frac{13}{25}$

$$\frac{5214835 \quad : 16\frac{2}{3}}{312890{,}10} \times 6$$

Nie mniejszą dogodność przedstawiają i liczby, które są wielokrotnościami owych części wielokrotnych 100, 1000 i t. d. 75 np. $=3\times25$, iloraz przeto z podzielenia liczby przez 75 będzie 3 razy mniejszym, niż z podzielenia przez 25, t. j. dla podzielenia liczby przez 75 trzeba ją pomnożyć przez 4 a podzielić przez 300; tak samo dla podzielenia liczby przez $83\frac{1}{3}=5\times16\frac{2}{3}$ mnożymy ją przez 6 a dzielimy przez 500.

$$\frac{730692 \quad : 75}{2922768} \times 4 \qquad \frac{287734 \quad : 83\frac{1}{3}}{1726404} \times 6$$

$$\frac{\qquad}{9742{,}56} : 3\ (300) \qquad \frac{\qquad}{3452{,}808} : 5\ (500)$$

W ostatnim przykładzie można było mnożyć przez 12 a dzielić przez 1000.

Zadania.

$23791 : 12\frac{1}{2}$	$308726 : 58\frac{1}{3}\ (7\times8\frac{1}{3})$
$374852 : 33\frac{1}{3}$	$402738 : 66\frac{2}{3}$
$61805625 : 875$	$365419 : 175$
$43726 : 8\frac{1}{3}$	$40638 : 7\frac{1}{2}$

§ 23.

Dzielenie przez liczbę bliską 100, 1000 i t. d. przedstawiać może niektóre udogodnienia. Znalazłszy cyfrę ilorazu, zamiast mnożyć ją przez dzielnik i tak otrzymany iloczyn od dzielnéj odejmować, mnożymy ją przez dopełnienie dzielnika do 100, 1000 i t. d. i ten iloczyn do dzielnéj dodajemy, a odrzuciwszy pierwszą cyfrę summy, otrzymujemy resztę, jakaby wypadła przy postępowaniu zwykłém.

$$\begin{array}{rcl} & & 3 \\ 463072 & : & \underline{97} \\ \underline{12} & & 4773 \\ 4750 & & \\ \underline{21} & & \\ 7717 & & \\ \underline{21} & & \\ 7382 & & \\ \underline{9} & & \\ 391 & & \end{array}$$

Pierwsza cyfra ilorazu jest 4, mnożymy ją przez 3 (dopełnienie dzielnika do 100) i dodajemy do dzielnéj 463; w summie 475 skreślamy pierwszą cyfrę 4, a pozostała część 75 stanowi szukaną resztę W istocie reszta ta winna być $463 - 4.97 = 463 - 4(100-3) = 463 - 400 + 12$, cośmy właśnie robili, bo przekreślenie 4 znaczy odjęcie 400. Ztąd téż wypada, że odrzucana cyfra reszty winna być równą znalezionéj cyfrze ilorazu; jeżeli wypada cyfra inna, ostrzega nas, że cyfra ilorazu jest błędną. Tak np. jeżeli dzieląc 846 przez 92, weźmiemy za iloraz 8, znajdziemy według powyższego postępowania

$$\begin{array}{rcl} & & 8 \\ 846 & : & \underline{92} \\ \underline{64} & & 8 \\ 910 & & \end{array}$$

Iloraz przeto 8 jest błędnym, należy go o 1 powiększyć.

Może się wprawdzie zdarzyć, że pierwsza cyfra takiéj sumy jest równą przyjętéj cyfrze ilorazu, a jednak ta ostatnia jest błędną; tak np.

$$\begin{array}{rcl} & & 8 \\ 375 & : & \underline{92} \\ \underline{24} & & 3 \\ 399 & & \end{array} ,$$

ale w tym razie samaż reszta 99, większa od dzielnika, ostrzega nas, że cyfra ilorazu jest zamałą.

Rozumie się, że iloczynów dodawanych wypisywać nie potrzeba, łącząc je z dzielną przez dodanie pamięciowe:

$$
\begin{array}{r l}
 & 6 \\
8134263 & : \ 994 \\ \cline{2-2}
81822 & \ \ 8183 \\
18286 & \\
83343 & \\ \cline{1-1}
3361 &
\end{array}
$$

Z a d a n i a.

4983524 : 95	3206014 : 989
3214067 : 992	47249632 : 9991
43082 : 99	86604137 : 9987

§ 24.

Inny sposób podobnego dzielenia przytaczamy więcéj dla ciekawości. W liczbie danéj do podzielenia odcinamy linijką pionową tyle cyfr od ręki prawéj ku lewéj, ile ich zawiera dzielnik; część dzielnéj, znajdującą się przed liniją, mnożymy przez dopełnienie dzielnika (do 100, 1000 i t. d.) i iloczyn podpisujemy pod cyframi dzielnéj, rozpoczynając od jedności. Jeżeli jedna lub więcéj cyfer tego iloczynu występuje przed linijkę, mnożymy je przez toż samo dopełnienie, wypisując iloczyn jak poprzednio, i postępowanie to powtarzamy, dopóki żadna cyfra iloczynu znajdować się już przed lenijką nie będzie. Tak otrzymane liczby po za linijką dodajemy, i jeżeli żadna cyfra sumy nie występuje przed liniję, summa ta daje nam resztę z dzielenia pozostającą. Ale, gdy jeszcze jaka cyfra téj summy przed linijkę występuje, mnożemy ją jak poprzednio przez dopełnienie dzielnika i iloczyn w tenże sam sposób wypisujemy. Ostatecznie, summa wszystkich liczb przed linijką daje nam żądany iloraz, a summa ostatnich liczb za linijką stanowi resztę.

$$
\begin{array}{r|l l}
 & 2 & \\
436 & 89 : 98 & \\
8 & 72 & \\
 & 16 & \\ \cline{2-2}
1 & 77 & \\
 & 2 & \\ \hline
445 & 79 & 445\,{}^{79}/_{98}
\end{array}
$$

Objaśnienie tego postępowania jest proste. Odcinając w liczbie danéj

2 ostatnie cyfry, dzielimy ją przez 100, t. j. otrzymujemy $\frac{43689}{100}=436+\frac{89}{100}$.
Ale że dzielnik dany 98 jest mniejszym od 100, iloraz przeto żądany jest większym od 436. Dla znalezienia poprawki, którą do 436 dodać należy, uważamy, że

$$43689=436.100+89=436\,(98+2)+89.$$

zkąd
$$\frac{43689}{98}=436+\frac{436.2}{98}+\frac{89}{98}$$

To nam wskazuje, że należy 436 pomnożyć przedewszystkiém przez 2 i podzielić przez 98; w postępowaniu powyższém pomnożyliśmy istotnie 436×2, ale napisawszy iloczyn 872 pod dzielną, tak że 8 wystąpiło przed liniję, podzieliliśmy znowu tę liczbę przez 100 zamiast przez 98; aby otrzymać ztąd wartość żądaną, uważmy znowu, że

$$872=8\times100+72=8\,(98+2)+72$$

zkąd
$$\frac{872}{98}=8+\frac{8.2}{98}+\frac{72}{98}$$

A podstawiwszy tę wartość w wyrażenie poprzednie, otrzymujemy:

$$\frac{43689}{98}=436+8+\frac{89+72+16}{98}$$

Ale suma $89+72+16=177$ jest znów większą od 98, zatém z ułamku $^{177}/_{98}$ wydobędzie się jeszcze część należąca do ilorazu. W postępowaniu naszém podzieliliśmy 177 przez 100, otrzymując 1 na iloraz i 77 na resztę; dla znalezienia ztąd wartości żądanéj $\frac{177}{98}$, mamy znowu

$$177=1\,(98+2)+77$$

$$\frac{177}{98}=1+\frac{2+77}{98}$$

Ostatecznie przeto otrzymujemy:

$$\frac{43689}{98}=436+8+1+\frac{77+2}{98}$$

Rozwinięcie to objaśnia podany tu sposób dzielenia.

Tak samo znajdziemy:

	8
89582	347 : 992
716	656
5	728
	40
1	771
	8
90304	779

	11
4326	7803 : 9989
4	7586
	44
1	5433
	11
4331	5444

Zdarzyć się może, że suma wydająca resztę jest większą od dzielnika, w takim razie należy wydzielić z niéj jedność do ilorazu.

	6
4212	576 : 994
25	272
	150
4237	998

	9
2996	784 : 991
26	964
	234
.1	982
	9
3023	991

W pierwszym z tych przykładów otrzymujemy na iloraz $4237^{998}/_{994}$, zatém $4238^{4}/_{994}$, w drugim podobnież 3024. Przypadki te zresztą są rzadkie, bo, jak łatwo widzieć, mogą mieć miejsce wtedy tylko, gdy reszta jest mniejszą od dopełnienia dzielnika do 100, 1000...

Zadania jak w § poprzedzającym.

§ 25.

Dzielenie ułamków dziesiętnych wymaga pewnych uwag. Przez dopisywanie zer sprowadzić można dzielnę i dzielnik do jednakowéj liczby cyfr dziesiętnych, a wtedy na zasadzie, że wolno dzielnę i dzielnik mnożyć przez tęż samą liczbę, odrzuca się przecinki w dzielnéj i dzielniku i dzielenie liczb danych sprowadza się do dzielenia liczb całkowitych. Postępowanie takie nie zawsze jest właściwém, mając np. do podzielenia 723,4879: 17,27, sprowadzamy to do dzielenia liczb 7234879 : 172700, ale według § 21 odpowiada to dzieleniu 72348,79 : 1727. Dopisywanie przeto zer do dzielnika jest w każdym razie zbyteczném; dostateczném będzie zawsze sprowadzenie tylko dzielnika do liczby całkowitéj, cyfry zaś dziesiętne rozpoczynać się będą w ilorazie wtedy, gdy składamy pierwszą cyfrę dziesiętną dzielnéj.

37,27 : 5,417
37270 : 5417
47680   6,8801...
43440
10400
4983

328,934 : 17,306
328934 : 17306
155874   19,0069
120000
161640
5886

4,738 : 15,27
437,8 : 1527
1570   0,3102
4300
1246

0,008 : 0,37
0,80 : 37
60   0,0216
230
8

Rozumie się, że ułatwienia wyżéj wskazane mają tu w zupełności zastosowanie.

43, 278	: 0,25		0,8343	:	4,2
173,112	$\times 4$		8,343	:	42
			1,3905	:	6
			0,1986	:	7

W dzieleniu przez rozkład dzielnika na czynniki nie ma potrzeby dochodzenia reszty, bo dzielenie może być tak daleko prowadzoném, jak tego zachodzi potrzeba.

Zadania

2307,46 : 7	476,345 : 1,1
364,332 : 25	372,54 : 1,25
9330 : 0,8	472800 : 6,345
72355 : 0,55	407,4056 : 0,88
736,943 : 25,75	8 : 0,546
52,639 : 0,497	0,086 : 0,72
0,67588 : 5,4	382,49637 : 9,97
45,208 : 37,8943	3,72 : 0,04567
27453,8 : 3,7039	0,23 : 0,0465
30,258 : 998,9	4209,36 : 0,64
0,09 : 0,3	253,444 : 1,75
0,3 : 0,09	0,0026836 : 0,13
270,48 : 33,3	46,836 : 0,875

§ 26.

Dzielenie ułamków wyjaśnimy tu podobnemi uwagami na przykładach, jak i mnożenie (§ 17).

3 funty towaru kosztują $^4/_5$ rs., ile kosztuje 1 funt? 1 funt kosztować będzie 3 razy mniéj, zatém należy podzielić cenę trzech funtów przez 3, t. j. $^4/_5$ rs.: $3 = ^4/_{15}$ rs. W tym razie szukamy właściwie liczby 3 razy mniejszéj od $^4/_5$, iloraz téż jest mniejszym od dzielnéj; w ogólności, jeżeli dzielnik jest większym od jedności, iloraz jest mniejszém od dzielnéj.

$^3/_4$ funta towaru kosztują 5 rs., ile kosztuje funt? Powiemy tu, — $^1/_4$ funta kosztuje $^5/_3$ rs., zatém funt $^5/_3$ rs. $\times 4 = 5 \times ^4/_3$ rs., ale $5 \times ^4/_3 = 5 : ^3/_4 = ^{20}/_3 = 6\,^2/_3$ rs. Widzimy tedy, że dzielenia przez ułamek używamy w tychże razach, gdy dzielenia przez liczbę całkowitą, t. j. gdy idzie nam o znalezienie ceny jedności. Iloraz w tym razie, gdy dzielnik jest ułamkiem właściwym, jest większym od dzielnéj, bo téż właściwie szukamy tu, ile razy $^3/_4$ zawiera się w 5, ale że 1 zawiera się w pięciu 5 razy, przeto $^3/_4$, liczba mniejsza od jedności, zawierać się będzie w 5 więcéj, niż 5 razy. Na rzecz tę należy baczną zwrócić uwagę, bo początkujący często są niepewni, gdzie należy dzielenia, a gdzie mnożenia ułamków używać.

Jaka jest liczba, któréj $^3/_4$ części czynią $^5/_6$? Rozumowaniem podobném, jak wyżéj, znajdziemy, że liczba szukana wynosi $^5/_6 : {}^3/_4 = {}^5/_6 \times {}^4/_3 = {}^{10}/_9 = 1\,^1/_9$. W istocie $^3/_4$ téj liczby znalezionéj czynią $^5/_6$, bo $^{10}/_9 \times {}^3/_4 = {}^5/_6$.

O samém zresztą wykonywaniu dzielenia, jako sprowadzającém się do mnożenia, nic powiedzieć tu nie można.

$7853 : {}^7/_8$		$918/^3_8 : 6^1/_2$	
62824	$(\times 8)$	$1836^3/_4$	$(\times 2)$
$8974^6/_7$	$(: 7)$	$141^{15}/_{52}$	$(: 13)$

Zadania

$7259 : {}^5/_6$	$1918 : {}^7/_8$
$450{,}8 : {}^3/_4$	$825{,}7 : {}^{11}/_{16}$
$4296 : 3/^3_4$	$729 : 7^1/_2$
$582{,}05 : 7^3/_8$	$8473^2/_3 : 3^5/_6$
$283{,}73 : {}^{15}/_{16}$	$4375^3/_4 : 6^5/_8$

§ 27.

Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne jest przy wszelkiego rodzaju rachunkach rzeczą jak najpowszedniejszą, wymaga przeto dostatecznéj biegłości.—Ułamki zwyczajne zamieniamy na dziesiętne, dzieląc licznik przez mianownik. Ułamek $^3/_7$ np. przedstawia $^3/_7$ części danéj jedności, ale że jedność zawiera 10 części dziesiątych, przeto $^3/_7$ zawierają $^{30}/_7$, t. j. $4^2/_7$ części dziesiątych. Podobnież $^2/_7$ części dziesiątéj stanowią $^{20}/_7$ czyli $2^6/_7$ setnych. W ten sam sposób postępując daléj, możemy dzielenie posuwać tak daleko, jak pragniemy, lub też dopóki się nie skończy; przerywając dzielenie na którejkolwiek cyfrze, mamy ułamek zwyczajny rozwinięty w ułamek dziesiętny, z błędem mniejszym od jedności tego rzędu, na którym dzielenie przerywamy. (Ob. § 30).

Wywód powyższy, usprawiedliwiając zwykłą drogę zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne, prowadzi zarazem do ważnych wniosków. Zamiast dopisywać zera kolejno do następujących po sobie reszt, możemy te zera przypisać wprost do licznika, czyli innemi słowy, pomnożyć licznik przez jedność z tylu zerami, ile pragniemy mieć cyfr dziesiętnych. Dajmy nadto, co zawsze przypuścić można, że ułamek dany jest właściwym i nieprzywiedlnym (t. j. nie dającym się uprościć), zatém takim, który w liczniku i mianowniku nie zawiera wspólnych czynników. Ponieważ przeto mianownik nie mieści się w liczniku, dzielenie skończyć się może (t. j. dojść możemy do reszty 0) w tym tylko przypadku, gdy mianownik mieści się w 10, 100, 1000 i t. d., t. j. w liczbie, przez którą mnożymy licznik. Ale że $10 = 2.\ 5$, przeto $100 = 10^2 = 2^2.\ 5^2$, $1000 = 10^3 = 2^3.\ 5^3$ i t. d., t. j. w liczbach 10, 100, 1000 i t. d. mieszczą się tylko iloczyny z potęg dwójki przez potęgi piątki. Też same przeto iloczyny mieścić się będą bez reszty we wszelkich wielokrotnościach 10, 100, 1000 i t. d., t. j. w dzielnych, które tu pod uwagę przychodzą, a żadne inne liczby w tychże dzielnych mieścić się bez reszty nie mogą. Przy zamianie zatém ułamków zwyczajnych na dziesiętne dzielenie skończyć się może w tych tylko razach, gdy mianownik nie zawiera innych czynników, oprócz liczb 2 i 5; w tych tylko razach otrzymamy ułamki dziesiętne skończone, t. j. posiadające ograniczoną liczbę cyfr dziesiętnych.

Nadto, liczbę tych cyfr dziesiętnych rozpoznać można z góry z rozpatrzenia samego mianownika. Ułamek np. $^3/_4$ posiada mianownik 2^2 mieszczący się w 10^2 czyli w 100 zatém i w 300, i po drugiém już dzieleniu otrzymamy na resztę 0, t. j. otrzymamy 2 cyfry dziesiętne. W ułamku $^{17}/_{40}$ mianownik $40 = 2^3.\ 5$ mieści się w 10^3 czyli w 1000, zatém i w 17000, działanie się wyczerpie po trzykrotném dzieleniu i otrzymamy 3 cyfry dziesiętne.—W ogólności liczba cyfr dziesiętnych wskazana jest przez większy z dwu wykładników liczb 2 i 5, wchodzących w skład mianownika.—Tak np. ułamki

$$^5/_8,\ ^7/_{25},\ ^{217}/_{500},\ ^{37}/_{80},$$

których mianowniki zawierają czynniki

$$2^3,\ 5^2,\ 2.5^3,\ 2^4.\ 5$$

wydają ułamki dziesiętne złożone z trzech, dwu, trzech i czterech cyfr dziesiętnych. W istocie, przez dzielenie znajdujemy na ich wartości:

0,625. 0,28, 0,434, 0,4625.

Jeżeli zaś mianownik zawiera jeden lub kilka czynników, różnych od 2 i 5, dzielenie skończyć się nie może. W istocie, w założeniu ułamku nieprzywiedlnego, czynniki te zachodzące w mianowniku nie znajdują się w liczniku, mnożąc zaś ten ostatni przez 10, 100, 1000... także tego czynnika do dzielnéj nie wprowadzamy; jakąkolwiek przeto liczbę zer do licznika dopiszemy, nigdy nie otrzymamy reszty 0, dzielenie nigdy wyczerpać się nie będzie mogło. Ułamki przeto $^5/_7$, $^{13}/_{37}$, $^{17}/_{55}$ wydadzą ułamki dziesiętne o nieograniczonéj liczbie cyfr, czyli, jak się mówić zwykło niezupełnie właściwie, nieskończone. Nadto ułamki te dziesiętne będą *peryodycznemi* czyli *zwrotowemi*, t. j. pewne grupy cyfr, *peryody* czyli *zwroty*, powtarzać się będą statecznie. W istocie, reszta zawsze być musi mniejszą od dzielnika, po pewnéj przeto liczbie dzieleń koniecznie powtórzyć się musi jedna z reszt, jakie już były poprzednio, a po dopisaniu do niéj 0 otrzymamy dzielnę, która już poprzednio się znajdowała, co poprowadzi do jednakowéj cyfry ilorazu i do jednakowéj reszty, jakie wydała dzielna poprzednia, jednakowa z dzielną uważaną. A że różnych reszt może być co najwyżéj o jednę mniéj, niż jest jedności w dzielniku, przeto, jeżeli dzielnik zawiera n jedności, różnych reszt może być co najwyżéj $n-1$, a zatém i cyfr w peryodzie co najwyżéj $n-1$. W ogólności, liczba cyfr w peryodzie może być co najwyżéj równa dzielnikowi zmniejszonemu jednością; ułamek np. $^5/_7$ wydaje ułamek peryodyczny o peryodzie najwyżéj 6 cyfrowym, ułamek $^{13}/_{37}$ ułamek peryodyczny o peryodzie co najwyżéj 36 cyfrowym:

50 : 7
10 — 0,714285|714285...
30
20
60
40
5

130 : 37
190 — 351|351...
50
13

W pierwszém z tych dzieleń dopiéro po 6-tém dzieleniu powtórzyła się reszta 5, która prowadzi do dzielnéj pierwotnéj 50, tak że odtąd reszty i cyfry ilorazu powtarzać się będą w tymże samym porządku co poprzednio, peryod jest 6-cio cyfrowym; w drugiém, już po trzeciém dzieleniu wystąpiła reszta pierwotna 13, peryod jest tylko 3 cyfrowym.

W obu tych ułamkach pierwsza powtarzająca się reszta była równa samemuż licznikowi ułamku danego, peryody przeto rozpoczynają się bezpośrednio po przecinku, ułamki dziesiętne są *peryodycznemi bezpośredniemi*. Natomiast ułamek $^{17}/_{55}$

170 : 55
500 — 0,30909 .
500

prowadzi do ułamku 0,30909..., w którym peryod 09 oddzielony jest od przecinka cyfrą 3 do peryodu nienależącą. Ułamki dziesiętne, w których peryod nie rozpoczyna się bezpośrednio po przecinku, zowią się *peryodycznemi mięszanemi*.

Chcąc wszakże oznaczyć, czy dany ułamek zwyczajny wyda ułamek dziesiętny skończony czy też peryodyczny, należy zawsze przekonać się przedewszystkiém, czy ułamek dany jest istotnie nieprzywiedlnym. Tak np. o ułamku $^{91}/_{104}$, którego mianownik wynosi $104 = 8 . 13$, możnaby wnosić, że wyda ułamek peryodyczny; tymczasem przy zamianie

910 : 104
780 — 0,875
520
0

przekonywamy się, że wypada ułamek dziesiętny o ograniczonéj liczbie cyfr.

Wypływa to ztąd, że ułamek $^{91}/_{104}$ zawiera w liczniku i mianowniku wspólny czynnik 13 i istotnie równa się ułamkowi $^{7}/_{8}$.

§ 28.

Widzieliśmy, że pewne ułamki zwyczajne dają początek ułamkom peryodycznym, bezpośrednim lub mięszanym. Nawzajem, każdy ułamek peryodyczny daje się wyrazić w postaci ułamku zwyczajnego, który łatwo można odnaleźć.

Weźmy najpierw pod uwagę ułamek peryodyczny bezpośredni; dajmy np. ułamek 0,351351..., którego wartość w ułamku zwyczajnym oznaczmy przez x, t. j. $x=0,351351351....$

Aby peryod wyprowadzić przed przecinek, pomnóżmy obie strony przez 1000, t. j.

$$1000\ x=351,351351351....$$

Jeżeli teraz od drugiego z tych wyrażeń odejmiemy pierwsze, otrzymamy:

$$999\ x=351,$$

zkąd $x={}^{351}/_{999}$ 1)

który to ułamek po uproszczeniu przez 27 wydaje $^{13}/_{37}$, ułamek, z któregośmy właśnie w § poprzedzającym otrzymali dany tu ułamek peryodyczny. Ponieważ postępowanie to daje się zastosować do każdego ułamku peryodycznego bezpośredniego, przeto w ogólności, ułamek peryodyczny bezpośredni równa się zwyczajnemu, którego licznik stanowi jeden peryod, a którego mianownik jest liczbą złożoną z tylu dziewiątek, ile jest cyfr w peryodzie.

Weźmy jeszcze za przykład ułamek 0,999..., który według ogólnéj zasady wynosi $^{9}/_{9}=1$. Osobliwém wydawać się może, że ułamek równa się jedności, ale łatwo to usprawiedliwić; poprzestając w ułamku danym na pierwszéj cyfrze dziesiętnéj, mamy $^{9}/_{10}$, któráto wartość różni się od 1 o $^{1}/_{10}$, biorąc dwie cyfry, otrzymujemy wartość $^{99}/_{100}$, różniącą się od 1 o $^{1}/_{100}$, biorąc 6 cyfr mamy wartość różniącą się od 1 o $^{1}/_{1000000}$ i t. d., im daléj zatém postępujemy w tym szeregu cyfr, znajdujemy coraz mniejszą różnicę od 1, a że szereg tych cyfr biegnie istotnie ku nieskończoności, przeto ostatecznie uważana tu różnica musi stać się $=0$, czyli istotną wartością tego ułamku jest rzeczywiście 1. Tak samo uważać należy znaczenie każdego ułamku peryodycznego.

Przejdźmy teraz do ułamków peryodycznych mięszanych; dajmy np.

---

1) Naturalniéj otrzymać możemy tę wartość, uważając ułamek peryodyczny za postęp geometryczny, ale nie chcemy tu przypuszczać znajomości u czytelnika teory postępów.

ułamek 0,64189189..., którego szukaną wartość w ułamku zwyczajnym oznaczmy przez x, t. j.

$$x=0,64189189...$$

Aby wyprowadzić przed przecinek część przedperyodową, pomnóżmy obie strony tego wyrażenia przez 100:

$$100\,x=64,189189...$$

Aby znów wyprowadzić przed przecinek część przedperyodową i jeden peryod, pomnóżmy obie strony przez 100000:

$$100000\,x=64189,189189...$$

Jeżeli od drugiego z dwu ostatnich wyrażeń odejmiemy pierwsze, otrzymamy:

$$99900\,x=64189-64$$

zkąd

$$x=\frac{64189-64}{99900}$$

Na wartość przeto ułamku danego otrzymujemy $^{64125}/_{99900}$, który po uproszczeniu wydaje $^{95}/_{148}$.

Ponieważ rozumowanie powyższe daje się przeprowadzić dla każdego ułamku peryodycznego mieszanego, wnosimy przeto, że ułamek peryodyczny mieszany równa się zwyczajnemu, mającemu za licznik liczbę złożoną z części przedperyodowéj i jednego peryodu, zmniejszoną częścią przedperyodową, a za mianownik liczbę złożoną z tylu dziewiątek, ile jest cyfr w peryodzie, zakończoną tylu zerami, ile jest cyfr przed peryodem.

Poprzednio np. znaleziony ułamek

$$0,30909...=\frac{309-3}{990}=\frac{306}{990}=\frac{17}{55}.$$

Wywody powyższe prowadzą daléj do ciekawych uwag. Możnaby mianowicie sądzić, że część przedperyodową i peryod ułamku peryodycznego mięszanego można rozmaicie uważać. Tak np. w wyżéj rozbieranym ułamku 0,64189189... przyjmowaliśmy za część przedperyodową 64 a za peryod 189; możnaby wszakże za część przedperyodową uważać 641, a w takim razie peryod byłby 891, t. j. ułamek przyjąłby postać 0,641891891... Łatwo jednak widzieć, że uważanie takie doprowadziłoby do poprzedniego wypadku, bo wartość tego ułamku w tym razie byłaby:

$$\frac{641891-641}{999000}=\frac{641250}{999000}=\frac{64125}{99900}.$$

Z tego widzimy, że licznik tak otrzymanego ułamku zwyczajnego nie może być zakończonym jedném lub kilkoma zerami, że zatém mianownik musi być istotnie zakończonym tylu zerami, ile jest cyfr przed peryodem. Po uproszczeniu więc ostateczném tego ułamku między czynnikami mianownika pozostanie zawsze 2 i 5, albo przynajmniéj jeden z dwu tych czynników, w potędze takiego stopnia, ile cyfr poprzedza peryod.

Nawzajem przeto, każdy ułamek zwyczajny nieprzywiedlny, którego mianownik, oprócz innych czynników, zawiera jeszcze czynniki 2 i 5, albo jeden z tych czynników, prowadzi do ułamku peryodycznego mieszanego, którego peryod zaczynać się będzie po tylu cyfrach, ile jest jedności w większym z dwu wykładników znajdujących się nad czynnikami 2 i 5, wchodzącemi do mianownika.

Gdyby bowiem ten ułamek zwyczajny wydał ułamek peryodyczny bezpośredni, to zamieniwszy go na ułamek zwyczajny, otrzymalibyśmy ułamek któregoby mianownik złożonym był z samych dziewiątek, a zatém między czynnikami swemi nie zawierał 2 ani 5, a wtedy, ułamek ten sprowadzony do najprostszéj postaci, byłby równy ułamkowi danemu, również nieprzywiedlnemu, a zawierającemu powyższe czynniki mianownika,—co być nie może. [1])

Niech daléj n oznacza większy z dwu wykładników czynników 2 i 5, zachodzących w mianowniku ułamku danego,—peryod zaczynać się musi dopiero po n cyfrach; przypuśćmy bowiem np. że zaczyna się już po $n-1$ cyfrach, wtedy zamiana tego ułamku peryodycznego na zwyczajny wyda ułamek, którego mianownik zawierałby oba czynniki 2 i 5, albo jeden z nich w potędze tylko $(n-1)$-éj, który przeto znowu nie mógłby być równym ułamkowi danemu, gdyż oba uważamy jako nieprzywiedlne.

Dla téj saméj przyczyny ułamek zwyczajny (nieprzywiedlny), nie zawierający w mianowniku swoim żadnego z czynników 2 i 5, wydawać musi ułamek peryodyczny bezpośredni; inaczéj bowiem doszlibyśmy do dwu ułamków nieprzywiedlnych równych, z których jeden zawierałby w mianowniku czynniki 2 i 5, lub jeden z nich, a drugi nie.

---

[1]) Ułamek bowiem nieprzywiedlny może być równym takiemu tylko innemu ułamkowi, którego licznik i mianownik są jednakowemi wielokrotnościami licznika i mianownika ułamku danego. Niech bowiem $\frac{a}{b}$ oznacza ułamek nieprzywiedlny, t. j. ułamek, któregoby oba wyrazy a i b były pierwszemi względem siebie, i niech $\frac{c}{d}$ oznacza ułamek równy poprzedniemu, t. j.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Z równości téj wypływa $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$,
a oznaczywszy wartość każdego z tych ułamków przez m, t. j.

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m$$

mamy $\quad c=am \quad d=bm$

Ułamek przeto $\frac{c}{d}$ musi mieć koniecznie postać $\frac{am}{bm}$, co było do okazania.

Innemi słowy, dwa ułamki nieprzywiedlne, z różnych liczb złożone, nie mogą być równemi.

Dla tego to uważane wyżéj ułamki $^5/_7$ i $^{13}/_{37}$ wydały ułamki peryodyczne bezpośrednie; ułamek $^{17}/_{55}={}^{17}/_{5 \cdot 11}$ prowadzi do ułamku peryodycznego mieszanego, w którym peryod zaczyna się po jednéj cyfrze, a ułamek $\frac{95}{148}=\frac{99}{2^2.37}$ podobny ułamek, w którym peryod zaczyna się po dwu cyfrach. [1])

§ 29.

Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne, jakeśmy powiedzieli, jest nader pospolitą czynnością przy każdym rachunku, wszelkie przeto ułatwienia w wykonywaniu tego działania nader są ważne. Nie będzie przedewszystkiém trudną rzeczą zachowywać w pamięci ułamki dziesiętne, odpowiadające najprostszym i najczęściéj się trafiającym ułamkom zwyczajnym. I tak:

$^1/_2=0{,}5$ ztąd $^1/_{20}$ $(={}^1/_2 : 10)$ $=0{,}05$;
$^1/_3=0{,}333...$; $^2/_3=0{,}666...=0{,}67$; $^1/_{30}=0{,}033...$;
$^1/_4$ $(={}^1/_2 : 2)=0{,}25$; $^3/_4$ $(={}^1/_4 \times 3)=0{,}75$; $^1/_{40}=0{,}025$;
$^1/_5=0{,}2$; $^2/_5=0{,}4$; $^3/_5=0{,}6$; $^4/_5=0{,}8$; $^1/_{50}=0{,}02$;
$^1/_6$ $(={}^1/_3 : 2)=0{,}1666...=0{,}167$; $^5/_6$ $(=1-{}^1/_6)=0{,}8333...$;
$^1/_8$ $(={}^1/_4 : 2)=0{,}125$; $^3/_8=0{,}375$; $^5/_8=0{,}625$; $^7/_8=0{,}875$;
$^1/_{12}$ $(={}^1/_4 : 3)=0{,}0833...$;
$^1/_{16}$ $(={}^1/_8 : 2)=0{,}0625$;
$^1/_{24}$ $(={}^1/_4 : 6)=0{,}04166...$

---

[1]) Ustęp ten, przekraczający nieco właściwe zadanie niniejszéj książki, przytoczyliśmy tu dla tego, że rzecz ta nie może być należycie rozwijaną przy początkowym wykładzie arytmetyki i że rzuca ona jasne światło na dzielenie w ogólności. Z tego wnosić już możemy, kiedy dzielenie może być skończoném, a kiedy nie, i że w tym ostatnim razie iloraz musi być ułamkiem dziesiętnym peryodycznym, jakkolwiek przy wielkich dzielnikach peryody mogą być z bardzo wielu cyfr złożone. Zupełnie inne znaczenie mają ułamki dziesiętne o nieograniczonéj liczbie cyfr, ale nie zawierające grup statecznie się powtarzających. Do liczb takich prowadzi np. wyciąganie pierwiastków kwadratowych z liczb, które nie są zupełnemi kwadratami, jak np. pierwiastek z 2. Ponieważ pierwiastek z 2 nie może być ani liczbą całkowitą, ani ułamkiem (bo kwadrat ułamku nieprzywiedlnego jest również ułamkiem nieprzewiedlnym), nie może téż być przeto ułamkiem peryodycznym (bo takowy dałby się sprowadzić do zwyczajnego). Liczba ta zatem w częściach jedności nie da się ściśle oznaczyć, czyli, innemi słowy, nie da się wymierzyć za pomocą jedności; dla tego to liczby takie nazywamy *niewspółmiernemi z jednością* czyli krócéj *niewymiernemi*. Dzielenie do liczb niewymiernych prowadzić nie może.

W wielu bardzo przypadkach uniknąć możemy dzielenia, rozkładając dany ułamek na części dogodne do zamiany w ułamek dziesiętny.

Tak np. zamienimy w ułamki dziesiętne następnie ułamki zwyczajne:

1) $\frac{37}{64}\left(=\frac{32}{64}+\frac{4}{64}+\frac{1}{64}\right)$:

$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ 0,5

$\frac{4}{64}=\frac{1}{16}=$ 0,0625

$\frac{1}{64}=\frac{1}{16}:4$ 0,015625

0,578125

Rozumie się, że, stosownie do potrzeby, poprzestać możemy na trzech lub dwu cyfrach dziesiętnych.

2) $\frac{47}{60}\left(=\frac{42}{60}+\frac{5}{60}\right)$

$\frac{42}{60}=\frac{7}{10}=$ 0,7

$\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ 0,083

0,783

3) $\frac{6^1/_4}{12}$, co właściwie znaczy $6^1/_4 : 12=\frac{25}{48}$,

$\frac{6}{12}=$ 0,5

$\frac{^1/_4}{12}=\frac{1}{12}:4=0{,}0833:4=$ . . . 0,0208

0,521

4) $\frac{15}{16}\left(=1-\frac{1}{16}\right)$ 1

— 0,0625

0,9375

Do rzeczy téj wrócimy zresztą następnie.

Zadania.

Wyzazić w ułamkach dziesiętnych ułamki zwyczajne:

$\frac{29}{32}$; $\frac{43}{60}$; $\frac{53}{60}$; $\frac{23}{72}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{25}{32}$; $\frac{53}{73}$; $\frac{61}{96}$; $\frac{43}{120}$; $\frac{23}{24}$; $\frac{59}{60}$; $\frac{14}{15}$;

$\frac{31}{32}$; $\frac{9\frac{1}{2}}{16}$; $\frac{13\frac{1}{2}}{20}$; $\frac{19\frac{1}{4}}{30}$; $\frac{12\frac{1}{4}}{20}$; $\frac{14\frac{1}{6}}{30}$; $\frac{15\frac{5}{12}}{20}$; $\frac{39\frac{1}{2}}{40}$.

Rozdział II.

Mnożenie i dzielenie przybliżone (skrócone).

---

§ 30.

Uwagi ogólne. Urywając liczbę na którejkolwiek cyfrze i pozostałą jéj część wypełniając zerami, wyrażamy liczbę w przybliżeniu. Błąd popełniony jest wtedy mniejszym od jednostki tego rzędu, na któréj liczbę urywamy; tak np. zamiast 236473 biorąc 236000 popełniamy błąd mniejszy od 1000; mówimy wtedy, że liczbę wyrażamy z przybliżeniem do 1000. Prosta atoli uwaga pozwala nam przybliżenie to daléj posunąć. W powyższém odrzuceniu trzech ostatnich cyfr błąd mniejszy jest nietylko od 1000 ale i od 500, t. j. od połowy jedności tego rzędu, na któréj liczbę urywamy. W liczbie 236873, jeżeli odrzucimy trzy ostatnie cyfry i wyrazimy ją okrągło przez 236000, błąd jest mniejszym od 1000 ale większym od 500; łatwo tu jednak widzieć, że popełnimy błąd mniejszy, biorąc nie 236000 a 237000; w pierwszym razie bierzemy zamało, błąd jest przez niedomiar, w drugim razie za wiele, błąd jest przez nadmiar, ale jest mniejszym od 500, od połowy jedności tego rzędu, na którym poprzestajemy. Dla osiągnięcia przeto tego ostatniego przybliżenia należy uważać na pierwszą z odrzucanych cyfr; jeżeli takowa jest mniejszą od 5, pozostawiamy bez zmiany ostatnią z cyfr zachowywanych, jeżeli jest większą, powyższą cyfrę powiększamy o jedność. Toż samo, co do ułamków dziesiętnych. Jeżeli w liczbie 273,3472 chcemy poprzestać na trzech cyfrach dziesiętnych, weźmiemy 273,347—błąd będzie mniejszy od połowy 0,001 czyli od 0,0005; jeżeli możemy poprzestać na dwu cyfrach dziesiętnych, weźmiemy 273,35—błąd będzie znów mniejszym od połowy 0,01, czyli od 0,005.

Szukając iloczynu lub ilorazu dwu liczb, często poprzestać możemy na pewnéj tylko liczbie cyfr najwyższych; zamiast przeto szukać wszystkich cyfr, aby potém ostatnie odrzucać, możemy działania te tak prowadzić, aby otrzymać tylko żądaną część iloczynu lub ilorazu. To nas prowadzi do mnożenia i dzielenia przybliżonego czyli skróconego.

Przedewszystkiém zastanowić się nam wypada nad liczbą cyfr iloczynu i ilorazu. — Dajmy, że mamy znalcźć liczbę cyfr iloczynu, wypadającego z pomnożenia liczby 6-cio cyfrowéj przez 4-o cyfrową. Mnożna (M) 6-cio-cyfrowa większą będzie oczywiście od najmniejszéj liczby 6 cyfrowéj czyli 100.000, a mniejszą od najmniejszéj liczby 7 cyfrowéj, czyli od milijona, t. j.

$$1\,000.000 > M > 100\,000$$

podobnież, czterocyfrowy mnożnik m:

$$10000 > m > 1000$$

Iloczyn zatém Mm zawartym będzie między iloczynami liczb skrajnych tych nierówności, t. j.

$$10\,000\,000\,000 < Mm < 100.000.000$$

t. j. iloczyn będzie mniejszym od najmniejszéj liczby 11 cyfrowéj, posiadać może przeto najwyżéj 10 cyfr, ale zarazem będzie większym od najmniejszéj liczby 9 cyfrowéj, posiadać zatém może najmniéj 9 cyfr, — w ogóle zatém być może tylko 10 albo 9 cyfrowym. Pomnożenie więc liczby 6-cyfrowéj przez 4 cyfrową prowadzi do iloczynu złożonego z 10 lub 9 cyfr; ale $10=6+4$, $9=6+4-1$; ponieważ zaś rozumowanie to da się łatwo przeprowadzić dla liczb złożonych z ilukolwiek cyfr, przeto w ogólności — liczba cyfr iloczynu równa się sumie liczby cyfr w mnożnéj i mnożniku, albo tejże sumie zmiejszonéj jednością.

Niech teraz m będzie liczbą cyfr dzielnéj, n liczbą cyfr dzielnika, x liczbą cyfr ilorazu; ponieważ dzielna jest iloczynem dzielnika przez iloraz, mamy według powyższego

$$m=n+x,$$

albo

$$m=n+x-1,$$

zkąd

$$x=m-n$$

albo

$$x=m-n+1.$$

Liczba przeto cyfr ilorazu równa się różnicy między liczbą cyfr w dzielnéj a liczbą cyfr w dzielniku, albo téż równa się téj różnicy zwiększonéj jednością. Przypadek drugi ma miejsce, gdy dzielnik mieści się w takiejże liczbie pierwszych cyfr dzielnéj, jaką sam posiada, przypadek pierwszy, gdy mieści się dopiero w liczbie cyfr o jeden większéj. Iloraz z podzielenia 876549 : 854 zawierać będzie 4 cyfry bo 854 mieści się w 876, iloraz z podzielenia 876549 : 897 tylko 3, bo 897 mieści się dopiero w 8765.

§ 31.

Mnożenie przybliżone ma na celu otrzymanie tylko pewnéj liczby pierwszych cyfr iloczynu, do oznaczonego rzędu, do tysięcy np. Oczywiście, nie możemy z góry odrzucić w mnożnéj i mnożniku cyfr rzędu niższego od tysięcy, bo jedności np. mnożnéj pomnożone przez tysiące mnożnika wydają tysiące, i nawzajem, setki mnożnéj mnożone przez setki mnożnika wydają dziesiątki tysięcy i t. d.,—można jednak mnożenie tak prowadzić, aby otrzymywać tylko cyfry żądanych rzędów. Postępowanie to zrozumianém być może najłatwiéj na przykładzie. Dajmy, że mamy do pomnożenia 21756$\times$4823 tak, aby iloczyn otrzymać tylko do tysięcy. Podpisujemy najpierw jedności mnożnika pod tą cyfrą mnożnéj, do rzędu któréj iloczyn pragniemy otrzymać, zatém w naszym przykładzie pod 1, a następnie inne cyfry w porządku przeciwnym temu, w jakim istotnie w mnożniku zachodzą, t. j.

$$\begin{array}{r} 21756 \\ 3284 \end{array}$$

Mnożenie przez każdą cyfrę mnożnika rozpoczynamy od téj cyfry mnożnéj, która nad nią bezpośrednio się znajduje, ale iloczyny wypisujemy jedne pod drugiemi, nie usuwając cyfr iloczynów następujących względem cyfr iloczynów poprzednich:

$$\begin{array}{r} 21756\times4823 \\ 3284 \\ \hline 87024 \\ 17400 \\ 434 \\ 63 \\ \hline 104921 \end{array}$$

Na iloczyn otrzymujemy 104921 tysięcy. Postępowanie to objaśnia się w ten sposób. Mnożąc 4$\times$6, mnożymy tysiące mnożnika przez jedności mnożnéj, na iloczyn przeto otrzymujemy tysiące, a mianowicie 24 tysięcy, cyfra zatém 4 jest rzędu tysięcy. Mnożąc daléj 4 przez następne cyfry mnożnéj, wyższych rzędów, otrzymujemy cyfry rzędów coraz wyższych, i wypisujemy je w iloczynie w naturalnym porządku. Mnożenie przez następną cyfrę mnożnika odwróconego, t. j. przez 8, rozpoczynamy od cyfry mnożnéj nad nią będącéj, t. j. od 5; bo tu mnożymy setki mnożnika przez dziesiątki mnożnéj, otrzymujemy przeto na iloczyn tysiące, w tym razie 40 tysięcy, 0 zatém przedstawia nam cyfrę rzędu tysięcy, podpisujemy ją tedy pod tysiącami poprzedniego iloczynu t. j. pod 4,—następnie pójdą cyfry rzędu coraz wyższego, które podpisujemy pod odpowiedniemi cyframi pierwszego iloczynu. Nie mnożymy zaś 8 przez poprzednią cyfrę mnożnéj, t. j. przez 6, bo wtedy mnożylibyśmy setki mnożnika przez jedności mnożnika, coby nam na iloczyn wydało setki, a takowe nie są wymagane. Podobnież, mnożenie przez 2 rozpocząć należy od 7 mnożnéj, bo z tego mnożenia (dziesiątek mnożnika przez setki mnożnéj) otrzymujemy tysiące iloczynu; mnożenie 2 przez 6 wydałoby dziesiątki, przez 5 setki: w iloczynie $2 \times 7 = 14$ cyfra 4 przedstawia tysiące i piszemy ją pod tysiącami poprzednich iloczynów. Tak samo nakoniec 3 (jedności) mnożymy przez 1 (tysiąc), na iloczyn otrzymujemy 3 tysiące.

Jednę wszakże okoliczność pominęliśmy w powyższém działaniu. W mnożeniu przez drugą cyfrę odwróconego mnożnika, t. j. przez 8, pominęliśmy zupełnie iloczyn 8×6 jako tworzący setki; ale setek tych mamy 48, zatém 4 tysiące i 8 setek, należy przeto do iloczynu 8×5, wydającego tysiące, dodać owe pominięte 4 tysiące. Jeżeli nadto przypomnimy sobie uwagę § poprzedzającego, to poznamy, że dodać należy nie 4 ale 5 tysięcy, bo 48 setek bliższemi są 5 aniżeli 4 tysięcy; tak poprawiona więc pierwsza od ręki prawéj cyfra drugiego cząstkowego iloczynu będzie istotnie 5 a nie 0. Tak samo przy mnożeniu przez 2: iloczyn z 2 przez pominiętą 5 wydaje 10 setek czyli 1 tysiąc, tak że pierwsza od ręki prawéj cyfra trzeciego iloczynu cząstkowego winna być 5 a nie 4, i podobnie w czwartym iloczynie cyfra 3 winna być powiększoną o 2, bo $3 \times 7 = 21$. Konieczna zatém w ogólności uwzględniać w ten sposób cyfrę mnożnéj, poprzedzającą bezpośrednio tę jéj cyfrę, od któréj mnożenie rozpoczynamy. Poprawkę tę cyfry iloczynu przeprowadzamy przy samém rozpoczynaniu mnożenia; mówimy np. $8 \times 6 = 48$ . . . 5, $8 \times 5 = 40$ a 5 . . . 45; $2 \times 5 = 10$ . . . 1, $2 \times 7 = 14$ a 1 . . . 15, i t. d. W ten sposób powyższe mnożenie przeprowadzone z uwzględnieniem tych poprawek przedstawi się, jak następuje:

$$\begin{array}{r}
21756 \times 4823 \\
3284 \\
\hline
87024 \\
17405 \\
435 \\
65 \\
\hline
104929
\end{array}$$

Toż samo mnożenie wykonane w sposób zwykły, jeżeli, dla utrzymania analogii, rozpoczniemy je od najwyższéj cyfry mnożnika, będzie:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{21756 \times 4823} \\
\hline
87024 & \\
17404 & 8 \\
435 & 12 \\
65 & 268 \\
\hline
104929 & 188
\end{array}$$

Oszczędność zatém pracy polega na uniknięciu niepotrzebnych nam cyfr po za liniją położonych.

Kilka innych przykładów rozjaśni mogące tu powstać wątpliwości:

1) Pomnożyć mamy np. 623471×2315067 z przybliżeniem do milijonów.

$$\begin{array}{r}
623471 \times 2315067 \\
7605132 \\
\hline
1246942 \\
187041 \\
6235 \\
3117 \\
37 \\
4 \\
\hline
1443376
\end{array}\ \text{mil.}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{623471 \times 2315067} \\
\hline
1246942 & \\
187041 & 3 \\
6234 & 71 \\
3117 & 355 \\
37 & 40826 \\
4 & 364297 \\
\hline
1443377 & 137557
\end{array}$$

Ponieważ tu szło o otrzymanie w iloczynie milijonów, podpisaliśmy jedności mnożnika pod milijonami mnożnéj, a raczéj pod miejscem milijonów, bo milijonów nie ma już w mnożnéj. Zresztą na toż samo wyjdzie podpisanie milijonów mnożnika pod jednościami mnożnéj, i w ogólności—jeżeli tu pod dziesiątkami, setkami i t. d. mnożnéj znajdują się sta tysięcy, dziesiątki tysięcy i t. d. mnożnika, to téż nad dziesiątkami, setkami i t. d. mnożnika znajdują się sta tysięcy, dziesiątki tysięcy i t. d. mnożnéj; zawsze przy takiém uporządkowaniu cyfra mnożnika mnożona przez bezpośrednio nad nią położoną cyfrę mnożnéj wydaje milijony. W mnożeniu przez 3 nie trzeba było wprowadzać żadnéj poprawki do iloczynu bo $3 \times 1 = 3 < 5$, natomiast w mnożeniu przez 1 dodaliśmy do iloczynu 1, bo $1 \times 7 = 1 > 5$. Co do ostatniéj cyfry iloczynu, t. j. 7, przyjąć możemy, że nad nią znajduje się 0, ale do tego zera dodać należy dziesiątki z pomnożenia 7 przez poprzednią cyfrę mnożnéj 6, t. j. 4. Obok wykonane mnożenie zwykłe objaśnia dostatecznie to uwzględnianie cyfer pomijanych. Pomimo jednak wszystkich tych poprawek widzimy, że ostatnia przez nas otrzymana cyfra iloczynu jest o 1 za małą; zdarza się téż, lubo rzadziéj, że bywa o 1 za wielką. Jeżeli przeto wymaganą jest dokładność ostatniéj cyfry, należy iloczyn otrzymywać o jednę cyfrę więcéj, aniżeli się żąda.

2) Pomnożyć 630193 przez 7289 z przybliżeniem do dziesiątków tysięcy.

$$
\begin{array}{r}
630193 \times 7289 \\
9827 \\
\hline
441135 \\
12604 \\
5041 \\
567 \\
\hline
459347
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{630193 \times 7289} \\
\hline
441135 & 1 \\
12603 & 86 \\
5041 & 544 \\
567 & 1737 \\
\hline
459347 & 6777
\end{array}
$$

Jedności mnożnéj znajdują się tu zewnątrz rachunku, bo z pomnożenia ich przez najwyższego rzędu cyfrę mnożnéj, t. j. przez tysiące, wypadają tylko tysiące, wpływają one przeto tylko na poprawkę iloczyny 7×9. Ostatnia cyfra ogólnego iloczynu jest i tu nieco zamałą.

3) Pomnożyć 47921×835376 z przybliżeniem do dziesiątków milijonów

$$
\begin{array}{r}
47921 \times 835376 \\
673538 \\
\hline
3834 \\
144 \\
24 \\
1 \\
\hline
4003
\end{array}
$$

W przykładzie tym jedności mnożnéj na żądany iloczyn wpływu żadnego nie mają, bo mnożone przez najwyższego nawet rzędu cyfry mnożnika, t. j. przez setki tysięcy, wydają zaledwie setki tysięcy, które nie wpływają zgoła na cyfrę dziesiątków milijonów; toż samo powiedzieć można o jednościach i dziesiątkach mnożnéj.

Uwaga ta usprawiedliwia wystąpienie cyfr mnożnéj w stronę prawą i cyfr mnożnika w stronę lewą po za cyfry drugiego czynnika.

4) Pomnożyć 47386 × 482351 z przybliżeniem do tysięcy.

```
    47386
     153284
  ---------
  18954400
   3790880
     94772
     14216
      2369
        47
  ---------
  22856684
```

W tym przykładzie cyfry mnożnika 8 i 4 występują w stronę prawą po za jedności mnożnika, puste nad niemi miejsca wyobrażamy sobie wypełnione zerami i mnożymy według ogólego prawidła. W tym bowiem razie najwyższego rzędu cyfry mnożnika, t. j. setki tysięcy mnożone przez jedności mnożnéj wydają setki tysięcy, tysiące zaś, o które nam tu jeszcze idzie, wypadłyby z pomnożenia setek tysięcy mnożnika przez setne części mnożnéj, zera zatém, które do mnożnéj dopisujemy, przedstawiają nam jéj części dziesiętne i setne.

§ 32.

Istotną wszakże usługę oddaje nam powyższy sposób mnożenia dopiero przy mnożeniu ułamków dziesiętnych; przy zwykłém bowiem mnożeniu otrzymujemy w iloczynie tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w mnożnéj i mnożniku, najczęściéj zaś możemy poprzestać na daleko mniejszéj ich liczbie. Prawidła zresztą wyżéj podane nie potrzebują tu żadnych rozszerzeń; kilka przykładów wyjaśni całe postępowanie.

1) Pomnożyć 34,25367 × 5,4637 z przybliżeniem do 0,001 (t. j. tak, aby w iloczynie otrzymać części tysiączne):

$$\begin{array}{r}
34{,}25367 \times 5{,}4637 \\
73645 \quad\quad \\
\hline
171268 \quad\quad \\
13701 \quad\quad \\
2055 \quad\quad \\
103 \quad\quad \\
24 \quad\quad \\
\hline
187{,}151 \quad\quad
\end{array}$$

Jedności mnożnika 5 napisaliśmy tu pod częściami tysiącznemi mnożnéj (albo też, części tysiączne mnożnika pod jednościami mnożnéj) i mnożyliśmy według prawideł powyższych. W pierwszym iloczynie cząstkowym z mnożenia cyfr 5×3 (jedności przez części tysiączne) otrzymujemy części tysiączne, ale uwzględniamy tu jeszcze iloczyn 5×6 (jedności przez części dziesięciotyczne), bo otrzymane ztąd 0,0030 dają 0,003. W drugim iloczynie cząstkowym z mnożenia 4×5 (części dziesiątych przez setne) otrzymujemy również części tysiączne, uwzględniając przytém iloczyn 4×3 i t. d. Iloczyn każdéj cyfry mnożnika przez bezpośrednio nad nią stojącą cyfrę mnożnéj daje nam części tysiączne.

2) Wykonajmy jeszcze poprzednie mnożenie z przybliżeniem do 0,0001:

$$\begin{array}{r}
34{,}25367 \times 5{,}4637 \\
73645 \quad\quad \\
\hline
1712684 \quad\quad \\
137014 \quad\quad \\
20552 \quad\quad \\
1027 \quad\quad \\
239 \quad\quad \\
\hline
187{,}1526 \quad\quad
\end{array}$$

Odrzucając w tym iloczynie ostatnią cyfrę, otrzymujemy 187,152 a raczéj 187,153; poprzednio zatém otrzymana cyfra części tysiącznych jest blisko o 2 za małą. W ogólności, jeżeli ostatnia cyfra iloczynu ma być jak najpewniejszą, należy się w mnożeniu posunąć o jednę cyfrę daléj.

3) Pomnożyć $47{,}0647 \times 0{,}234678$ z przyb. do 0,001 (mnożymy do 0,0001).

47,0647 × 0,234678
876 4320
94129
14119
1882
282
32
3
11,0447
11,045

Albo też, podpisawszy mnożną pod mnożnikiem:

47,0647 × 0,234678
746074
93871
16427
140
9
1
11,0448
11,045

3) Pomnożyć 0,004632 × 0,0378 z przyb. do 0,000001 (mnożymy do 0,0000001)

0,004632 × 0,0378
87300
1390
324
37
1751
0,000175

4) Pomnożyć 47,245 × 273,458726 z przyb. do 0,01 (mnożymy do 0,001):

47,245 × 273,458726
6278 54372
9449000
3307150
141735
18898
2362
378
133
1
12919,557
12919,56

Albo też:

$$\begin{array}{r}
47{,}245\times273{,}458726 \\
5\;4274 \\
\hline
10938349 \\
1914211 \\
54691 \\
10938 \\
1367 \\
\hline
12919{,}556
\end{array}$$

5) Pomnóżmy jeszcze $327{,}38\times94{,}817$ z przyb. do jedności

$$\begin{array}{l}
327{,}38\times94817 \\
7184\;9 \\
\hline
29464 \\
\;\,1309 \\
\;\;\;262 \\
\;\;\;\;\;\;3 \\
\;\;\;\;\;\;2 \\
\hline
31040
\end{array}$$

Prowadząc to mnożenie do 0,1, otrzymalibyśmy na iloczyn 31041.

§ 33.

Mnożenie przybliżone sformułowaném być może w inny jeszcze sposób; iść może o znalezienie oznaczonéj liczby cyfr rzędów najwyższych iloczynu. Takie postawienie zadania łatwo sprowadzoném być może do poprzedniego. Dajmy np., że iloczynu 42085×23169 znaleść mamy tylko 4 cyfry najwyższe. Ponieważ iloczyn jest tu 9-cyfrowym, t. j. cyfry rzędu najwyższego są tu setkami milijonów, a mamy otrzymać cztery pierwsze cyfry iloczynu, przeto mnożenie poprowadzić należy z przybliżeniem do setek tysięcy; t. j. napisać:

$$\begin{array}{r}
42085 \\
96132 \\
\hline
\end{array}$$

i mnożyć według wyżéj podanych prawideł. Rozumowanie to jednak jest zbyteczném. W tym bowiem sposobie mnożenia mamy w ogólności w iloczynie tyle cyfr, ile ich jest w pierwszym iloczynie cząstkowym; dostateczna zatém, podpisać najwyższą cyfrę mnożnika pod czwartą cyfrą mnożnéj, mnożyć według poprzednich prawideł, a następnie wskazać, jakiego rzędu są cyfry otrzymane. W danym tu przykładzie podpisujemy przeto 2 pod 8:

$$\begin{array}{r} 42085\times23169 \\ 96132 \\ \hline 8417 \\ 1262 \\ 42 \\ 25 \\ 4 \\ \hline 9750 \end{array}$$

Aby oznaczyć rzęd cyfr otrzymanych, dosyć spojrzeć pod którego rzędu cyfrą mnożnéj znajdują się jedności mnożnika; w danym przykładzie umieszczone one są pod setkami tysięcy, iloczyn zatém otrzymany wynosi 9750 setek tysięcy, czyli 975 milijonów.

Ale gdy iloczyn najwyższéj cyfry mnożnéj przez najwyższą cyfrę mnożnika jest dwucyfrowym, albo raczéj, gdy iloczyn dwu najwyższych cyfer mnożnéj przez najwyższą cyfrę mnożnika jest trzycyfrowym, wystarcza użycie do mnożenia liczby cyfr mnożnéj o jednę mniejszéj od żądanéj liczby cyfr w iloczynie. Tak np. mając pomnożyć 76324×52083 tak, aby otrzymać 5 najwyższych cyfr iloczynu, dosyć będzie najwyższą cyfrę mnożnika podpisać pod czwartą cyfrą mnożnéj:

$$\begin{array}{r} 76324\times52083 \\ 38025 \\ \hline 38162 \\ 1526 \\ 61 \\ 2 \\ \hline 39751 \end{array}$$ setek tysięcy.

Pomnóżmy jeszcze $29,7854\times4,256$ tak, aby otrzymać 4 najwyższe cyfry iloczynu; 4×2 wprawdzie daje iloczyn jednocyfrowy, ale 29×4 iloczyn 3 cyfrowy, — dosyć zatém będzie podpisać najwyższą cyfrę mnożnika pod trzecią cyfrą mnożnéj:

$$\begin{array}{r} 29,7854\times4,256 \\ 6524 \\ \hline 1191 \\ 59 \\ 14 \\ 1 \\ \hline 126,5 \end{array}$$

bo jedności mnożnika przypadają pod dziesiątemi częściami mnożnéj.

Zadania.

47563 × 82547	z przybliżeniem do 1000
278342 × 368012	" " "
47256 × 4839276	" " 1000000
7698 × 19068	" " "
6724,983 × 87854	" " 100
98536 × 48,9476	" " "
42,589 × 7,864	" " 1
27,658 × 349,2753	" " "
369,529 × 2,138	" " 0,001
0,9057 × 0,802	" " "
49,3257 × 26,346	" " 0,0001
0,07193 × 0,9415	" " "
0,8645 × 3,00602	" " 0,000001
0,00659 × 0,001475	" " "
54869 × 27054	5 cyfr najwyższych
485426 × 527439	4 " "
402936 × 23905	5 " "
372,438 × 613,278	4 " "
32,085 × 33,67	4 " "
0,854 × 0,00297	3 " "
0,0435 × 0,092378	3 " "

§ 34.

Dzielenie przybliżone częściéj jeszcze niż mnożenie znajdywać może zastosowanie i sprowadza istotne zaoszczędzenie pracy. W dzieleniu tém idzie o znalezienie kilku tylko pierwszych cyfr ilorazu; a całe to postępowanie skrócone polega na uwadze, że cyfra ilorazu zależy głównie od pierwszych cyfr dzielnéj i dzielnika, tak, że bez znacznego błędu odrzucać możemy ostatnie cyfry obu tych liczb; zamiast np. dzielić 63278 : 8247 dzielimy 63270 : 8240, czyli 6327 : 824.

Dajmy najpierw, że dzielna i dzielnik są liczbami całkowitemi i że mamy znaleźć zupełny wprawdzie iloraz, ale nie mamy potrzeby wyszukiwania reszty. Weźmy przedewszystkiém przypadek, gdy liczba cyfr w ilorazie wyrównywa liczbie cyfer w dzielniku. Dzielić będziemy według uwagi powyższéj, zatém, zamiast składać kolejno cyfry dzielnéj, przekreślać będziemy kolejno ostatnie cyfry dzielnika.

8769406 : 5493		8769	406 : 5493	
3276	1596	3276	4	1596
529		529	90	
35		35	536	
3		2	578	

Dzielnikiem pierwszym jest 5493, drugim 549, trzecim 54, czwartym 5; uwzględniamy wszakże za każdym razem cyfrę ostatnio przekreśloną; mnożąc np. dzielnik 549 przez znalezioną cyfrę ilorazu 5, wprowadzamy poprawkę z pomnożenia 5 przez pominiętą cyfrę ilorazu 3; $5 \times 3 = 15$, co przyjmujemy za 20 i do iloczynu 5×9 dodajemy 2, mówiąc 5×3 . . . 15, 2, 5×9 . . . 45 a 2 . . . 47 a 9 . . . 56 i t. d. Podobnież przy mnożeniu dzielnika 54 przez znalezioną cyfrę ilorazu 9, do iloczynu $9 \times 4 = 36$ dodajemy 8 ($9 \times 9 = 81$).—Obok wykonane dzielenie sposobem zwykłym okazuje, na czém tu oszczędność pracy polega.

Z przykładu tego widzimy, że gdy w ilorazie ma być tyle cyfr, ile ich jest w dzielniku, można już po pierwszém dzieleniu rozpocząć skreślanie cyfr dzielnika, a pozostanie nam jeszcze jedna cyfra na ostatnie dzielenie. Jeżeli przeto w ilorazie ma być mniéj cyfr, niż ich jest w dzielniku, można już do dzielenia pierwszego użyć dzielnika skróconego, pozostawiwszy w nim mianowicie tyle cyfr ile ich ma być w ilorazie. Dajmy np. do podzielenia 970654832 : 394632; ponieważ iloraz będzie tu 4-cyfrowym, a dzielnik jest 6-cyfrowym, przed rozpoczęciem przeto dzielenia odrzucić już możemy dwie ostatnie jego cyfry:

970654832 : 3946|32		9706	54832 : 394632	
1813	2459	1813	908	2459
235		235	3803	
38		38	06432	
3		2	54744	

Ale, jeżeli w ilorazie ma być więcéj cyfr niż ich jest w dzielniku, widoczna, że niepodobna od samego początku dzielenia skreślać cyfr dzielnika, nie starczyłoby ich bowiem na doprowadzenie dzielenia do końca, dla tego potrzeba do pewnego miejsca dzielenie prowadzić sposobem zwykłym, a następnie dopiero użyć wyżéj podanego skrócenia. Oznaczyć przeto należy przedewszystkiém w dzielnéj miejsce, do którego dzielenie ma być prowadzone sposobem zwykłym czyli dokąd cyfry dzielnéj mają być składane, t. j. przygotować dzielnę skróconą. Dzielna ta skrócona powinna zawierać tyle cyfr, ile ich ma być w ilorazie, lub o jednę więcéj, stosownie do tego, czy dzielnik mieści się w tyluż cyfrach dzielnéj, ile sam posiada, czy też dopiero w liczbie cyfr o jednę większéj. Z dzielenia np. 83254906394 : 54792 otrzymamy iloraz 7-cyfrowy, a że dzielnik 5-cyfrowy mieści się w pierwszych 5 cyfrach dzielnéj, pozostawiamy w niéj 7 cyfr; z dzielenia 460894572379 : 97324 otrzymamy także iloraz 7 cyfrowy, ale że dzielnik mieści się dopiero w 6 cyfrach dzielnéj, pozostawiamy w niéj 8 cyfr.

```
8325490|6394 : 54792          8325490|6394 : 54792
284629          1519471       284629 |        1519471
 106690                        106690|
  51898                         51898|6
   2585                          2585|83
    393                           394|159
     10                            10|6154
      5                             5|1362

46089457|2379 : 97324         46089457|2379 : 97324
715985          4735672       715985  |       4735672
 347177                        347177 |
  55205                         55205 |2
   6543                          6543 |23
    704                           703 |797
     23                            22 |5299
      4                             3 |0651
```

Widzimy z tych przykładów, że ostatnie cyfry ilorazów otrzymywanych sposobem skróconym są w ogólności zgodne z ostatniemi cyframi ilorazów znajdywanych ściśle. W każdym jednak razie ostatnia ta cyfra może być błędną o 1 — rzadko (w długich dzieleniach) o 2 jedności, i to być zamałą lub zawielką, gdyż iloczyny cząstkowe bierzemy już to przez nadmiar już przez niedomiar, zatém reszty czyli dzielne są już zamałe już zawielkie. Nadto, jeżeli chcemy jedności mieć najbardziéj przybliżone do wartości rzetelnéj, t. j. różne od tych wartości mniéj niż o 0,5, należy posiadać jednę cyfrę dziesiętną. W ogóle zatém, chcąc znaleźć iloraz zupełny w całkowitych, t. j. z przybliżeniem do jedności, należy poszukiwać jeszcze pierwszéj cyfry dziesiętnéj, sposobem, jaki niżéj poznamy.

§ 35.

Powyższe prawidła dla trzech różnych przypadków (mianowicie, czy w iloczynie ma być tyleż cyfr, ile ich jest w dzielniku, albo też mniéj lub więcéj) dają się też łatwo zawrzeć w jedno prawidło ogólne: Po stronie prawéj dzielnéj odcinamy tyle cyfr, ile ich jest w dzielniku mniéj jedną, pozostałe z lewéj strony stanowią dzielnę skróconą, do końca któréj cyfry składamy do reszt, poczém rozpoczynamy skreślanie cyfr dzielnika; jeżeli zaś posiada ona mniéj cyfr niż dzielnik, to od początku dzielenia skreślamy w nim cyfry ostatnie. Tak np. w wyżéj wykonanych dzieleniach:

8769|406 : 5493
9706|54832 : 394632
8325490|6394 : 54792
46089457|2379 : 97324

odcinamy w pierwszém 3, w drugiém 5, w trzeciém i czwartém po 4 cyfry po prawéj stronie dzielnéj; w drugiém przeto z tych dzieleń pierwszym już dzielnikiem jest liczba 3946, w pozostałych rozpoczynamy działanie przez dzielniki zupełne i następnie dopiero zaczynamy skreślać ostatnie cyfry [1]).

Ostatnie to sformułowanie powyższego prawidła, które się łatwo wyprowadza z pierwszego, na zasadzie uwagi o liczbie cyfr w ilorazie, jakkolwiek treściwsze, nie posługuje w tym razie, gdy pragniemy znaleźć nie zupełną część całkowitą ilorazu, a tylko oznaczoną liczbę cyfr rzędów najwyższych. W tym razie, jak w § poprzedzającym, uważamy przedewszystkiém, czy żądana liczba cyfr w ilorazie jest równą, mniejszą czy też większą od liczby cyfr w dzielniku; w pierwszym przypadku rozpoczynamy dzielenie przez zupełny dzielnik i po pierwszém już dzieleniu zaczynamy skreślać jego cyfry; w drugim przed rozpoczęciem dzielenia już skreślamy ostatnie cyfry dzielnika, pozostawiając w nim tyle tylko, ile ich mamy znaleźć w ilorazie; w trzecim nakoniec przygotowujemy najpierw dzielnę skróconą, t. j. odcinamy od

---

[1]) Stosownie do ostatniéj uwagi poprzedniego § należy w każdym razie znajdywać jeszcze pierwszą cyfrę dziesiętną; w tym celu dostateczna pozostawiać o jednę więcéj cyfrę w dzielnéj, zatém odcinać po prawéj stronie dzielnéj tyle cyfr, ile jest w dzielniku mniéj dwiema.

strony lewéj tyle cyfr, ile ich mamy znaleźć w ilorazie, albo o jednę więcéj, stosownie do tego, czy dzielnik mieści się w tyluż cyfrach dzielnéj, ile sam posiada, czy téż nie. W każdym razie, aby ostatnią cyfrę posiadać pewną, szukamy o jednę więcéj, aniżeli się wymaga.

Przykłady:

1) Znaleźć 4 pierwsze cyfry ilorazu: 90694382537 : 36783. Szukać będziemy 5 cyfr, zatém przypadek pierwszy:

90694382537 : 36783
17128 24656
2415
208
24
2

Cztery zatém żądane cyfry ilorazu są 2466, a że iloraz jest tu 7-cyfrowy, zatém iloraz wynosi 2466000 z przybliżeniem do tysięcy (t. j. błąd jest mniejszy od $^1/_2$. 1000 czyli od 500).

2) Znaléźć 3 pierwsze cyfry ilorazu: 386327854326 : 982756; szukamy 4 cyfr,—przypadek drugi:

386327854326 : 9827|56
9149 3931
305
10
0

Iloraz zatém jest 393000 z przybliżeniem do tysięcy.

3) Znaleźć 6 pierwszych cyfr ilorazu: 46708348943 : 3258;—szukamy 7 cyfr,—przypadek trzeci, dzielnik mieści się w 4 pierwszych cyfrach dzielnéj:

4670834|8943 : 3258
14128 | 1433650
10963
11894
2120
165
2

Iloraz zatém jest 14336500 z przybliżeniem do 100.

4) Znaleźć 5 najwyższych cyfr ilorazu: 32748357268134 : 8375; szukamy 6 cyfr,—przypadek trzeci, dzielnik nie mieści się w 4 pierwszych cyfrach dzielnéj.

```
3274835|7268134 : 8375
  76233|          ------
   8585|          391025
    210
     43
      1
```

Iloraz zatém jest 3910300000 z przybliżeniem do 100000.

§ 36.

Rozumie się, że uproszczenie to główną usługę oddawać będzie przy dzieleniu ułamków dziesiętnych i w ogóle, gdy idzie o znalezienie oznaczonéj liczby cyfr dziesiętnych. Poszukujemy tu najpierw, ile w ilorazie ma być cyfr całkowitych, co łącznie z żądaną liczbą cyfr dziesiętnych daje nam ogólną żądaną liczbę cyfr ilorazu, a wtedy możemy wprost stosować wyżéj podane prawidła; nie potrzeba dodawać, że szukamy zawsze o jednę więcéj cyfr dziesiętnych, aniżeli się ich wymaga.

Przykłady.

1) 1821,5318 : 26,7346 z przybl. do 0,001.

W ilorazie cyfr całkowitych będzie 2, co wraz z 3 dziesiętnemi stanowi 5, szukać przeto należy 6 cyfr ilorazu,

```
1821,5318 : 26,7346
 217455     ------
   3578     681339
    905     68,134
    103
     23
      0
```

2) 648,7 : 57,276 z przybl. do 0,001. Tu szukać należy 6 cyfr w ilorazie, zatém więcéj, niż ich jest w dzielniku, pozostawić przeto należy w dzielnéj 6 cyfr t. j. dopisać 2 zera.

```
648,700 : 57,276
  75940   ------
          113258
  18664   ------
          11,326
   1481
    336
     50
      4
```

3) 547 : 763465,34 z przybl. do 0,000001. Tu cyfry dziesiętne znaczące zaczynają się dopiero na czwartém miejscu po przecinku, szukać przeto należy tylko 3 a raczéj 4 cyfr ilorazu:

54700 :	7634|65,34
1258	7164
495	0,000716
37	
7	

4) 0,3596 : 0,00674 z przybliżeniem do 0,01. Całkowitych 2, dziesiętnych 3,—szukać przeto należy 5 cyfr ilorazu:

0,359600 :	000674
2260	53353
2380	53,35
358	
21	
1	

Podzielić 726 : 489326, tak, aby otrzymać 3 cyfry znaczące (t. j. oprócz zer następujących po przecinku).

7260 :	489326
2367	1488
430	0,00149
39	
1	

Zadania.

39083278 : 8709	z przybl. do 1	
974699176083 : 48763214	„ „ „	
832549873 : 3782	„ „ „	
378609349572 : 60783	„ „ „	
83746498340 : 18764	5 pierwszych cyfr ilorazu	
36708342453284 : 20304	7 „ „ „	
1826,729 : 37,4875	z przybl. do 0,001	
476,7834 : 93,6278	„ „ 0,01	
648,756 : 29,37	„ „ 0,001	
378,27 : 2,736	„ „ 0,001	
0,357632 : 0,245	„ „ 0,001	
497 : 374895,78	„ „ 0,000001	
78,326 : 6,4725	3 pierwsze cyfry	

476,345 : 37,2	4 pierwsze cyfry			
387 : 9465	4	„	„	znaczące
27 : 386	4	„	„	„
897,2 : 6483,76	4	„	„	„

§ 37.

Rzecz o mnożeniu i dzieleniu przybliżoném wymaga jeszcze istotnego uzupełnienia. Przypuszczaliśmy bowiem dotąd, że liczby dane do mnożenia lub dzielenia były ścisłemi, a wypadek szukany miał być otrzymywany z oznaczonym z góry stopniem przybliżenia. Często jednak już same liczby do rachunku dane są tylko przybliżonemi; wtedy oczywiście wypadek nie może być otrzymywanym z dowolnym stopniem przybliżenia, lecz owszem należy z góry oznaczyć, jakim jest najwyższy stopień możliwego przybliżenia, które osiągnąć może wypadek szukany, a po za tę granicę w rachunku posuwać się nie ma potrzeby i nie należy.

Okazuje się to już w dodawaniu; dajmy, że mamy dodać 6 liczb, których ostatnie cyfry są niepewne; ponieważ błąd każdéj z tych liczb dochodzić może połowy jedności ostatniego rzędu, przeto suma może być błędną o 3 jedności ostatniego rzędu, tak że ta cyfra nie ma już żadnéj wartości, a nawet błąd przedostatniéj cyfry przewyższać może połowę jedności jéj rzędu. Suma 25 takich liczb może być błędną o 12 lub 13 jedności ostatniego rzędu, co i liczbę przedostatnią czyni zgoła niepewną. (Na okoliczność tę baczyć zwłaszcza należy przy rachunku logarytmicznym).

§ 38.

Przechodząc do *mnożenia*, dajmy dla uproszczenia, że mamy pomnożyć dwie liczby całkowite, których jedności są niepewne, t. j. mogące się różnić od wartości rzetelnych o połowę jedności pierwszego rzędu. Dla znalezienia niewątpliwéj części iloczynu, możnaby te liczby pomnożyć przez siebie, powiększywszy i zmniejszywszy je kolejno o $1/_2$, i przyjąć tylko część wspólną obu tych iloczynów. Mamy znaleźć np. 248×45, istotna wartość mnożnéj przypada między $248\,1/_2$ a $247\,1/_2$, mnożnika między $45\,1/_2$ a $44\,1/_2$; iloczyn zatém między $248\,1/_2 \times 45\,1/_2$ a $247\,1/_2 \times 44\,1/_2$, t. j. między $11306\,3/_4$ a $11013\,3/_4$, pewną zatém będzie tylko liczba tysięcy t. j. 11000 z błędem mniejszym od połowy tysiąca t. j. od 500. Do tegoż rezultatu jednak dojść można drogą krótszą.

Oznaczmy liczby dane do mnożenia przez M i N, z których pierwsza niech posiada m, druga n cyfr, przyczém $m > n$. Ponieważ każda z nich jest błędną mniéj niż o połowę jedności, przeto błąd iloczynu będzie w ogólności mniejszym od

$$(M+{}^1/_2)(N+{}^1/_2)-MN$$

albo od $$MN-(M-{}^1/_2)\,(N-{}^1/_2),$$

błąd przeto w każdym razie będzie mniejszym od ${}^1/_2M+{}^1/_2N+{}^1/_4$. Pierwsza część tego błędu wyrażoną jest przez liczbę m—cyfrową (lub $m-1$ cyfrową), druga przez n (lub $n-1$) cyfrową, ale ta, według założenia $m>n$, może tu być wypuszczoną z uwagi, błąd przeto dotykać będzie m ostatnich cyfr iloczynu. W mnożeniu np. 248×45 błąd składać się będzie z ${}^1/_2.248+{}^1/_2\,45+{}^1/_4$ i dotykać będzie trzech ostatnich cyfr iloczynu, mnożyć przeto będziemy te liczby tak, aby w iloczynie otrzymać tylko tysiące.

W ogólności zatém, w mnożeniu dwu liczb całkowitych, których ostatnie cyfry po prawéj są niepewne o połowę jedności, iloczyn może mieć po prawéj tyle cyfr błędnych, ile wynosi liczba cyfr czynnika większego.

Ponieważ liczba m—cyfrowa jest mniejsza od 10^m, a błąd iloczynu, jeżeli $m>n$, jest mniejszym od $\frac{M}{2}$, przeto w ogólności błąd ten będzie mniejszym od $\frac{10^m}{2}$; jeżeli jednak $n=m$, możemy powiedzieć tylko, że błąd jest mniejszym od 10^m.

Jeżeli z dwu danych czynników jeden jest dokładnym, drugi niepewnym o połowę jedności najniższego rzędu, błąd będzie w ogólności mniejszym od połowy czynnika dokładnego, zatém liczba cyfr niepewnych iloczynu będzie równą liczbie cyfr czynnika dokładnego.

Uwagi powyższe wystarczają i w mnożeniu ułamków dziesiętnych. Dajmy, że mamy pomnożyć $76{,}45839\times9{,}4836$, gdzie każdy z czynników jest niepewnym o połowę jedności najniższego rzędu. Mnożąc te liczby jako całkowite, t. j. bez względu na przecinek, ponieważ liczba większa jest 7-cyfrową, mieć będziemy w iloczynie 7 ostatnich cyfr niepewnych; że zaś w tym iloczynie odciąć będzie trzeba na dziesiętne 9 cyfr, przeto 2 tylko cyfry dziesiętne będą pewne i mnożyć będziemy te liczby tylko z przybliżeniem do 0,01, ale stosownie do uwag § 31 poszukiwać jeszcze będziemy części tysiącznych, po odrzuceniu których błąd będzie mniejszym od połowy części setnéj.

Uważmy jeszcze mnożenie $3{,}007263\times0{,}1385$, ponieważ w iloczynie 4 cyfry ostatnie mogą być niepewne, a cyfr dziesiętnych otrzymujemy w iloczynie 11, poszukiwać przeto będziemy tylko 7, a raczéj 8 cyfr dziesiętnych. Otrzymamy wtedy 0,00010159, zatém 0,0001016 z błędem mniejszym od połowy jednéj dziesięcio milijonowéj.

Zadania.

1) Ile cyfr będzie pewnych w iloczynach.

$4826 \times 37{,}2386...$	$3875{,}... \times 294{,}569...$
$645832{,}... \times 3785{,}...$	$458{,}364 \times 27{,}485...$
$2798{,}374... \times 306{,}235...$	$0{,}0078... \times 0{,}039...$
$0{,}378... \times 0{,}0254...$	$0{,}0438... \times 0{,}00038...$

Znaleźć części pewne tych iloczynów.

NB. Kropki oznaczają, że liczby nie są zupełne, że zatém ostatnie cyfry są niepewne.

2) Do ilu cyfr dziesiętnych rozwinąć trzeba ułamki zwyczajne w iloczynach $0{,}4736 \times {}^9/_{17}$, $0{,}2038 \times {}^4/_{23}$, aby otrzymać 4 cyfry pewne.

3) $(3{,}14159...)^3$ obliczyć w cyfrach pewnych.

4) Ile Kgr. czynią a) 45,1658 berkowców, b) 327,4083 cetnarów warszawskich, c) 628,1428 cetn. angielskich, jeżeli 1 berk. = 163,806, 1 cetn. war.=40,5504, 1 cetn. ang.=50,8025 Kgr. (ostatnie cyfry tych stosunków niepewne).

5) Ile hektolitrów czynią 97,384 czetwierti ross., 73,312 kwarterów ang. (quarter), 18,8331 okseftów angielskich (hogsheads), jeżeli 1 czetw. ross.=2,099, 1 kwarter = 2,907813 Hl, 1 okseft=2,86238 Hl. (uwaga taż sama).

6) Jaka jest wartość 0,2345 kg. złota po 3434,44 fr. i 4,245 kg. srebra po 218,89 fr. (2 cyfry dziesiętne franków).

§ 39.

W dzieleniu rozróżnimy trzy przypadki; może być tylko dzielna przybliżoną, a dzielnik pewnym; dzielna pewną, a dzielnik przybliżonym, i nakoniec—dzielna i dzielnik liczbami przybliżonemi.

a) Niech będzie do podzielenia $a : b$, obie liczby całkowite, z których a jest niepewną o połowę jedności najniższego rzędu; oznaczmy przez m liczbę cyfr dzielnéj, przez n liczbę cyfr dzielnika. Prawdziwa wartość ilorazu zawiera się między $\frac{a}{b}$ a $\frac{a+{}^1/_2}{b}$, albo téż między $\frac{a}{b}$ a $\frac{a-{}^1/_2}{b}$, błąd przeto jest mniejszym od $\frac{1}{2b}$. Ułamek ten rozwińmy w ułamek dziesiętny. Mianownik $2b$ ma n albo $n+1$ cyfr, pierwsza przeto cyfra znacząca przypadać dopiéro będzie na miejscu n—tém albo $n+1$-*ém*. Błąd przeto w ilorazie danym $\frac{a}{b}$ wystąpi co najbliżéj dopiero na miejscu n—*tém* po przecinku, $n-1$ zatém cyfr dziesiętnych będzie pewnych. Cyfr zaś całkowitych mamy $m-n$, albo $m-n+1$, razem przeto pewnych cyfr ilorazu będzie:

$$m-n+n-1=m-1,$$

albo
$$m-n+1+n-1=m,$$

W ogólności zatém, gdy dzielna jest przybliżoną a dzielnik dokładnym, liczba pewnych cyfr ilorazu równa się liczbie cyfr dzielnéj albo téż téj liczbie zmniejszonéj o jedność, stosownie do tego, czy dzielnik mieści się czy téż nie w tylu cyfrach dzielnéj, ile sam posiada.

Objaśnijmy prawidło to na przykładach:

1) 4783567,... : 5298,—dzielna jest siedmio-cyfrową, a dzielnik 4-o cyfrowy nie mieści się w pierwszych czterech cyfrach dzielnéj, zatém pewnych cyfr ilorazu będzie 6, a że część całkowita ilorazu zawiera trzy cyfry, przeto iloraz obliczonym być może z przybliżeniem do 0,001. (W tym nawet razie, ponieważ dzielnik podwojony ma 5 cyfer, co odpowiada przypadkowi, gdy pierwsza cyfra znacząca ilorazu $\frac{1}{2b}$ przypada dopiero na $n+1$-ém miejscu, przeto czwarta jeszcze cyfra może być przyjętą z przybliżeniem 0,0001).

2) 7345,... : 8765724,—dzielna jest cztero-cyfrowa, a dzielnik siedmio-cyfrowy nie mieści się w 7 cyfrach dzielnéj (7345000), zatém trzy tylko cyfry ilorazu będą pewne. Ale, że dla rozpoczęcia dzielenia trzeba dopisać 4 zera do dzielnéj (albo według zasad dzielenia skróconego skreślić 4 cyfry dzielnika) przeto cyfry znaczące zaczną się dopiéro na czwartém miejscu po przecinku, dzielić przeto możemy z przybliżeniem do 0,000001.

3) 87,6... : 0,4873,—dzielna jest trzy-cyfrowa, dzielnik cztero-cyfrowy mieści się w czterech cyfrach dzielnéj, zatém 3 cyfry ilorazu będą dokładne; a że część całkowita ilorazu zawiera tu trzy cyfry, iloraz żądany może być otrzymanym jedynie tylko z przybliżeniem do jedności.

b) Dajmy teraz, że w ilorazie dwu liczb całkowitych $\frac{a}{b}=q$ dzielnik b jest nieścisłym, t. j. niepewnym o połowę jedności najniższego rzędu. Błąd zatém ilorazu będzie mniejszym od

$$\frac{a}{b-\frac{1}{2}}-\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}a}{b\,(b-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{a}{b}}{2b-1}=\frac{q}{2b-1}$$

albo od

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}a}{b\,(b+\frac{1}{2})}=\frac{\frac{a}{b}}{2b+1}=\frac{q}{2b+1},$$

Błąd zatém ilorazu, jeżeli zaniechamy ± 1 w mianowniku, będzie mniejszym od $\frac{q}{2b}$, t. j. od tegoż ilorazu podzielonego przez podwojony dzielnik; ułamek ten jest mniejszym od 1, dopóki $q<2b$; dopóki zatém iloraz nie będzie większym od podwojonego dzielnika, błąd będzie mniejszym od 1. Ale, że przybliżenie pragniemy zawsze posuwać daléj, t. j. mieć błąd mniejszy od połowy zachowywanéj jedności najniższego rzędu, przeto trzeba aby było $\frac{q}{2b} < \frac{1}{2}$, czyli $\frac{q}{b} < 1$, t. j. $q < b$. Aby zaś warunek ten miał miejsce, trzeba, aby iloraz szukany nie zawierał więcéj cyfr niż dzielnik; dajmy, że iloraz zawiera n cyfr, iloraz dokładny mieć będzie n lub $n-1$ cyfr, stosownie do tego, czy te n jego cyfer stanowią liczbę mniejszą czy téż większą od dzielnika.

W ogólności zatém, gdy dzielnik (n—cyfrowy) jest przybliżonym a dzielna ścisłą, liczba dokładnych cyfr ilorazu wynosi tyleż, co liczba cyfr dzielnika, albo o jednę mniéj, stosownie do tego, czy n pierwszych cyfr ilorazu stanowią liczbę mniejszą czy większą od dzielnika.

Następne przykłady bliżéj tę rzecz objaśnią.

1) 67834 : 214,..., dzielnik jest trójcyfrowym, a że pierwsza cyfra ilorazu jest 3, trzy pierwsze jego cyfry stanowić będą liczbę większą od dzielnika, dwie zatém tylko cyfry ilorazu mogą być dokładne; nadto, całkowita część ilorazu jest trójcyfrową, iloraz zatém dokładny obliczonym być może tylko z przybliżeniem do dziesiątek (t. j. z błędem mniejszym od $\frac{1}{2}.10$); na iloraz otrzymujemy 316, poprzestajemy przeto na liczbie 320. W istocie, pozostawiając dzielnę też samą i dzieląc ją kolejno przez 213,5 214 214,5, znajdujemy ilorazy:
316,9 317,7 316,2, z czego się pokazuje niepewność cyfry jedności.

2) 826 : 3476,....., dzielnik jest 4-cyfrowy, pierwsza cyfra ilorazu 2, zatém w ilorazie liczyć można na 4 cyfry, a że cyfry znaczące zaczną się bezpośrednio po przecinku, iloraz znalezionym być może z przybliżeniem do 0,0001.

3) 3,478 : 85,7649..., dzielnik jest 6-cyfrowy, pierwszą cyfrą ilorazu jest 4, w ilorazie znaleźć przeto można 6 cyfr dokładnych, a że po przecinku przed cyframi znaczącemi znajduje się jeszcze jedno zero, obliczać można iloraz z przybliżeniem do 0,0000001.

c) Jeżeli nakoniec dzielna i dzielnik są niepewnemi w cyfrach najniższego rzędu, liczba cyfr dokładnych ilorazu oznacza się według obu powyższych prawideł, poprzestając na mniejszéj z liczb, jakie te prawidła wskazują.

W dzieleniu np. 478,3547... : 53,76498... wzgląd na dzielnik dozwala poszukiwać 7 cyfer w ilorazie, ale wzgląd na dzielnę tylko 6, poprzestaniemy przeto na 6 cyfrach ilorazu, t. j. będziemy go obliczać z przybliżeniem do 0,00001.

Zadania.

1) Znaleźć części dokładne ilorazów:

783,634... : 4563	27,438... : 3,8765
594 : 86375,...	48,536 : 5,2784...
0,07654... : 0,00386...	0,3452... : 28,37...
0,3459... : 0,045283	5,3867... : 0,3172...

2) Do ilu cyfr dziesiętnych rozwinąć trzeba w następnych zadaniach ułamki zwyczajne, aby ilorazy otrzymać z 4 cyframi dziesiętnemi:

$$97{,}45 : 8\tfrac{3}{7} \qquad 3{,}4258\ldots : 9\tfrac{5}{11}.$$
$$78\tfrac{3}{4} : \tfrac{11}{27} \qquad 35\tfrac{11}{27} : 4\tfrac{7}{9}.$$

3) 1 wiadro ross.=12,298 L., 1 bushel ang.=36,34766 L., 1 gallon ang.=4,54348 L., ile tych miar idzie na 1 Hektolitr?

4) 1 czetw. ross.=2,099 Hl., 1 korzec warsz.=1,28 Hl. (ściśle); ile korcy idzie na 100 czetw. i ile czetw. na 100 korcy?

5) 1 ℔ ross.=409,5174 gr., 1 ℔ warsz.=405,504 gr.; ile funtów ross. idzie na 1 cetnar warsz. i ile funtów warsz. na 1 berkowiec?

6) Ile funtów ross. i warsz. idzie na 1 cetnar niemiecki (50 kgr.) i ile niemieckich na 1 berk. i 1 cetnar warsz.?

7) Ile funtów angielskich handlowych (1 ℔ ang. handlowy= 453,5922 gr.) idzie na 100 angielskich troy-funtów (1 troy-funt= 373,2416 gr.) i ile troy-funtów na 100 funtów handlowych?

Rozdział III.

Rachunek liczb mianowanych.

§ 40.

Biorąc obecnie pod uwagę naturę danych wielkości, albo innemi słowy rodzaj czyli mianowanie liczb danych, przystępujemy do zadań ściśléj określonych, a w szczególności do obliczania cen towarów. Znajdziemy tu nietylko możność zastosowania uwag poprzedzających, ale napotkamy tu i niektóre nowe ułatwienia rachunkowe, gdyż związek jedności głównéj z jéj drobniejszemi podziałami w każdym rodzaju wielkości zezwala pospolicie na wprowadzenie pewnych uproszczeń. Nie we wszystkich bowiem krajach miary dziesiętne są już wprowadzone, a i tam nawet, gdzie są już obowiązkowemi, miary dawne zwyczajowo się jeszcze używają; ztąd *liczby wielorakie* często jeszcze w rachunkach się napotykają.

Pierwszem zadaniem, jakie się tu nastręcza jest wyrażenie jedności wyższych danych wielkości w jednościach niższych; rzecz ta zresztą bliższych objaśnień nie wymaga.

27 berk. 8 pud. 25 funt., ile czynią funtów?

$$\begin{array}{r} 27 \times 10 \\ \hline 270 \\ 8 \\ \hline 278 \times 40 \\ \hline 11120 \\ 25 \\ \hline 11145 \end{array} \qquad \text{albo krócéj} \qquad \begin{array}{r} 27 \times 10 \\ \hline 278 \times 40 \\ \hline 11145 \end{array}$$

Przy podziałach dziesiętnych cały ten rachunek jest zbytecznym

734 rs. 27 kop. = 73427 kop.

8 Kg. 7 Dg. 5 gr. = 8075 gr.

Odwrotném zadaniem jest sprowadzenie wielkości danych w jednościach niższych do jedności wyższych.

758	kwart warsz. ile korcy?
:4	758 kw.
:8	189 gar. 2 kw.
:4	23 ćw. 5 gar. 2 kw.
	5 kor. 3 ćw. 5 gar. 2 k.

Podziały dziesiętne prowadzą bezpośrednio do żądanych wypadków.

78 krużek ross. = 7 wiad. 8 kruż.

Również nie wymaga objaśnień zamiana ułamków jedności wyższych na wielkości wyrażone w jednościach niższych; w każdym razie pamiętać należy, że ułamek uważać można dwojako; $^3/_5$ złp. np. stanowią $^3/_5$ części 1 złp., albo $^1/_5$ część 3 złp.; w pierwszym razie powiemy: $^1/_5$ złp. czyni 6 gr., $^3/_5$ złp. 18 gr.; w drugim $^3/_5$ złp. czynią $^1/_5$ część 90 gr. t. j. 18 gr. Pierwszy sposób uważania prowadzi prędzéj do celu, drugiego używać należy, gdy część wskazana mianownikiem nie daje całkowitéj liczby jedności niższych.

Np. $\frac{3}{7}$ £ $= \frac{60}{7}$ sh $= 8^4/_7$ sh.

$$\frac{4}{7} \text{ sh} = \frac{4 \times 12}{7} \text{ d} = \frac{48}{7} \text{ d} = 6^6/_7 \text{ d.}$$

zatém $^3/_7$ £. $= 8$ s. $6^6/_7$ d.

Niemniéj często potrzeba wyrażać jedności niższe w częściach jedności wyższych.

Ile czynią 9 £. 6 sh. $5^1/_2$ d?

$5^1/_2$ d $= ^{11}/_2 : 12$ sh $= ^{11}/_{24}$ sh;

$6^{11}/_{24}$ sh $= ^{155}/_{24} : 20$ £ $= ^{31}/_{24} : 4$ £ $= ^{31}/_{96}$ £;

zatém 9 £ 6 sh $5^1/_2$ d $= 9^{31}/_{96}$ £. [1])

Zadania.

786 ℳ 47 ₰ ile ₰ w Niemczech?

6245 fl. holl. 65 c. ile c. w Holandyi?

---

[1]) Objaśnienia znaków monet i miar, oraz ich podziały, na końcu tomu.

8 £ 17 sh 7 d. ile d. w Anglii?
6 saż. 2 ar. 14 werszków, ile wer. ross.?
10 sąż. 2 łok. 17 cali ile cali warsz.?
8 czetwierti 5 czetweryków 7 garncy ile garncy?
3 kor. 2 ćw. 6 gar. 3 kwarty ile kwaterek warsz.?
67 Cwt. 3 Q 17 funt. ile funt. w Anglii?
59 ctr. 62 ℔ 21 łuty ile łutów w Wiedniu?
23859 d. ile £. w Anglii?
25859 c. ile $ w New-Yorku?
$2\frac{1}{2}$ kop. ile rs.?
3 £ 5 sh $4\frac{1}{2}$ d ile £?
3 pudy 14 funt. ile pudów?
$3\frac{1}{2}$ Q ile Cwt?
$\frac{7}{9}$ sh ile d?
$\frac{5}{8}$ ctr. ile funt. i łutów?
13 Cwt. $3\frac{3}{4}$ Qrs. ile ton?

§ 41.

Częściéj daleko niż w ułamkach zwyczajnych, wyrażają się jedności niższe w ułamkach dziesiętnych jedności wyższych; dla tego do prawideł podanych w § 27 musimy tu dodać niektóre jeszcze uwagi.

Dajmy, że mamy wyrazić 7 cali w ułamku dziesiętnym stopy. 7 cali czynią $\frac{7}{12}$ stopy; zamiast dzielić 7 : 12, uważamy że 100 : 12$=8\frac{1}{3}$, zatém $\frac{7}{12}=\frac{7.8\frac{1}{3}}{100}$, t. j. wyrażamy cale w ułamku dziesiętnym stopy, mnożąc je przez $8\frac{1}{3}$ i dzieląc przez 100, zatem 7 cali$=0{,}58\frac{1}{3}=0{,}5833...$ Ale liczba 12 występuje często w podziałach jedności wyższych, jak np. szylingów angielskich na pensy, dawnych srebrnych groszy pruskich na fenigi; możemy przeto sposobu tego wszędzie korzystnie używać.

7 złp. 26 groszy wyrazić w ułamku dziesiętnym złp.; 26 gr. czynią $\frac{26}{30}$, należy przeto 26 podzielić przez 30, ale dzielenie przez 30 wychodzi na dzielenie przez 3, jeżeli oddzielimy ostatnią cyfrę dzielnéj; zatém 26 gr.$=2{,}6$: 3 złp.$=0{,}867$ złp.; rachunek taki najdogodniéj przeprowadzimy w sposób:

7 złp. 26 gr.
7,867 złp.

Podobne uproszczenia dadzą się w różnych przypadkach łatwo odszukać. Następne przykłady wyjaśnią to bliżéj.

1) 7 £. 14 s. 7 d.

1 sh. ma 12 d., zatém wyrażamy pensy w ułamku szylinga mnożąc je przez $8\frac{1}{3}$; 1 £. ma 20 sh, zatém wyrażamy szylingi w ułamku funta szterlinga, dzieląc je przez 20, czyli krócéj przez 2.

£ 7. 14.7 d.
14,583 $(7 \times 8\frac{1}{3})$
£ 7,7291 (1,4583 : 2).

2) 8 s. 9 d. (9 d.$=\frac{9}{12}$ sh$=\frac{3}{4}$ sh$=0,75$ sh.)
8,75
£ 0,4375.

3) 2 pudy 27 ℔ 73 zoł. $(96=12 \times 8.)$
6,08 (73 : 12
27,76 (6,08 : 8)
2,694 (2,776 : 4)

4) 8 ber. 4 pudy 17 ℔
8,4425 (1,7 : 4).

4 pudy 17 ℔ czynią 4,425 pudy, a że 1 berk.=10 p. przeto obok liczby 4425 wprost piszemy 8.

5) 4 sąż. 2 łok. 15 cali
2,625 $\left(\frac{15}{24}=\frac{15 \times 4\frac{1}{6}}{100}\right)$
4,875 (2,625 : 3)

6) 7 ℔ niem. 346 gr. $\left(\frac{346}{500}=\frac{2 \times 346}{1000}\right)$
7,692

Zadania.

Następne wielkości wyrazić w ułamku dziesiętnym najwyższéj jedności:

£. 8. 7. 6 d.	4 sąż. 2 łok. 5 cali.
„ 7. 13. 10.	2 beczki 36 wiad. 8 krużek.
„ 4. 3. 7.	4 ℔ 17 zoł. 24 doli.
7 berk. 6 pud. 38 ℔	7 cet. 25 ℔ 26 łutów.
5 saż. 2 arsz. 8 wers.	28 ton. 14 cwt. 2 Q. 13 ℔
6 „ 1 „ 11 „	7 troy ℔ 7 oz. 13 dwts. 8 gr.

§ 42.

Aby ułamek dziesiętny jedności wyższéj wyrazić w częściach drobniejszych téj jedności, mnożymy ten ułamek przez liczbę wskazującą, ile części drobniejszych posiada jedność wyższa i odcinamy tyle cyfr na dziesiętne, ile ich było w ułamku danym. Gdyż np. 0,73 saż. $= \frac{73.3}{100}$ ar. $= \frac{219}{100} = 2{,}19$ ar.; 0,19 ar. $= \frac{19.16}{100}$ wer. $= 3{,}04$ wers. Zatém 0,73 saż. = 2 ar. 3 wer., czyli prowadząc robotę treściwiéj:

$$\begin{array}{l} 0{,}73 \text{ saż.} \\ \underline{\qquad\quad} \times 3 \\ 2{,}19 \\ \underline{\qquad} \times 16 \\ 3{,}04 \qquad 2 \text{ ar. } 3 \text{ wer.} \end{array}$$

Przykłady.

1) £. 7,346

$$\begin{array}{l} \underline{\qquad\quad} \times 2 \\ 7{,}92 \\ \underline{\qquad\quad} \times 12 \qquad £\ 7.\ 7.\ 11\ d. \\ 11{,}04 \end{array}$$

Przy zamianie na szylingi zamiast mnożyć przez 20 i odcinać trzy cyfry na dziesiętne, mnożymy przez 2 i odcinamy 2 cyfry. Tak samo postępujemy we wszystkich podobnych przypadkach.

2) 7,735 berk.

7,35 pudów (1 berk. = 10 pud., mnożenie przeto niepotrzebne).

$\underline{\quad} \times 4$

14,0 7 berk. 7 pud. 14 ℔

Zadania.

Z wypadków zadań poprzedzającego § dojść do danych tam wyrażeń liczebnych.

§ 43.

Mnożenie liczb mianowanych. Według uwagi § 33 mnożnik jest zawsze liczbą niemianowaną. W przypadku, gdy mnożna jest liczbą wieloraką o podziale dziesiętnym, zadanie sprowadza się wprost do mnożenia liczb dziesiętnych:

$$\begin{array}{r} 17 \text{ rs. } 38 \text{ kop.} \times 7 \\ \hline 121 \text{ rs. } 66 \text{ kop.} \end{array}$$

Gdy podział nie jest dziesiętny, a mnożnik jest liczbą jednocyfrową, można iloczyny gatunków niższych bezpośrednio zamieniać w gatunki wyższe, tak że iloczyn można wprost wypisywać:

$$\begin{array}{l} £\ 4.\ 7.\ 9 \text{ d.} \times 5 \\ \hline £\ 22.\ 18.\ 9 \text{ d.} \end{array}$$

Łatwość mnożenia liczb wielorakich przez liczby jednocyfrowe powoduje, że rozkład mnożnika na czynniki sprowadza tu znaczną korzyść.

$$\begin{array}{lll} £ & 7.\ 15.\ 8 \text{ d.} \times 56 & \\ \hline & 54.\ 9.\ 8 & \times 7 \\ \hline £. & 435.\ 17.\ 4. & \times 8 \end{array}$$

Jeżeli mnożnik nie daje się rozłożyć na czynniki, ale niewiele się różni od iloczynu pewnych czynników jednocyfrowych, to mnożenie daje się jeszcze wykonać według powyższych uwag, jeżeli do iloczynu wprowadzimy stosowną poprawkę:

$$\begin{array}{lrl} £. & 14.\ 7 \text{ sh.} & \times 83\ (=9 \times 9+2) \\ \hline & 129.\ 3 & \times 9 \\ \hline & 1162.\ 7 & \times 9 \\ & 28.\ 14 & +£.\ 14.\ 7 \text{ sh.} \times 2. \\ \hline £. & 1191.\ 1 \text{ sh.} & \end{array}$$

Przy większych mnożnikach można części mnożnéj wyrazić w ułamku dziesiętnym, najwyższéj jedności, co w ogólności przekładać należy nad zamianę na gatunek najdrobniejszy:

$$\begin{array}{rl} £.\ 4.\ 17.\ 8 \times 93 & \\ \hline 17{,}666... & \\ \hline 4{,}8833 \times 93 & \\ \hline 14650 & \\ 43950 & (14649 \times 3) \\ \hline 454{,}150 & \\ \hline 3{,}00 & \end{array}$$

$$£.\ 454.\ 3 \text{ sh.}$$

Zwrócić tu téż należy uwagę, że, z powodu znacznéj stosunkowo wartości pensa, należy liczyć ułamki dziesiętne funta szterlinga do trzech cyfr dziesiętnych, gdy dla innych monet trzecia cyfra dziesiętna już ma w ogólności niewielkie znaczenie.

Zadania.

£. 31. 18. 7 × 8
Berk. 3 pud 6 ℔ 25 × 3

£. 53. 17. 5 × 37
Sąż. 5 łok. 2 cali 8 × 23½

§ 44.

Przy wielu obliczeniach cen towarów istotną korzyść sprowadzić może przemiana mnożnéj i mnożnika, czyli raczéj przeniesienie mianowań. Tak np. 100 ℔ po 17 kop. kosztują tyleż co 17 ℔ po 100 kop. czyli po 1 rs., zatém 17 rs.; 150 ℔ po 13 gr. tyleż, co 13 ℔ po 150 gr. czyli po 5 złp., zatém 65 złp.

Inne przykłady:

1) 300 garn. po 37 kop.
37 garn. po 300 k.... 111 rsr.

2) 50 ℔ po 27 kop.
27 ℔ po ½ rs.... 13 r. 50 k.

3) 60 łokci po 17½ sh.
17½ łok. po 3 £... £ 52. 10 sh.

4) 210 ℔ po 23 gr.
23 ℔ po 7 złp... 161 złp.

5) 75 ℔ po 19 kop.
19 ℔ po ¾ rs... 14 rs. 25 kop.

6) 75 ℔ po 23 gr.
23 ℔ po 2½ zł... 57 zł. 15 g.

Uwaga ta posłużyć może zresztą i w tych przypadkach, gdy ilość towaru niewiele się różni od liczby dogodnéj do podobnego przemianowania.

1) 120½ ℔ à (po) 16 sh.
16 ℔ à 120 sh... £ 96.
+ ½ ℔ à 16 sh. 8 sh.
£. 96. 8 sh.

2) 99 arsz. à 83 kop.
83 arsz. à 100 k. 83 rs.
1 arsz. à 83 kop. 83 k.
82 rs. 17 k.

Tu także zaliczyć można przypadki, gdy ilość towaru stanowi wielokrotność 100.

1) 300 ℔ po 17 kop. toż samo co 3 ℔ po 1700 k. czyli po 17 rs. zatém 51 rs.

2) 700 yardów po 18 sh. = 7 y. po 1800 sh. czyli 90 £... 630 £.

Zadania.

600 ℔ po 27 kop.	20 ℔ à 7 sh.
30 kwar. po 8 gr.	15 łok. à 19 gr.
360 łok. po 19 gr.	99$\frac{1}{2}$ ℔ à 76 kop.
72 sztuk po 9 d.	118 ℔ à 18 sh.
120 yard. po 7$\frac{1}{2}$ sh.	149$\frac{7}{8}$ ℔ à 24 gr.

§ 45.

W wielu też razach bardzo być może dogodném wyrażenie części niższych w ułamku jedności wyższéj, jeżeli ułamek taki dosyć będzie prostym i nadającym się do rachunku, przyczém korzystać możemy z uwag § 18. Przykłady wyjaśnią to dostatecznie.

1) 247 ℔ po 6 gr. ($\frac{1}{5}$ zł.)
: 5
49 zł. 12 gr.

2) 285 ℔ po 7 sh. 6 d. (7$\frac{1}{2}$sh=$\frac{3}{8}$£)
×3
855
: 8
106$\frac{7}{8}$ £=£ 106. 17. 6 d.

Zauważyć można, że w powyższych przykładach przemieniliśmy właściwie mnożną i mnożnik.

3) Ile kosztuje 25 ℔, jeżeli za 1 pud płaci się 7 rs. 35 kop.
7,35
: 2
3,675 (25 ℔=$\frac{5}{8}$ p., $\frac{5}{8}$=$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{8}$).
: 4 0,918
rs. 4,49

4) Ile wynosi fracht od 15 Cwt, jeżeli za 1 t. płaci się £ 3. 5 sh.
£ 3. 5 s.
−$\frac{1}{4}$ 16 s. 3 d. (15 Cwt.=$\frac{3}{4}$ t, $\frac{3}{4}$=1−$\frac{1}{4}$)
£ 2. 8. 9 d.

5) 248 pud. po 3 rs. 25 kop. (3$\frac{1}{4}$ rs.)
744 ×3
62 : 4
806 rs.

6) 4 funty 24 zoł. po 2 rs. 16 kop.
(4$\frac{1}{4}$ ℔) 8. 64
54 (2 r. 16 k. : 4)
rs. 9. 18 k.

7) 7 pud. 35 ℔ po 38 rs. 75 kop.
($7^7/_8$ p.) 271.25 ×7
33.90$^5/_8$ 271,25 : 8
rs. 305.15$^1/_2$ kop.

albo téż 38 rs. 75 kop.
($7^7/_8=8-{}^1/_8$) 310.00 ×8
— 4.84$^3/_8$ 38,75 : 8
rs. 305.15$^1/_2$ k.

8) 600 łok. po 23 gr. (6 ł. po 2300 gr. albo 2300 ł. po 6 gr. czyli po $^1/_5$ złp.)
2300
——: 5
Złp. 460

Znane nam już części wielokrotne 100 mogą i tu przynieść korzyść.

9) 100 cwt. po £ 8. 6. 8 d.=£ 8$^1/_3$, co czyni 800+$^1/_3$. 100=800+33$^1/_3$=833$^1/_3$ £., t. j. do 8 przypisać tylko należy 33$^1/_3$.

Z uwagi téj korzystać można i wtedy, gdy ilość towaru daną jest przez liczbę blisko 100.

10) 96 cwt. po £ 4. 15 sh.
100 cwt. po £ 4. 15 475
— za 4 cwt. 19
£ 456

Z tego już widzimy jednak, że ubieganie się za uproszczeniami łatwo przejść może w przesadę i traci istotną wartość. Najcelniejszą drogę obliczania ceny towarów znajdziemy w sposobie rozbiorowym, poprzednio jednak zajmiemy się dzieleniem.

Zadania.

87 ℔ po 15 sh.
87 ℔ po 25 kop.
8 łutów po 2 rs. 15 k. za 1 ℔
35 ℔ po 16 rs. za pud
79 ℔ po 12$^1/_2$ d.
238 ℔ po 2 rs. 25 kop.
7 ℔ 80 zoł. po 3 rs. 20 kop.
3 pudy 30 ℔ po 16 rs.
194 Kgr. po 1 fr. 38 c.
5 ℔ 60 zoł. po 78 kop.
3 łok. 9 cali po 4 rs. 50 kop.
167 ℔ po 1 rs. 75 kop.
21 ℔ an. po £ 2. 5 sh. za 1 Q (28 ℔)
£ 324. 3. 4 d. po 9 rs. 75 k. za 1 £
£ 497. 16 po 25 fr. 26$^1/_2$ c. za 1 £
29 ars. 12 wers. po 3 rs. 86 kop.
72 zoł. po 7 rs. 50 kop. za 1 ℔
149 m. po 4 fr. 80 cent.

§ 46.

W dzieleniu liczb mianowanych według uwagi § 19 rozróżnić należy dwa przypadki; gdy dzielnik jest niemianowanym i gdy jest mianowanym, tegoż samego rodzaju, co dzielna.

Gdy dzielna jest liczbą, w któréj podziały jedności wyższych na niższe są dziesiętne, możemy ją uważać za zwyczajną liczbę całkowitą. Tak np. ile czyni 7-a część 824 Kg. 8 Hg 4 Dg 9 gr.

824 Kg. 8 Hg. 4 Dg. 9 gr. : 7
117 „ 8 „ 3 „ 5 „ 5 dg. 7 cg. 1 mg.

Jeżeli dzielnik jest jedno-cyfrowym, to przy jakiéjkolwiek dzielnéj możemy reszty jedności wyższych w pamięci przemieniać na jedności niższe i dzielić daléj.

£ 276. 7. 9 d. : 8
£ 34. 10. $11\frac{5}{8}$ d.

Z dzielenia 276 £ : 8 otrzymaliśmy na resztę 4 £, które stanowią wraz z 7 sh. dzielnéj 87 sh; 87 sh : 8 dają 10 sh. i na resztę 7 sh., te znów z 9 d. dzielnéj 93 d; 93 : 8=$11\frac{5}{8}$ d.—Przy zamianie reszty funtów szterlingów na sh. uważać możemy, że gdy zamiennikiem tu jest 20, przeto reszta £ nie wpływa wcale na jedności sh, możemy przeto, nie biorąc pod uwagę całéj liczby szylingów, podzielić pierwéj same ich dziesiątki, a następnie dopiero jedności zamienić na pensy.

Łatwość dzielenia przez liczbę jednocyfrową sprawia, że rozkład dzielnika na czynniki będzie tu bardzo pożytecznym

£ 185. 16. 8 d : 32
: 8
23. 4. 7
: 4
£ 5. 16. $1\frac{3}{8}$ d

Jeżeli reszta otrzymana z dzielenia jedności wyższych podzielona przez dzielnik wydaje ułamek dogodny do zamiany na jedności niższe, możemy tę resztę bezpośrednio podzielić i iloraz dodać do ilorazu jedności niższych:

£ 59. 15 : 5
11. 19.

Z dzielenia 59 £ : 5 otrzymujemy na resztę 4 £, $\frac{4}{5}$ £=16 sh, co wraz z 3 sh. powstającemi z dzielenia 15 sh : 5 wydaje 19 sh. ilorazu.

Przy dzielnikach większych możnaby też używać postępowania powyższego, ale zamiany reszt jedności wyższych na jedności drobniejsze nie dadzą się już dokonywać bez wypisywania:

1) 45 brkc. 8 pud. 15 ℔ 23 zoł. 48 doli kosztuje 126 rs., ile pudów dostaniemy za 1 rs.?

458 p. 15 ℔ 23 zoł. 48 d. : 126=3 p.
p. 80 X40+15
℔ 3215 : 126=25 ℔
695
65X96+23
zoł. 6263 : 126 = 49 zoł.
1223
89X96+48
doli 8592 : 126=68 d.
1032
24

Zatém 3 p. 25 ℔ 49 zoł. 68 d., odrzucając ułamek doli.

Ale nad zmudną tę robotę zawsze dogodniejszém będzie wyrażenie części niższych dzielnéj w ułamku dziesiętnym jedności wyższéj.

458 p. 15 ℔ 23 zoł. 48 d.
23,5 : 96 (8X12)
: 8
2,9375
: 12
15,24479
: 4 (40)
458,38112 : 126 (9X14)
: 9
50,931236
: 14
3,636945
X4 (40)
25,51780
X8
4,1424
X12
49,7088
X8
5,670
X12
68,04

Rozpoczęliśmy tu od zamiany części puda w jego ułamek dziesiętny; 48 doli stanowi 0,5 zoł., zatém zołotników mamy 23,5, która to liczba podzielona przez 96 (8×12) daje 0,24479 ℔; 15,24479 : 4 (40) czyni 0,381120 puda. Poprzestajemy na 6 cyfrach dziesiętnych, gdyż pud ma 368640 doli, zatém w ilorazie potrzebujemy mieć tylko części milijonowe, że zaś dzielnik 126 jest liczbą dokładną i mieści się w 3 pierwszych cyfrach dzielnéj (458), przeto (§ 39) wystarcza nam 6 cyfr dziesiętnych dzielnéj. Przez 126 dzielimy, uważając tę liczbę za iloczyn 9×14. Ułamek dziesiętny puda w ilorazie zamieniamy na funty, zołotniki i dole, mnożąc kolejno otrzymane ułamki dziesiętne przez 4 (40), 96 (8×12) i 96 (8×12). Otrzymujemy wypadek tenże sam co pierwszym sposobem, 3 p. 25 ℔ 49 zoł. 68 doli.

2) 3 cwt. 2 Q. 24 ℔ 9 oz kosztują £. 354. 17. 8 d., ile kosztuje 1 cwt.?

W przykładzie tym i dzielnik jest liczbą wieloraką, musimy go przeto koniecznie wyrazić przez liczbę jednogatunkową; gdybyśmy go wyrazili w jednościach najdrobniejszych, t. j. w uncyach, otrzymalibyśmy na iloraz cenę 1 uncyi, dla otrzymania przeto właściwéj odpowiedzi, należałoby jeszcze iloraz pomnożyć przez 1792, t. j. liczbę wskazującą, ile uncyj czyni 1 cwt. Tém dogodniéj przeto będzie dzielnę i dzielnik wyrazić w częściach dziesiętnych jedności najwyższych.

3 cwt. 2 Q. 24 ℔ 9 oz
———— : 16
24,5625
———— : 4 (28=4×7)
6,140625
———— : 7
2,87723
———— : 4
3,71931

£ 354. 17. 8
———— : 12
17. 66...
———— : 20
354,8833

354,8833 : 3,71931
201454 | 95,416
15488 | 8,32 ×20
611 | 3,8 ×12
239
16
£. 95. 8. 4 d.

Rachować winniśmy do trzech cyfr dziesiętnych, bo to daje już dokładny wypadek w pensach, dostateczna przeto w tym razie mieć 5 cyfr dziesiętnych w dzielniku (§ 39).

Dla przypomnienia zresztą niektórych poprzednich prawideł, przeróbmy zadanie to jeszcze, zamieniając obie liczby dane na gatunki najdrobniejsze:

3 cwt. 2 Q. 24 ℔ 9 oz.=6665 oz.
354 £. 17. 8 d. = 85172 d.

Szukamy teraz ceny 1 uncyj, a że ją potém mnożyć będziemy przez 1792, potrzebujemy zaś mieć iloczyn dokładny w częściach całkowitych musimy przeto dzielić z przybliżeniem do 0,0001.

85172 :	6665	12,779	× 1792
18522	12,7790	2971	
51920		127790	
5265		89453	
599		11501	
0		255	
		22899,9	

22900 d. : 12
4 1908 : 20
8 95
£ 95. 8. 4.

Gdy dzielnikiem jest ułamek, nie wymaga to żadnych nowych wyjaśnień:

£ 3. 12. 5 : $2^1/_4$ × 4
14. 9. 8 : 9
£ 1. 12. 2 d.

Z a d a n i a.

17 berk. 8 pud. 29 ℔ 37 zoł. : 6
£ 253. 7. 11 d. : 9.
£ 887. 11. 4 : 4
£ 159. 9. 8 d. : 63
23 cetn. 62,5 ℔ kosztują rs. 564,75, ile 1 cetn.?
123 Hltr. 87 litr „ fr. 42357, 20 c. ile 1 Hl.?
369 pud. 25 ℔ „ rs. 2923, 35 „ 1 ℔
75 Quart. 6 Bsh. 4 Gll „ £ 173 12.6 „ 1 Quart.?
130 Cwt. 2 Q. 20 ℔ „ £ 620.8.8 „ 1 Cwt?
3785 Bsh. 9 Gll. „ $ 3906. 80 „ 1 Bsh?

38 pud. 15 ℔ 62 zoł. kosztują rs. 184,56, ile za 1 rs.?
$4\frac{3}{4}$ puda „ rs. 15, 83, ile za 1 pud.?
$\frac{3}{8}$ Cwt. „ £. 2. 17.5 „ „ 1 Cwt.?

§ 47.

Jako uwagę mogącą w niektórych razach mieć zastosowanie, przytoczyć można przypadek, gdy dzielnik jest wielokrotnością zamiennika jedności wyższéj na niższą. Tak np. 150 ℔ kosztuje 84 złp., ile kosztuje 1 funt? $150=5\times30$, podzieliwszy więc obie dane liczby przez 30 otrzymujemy, że 5 ℔ kosztują $\frac{84}{30}$ złp.=84 gr., 1 f. zatém $16\frac{4}{5}$ gr.

420 ℔	kosztuje	56 złp.	800 ℔	kosztuje	84 rs.
14 ℔	„	56 gr.	8 ℔	......	84 k.
1 ℔	„	4 „	1 ℔	......	$10\frac{1}{2}$ k.

Z a d a n i a.

56 rs. : 700	59 £ : 80
87 złp. : 540	103 £ : 60

§ 48.

Pozostał nam przypadek, gdy i dzielna i dzielnik są mianowane jednego rodzaju.

1. Ile funtów szterlingów po 9 rs. 83 kop. nabyć można za 674 rs. 58 kop.?—Tyle mieć będziemy £, ile razy 9 rs. 83 zawierają się w 674 rs. 58 kop.

```
67458 : 983
 8478   68,6246
  6140     12,492
   2920        5,9
    4540
     6080
        2
£ 68. 12. 6 d.
```

2. Ile cwt. po £ 95. 8. 4 nabyć można za £ 354.17.8. (Ob. zad. 2 § 46).

£ 354. 17. 8 — £ 95. 8. 4
17,66... — 8,33...
354,8833... — 95,4166...

354,8833 : 95,4166
686333 — 3,71930
18417 — 2,8772 $\times 4$
8875 — 35088 $\times 4$
288 — 24,5616 $\times 7$
2 — 8,9856 $\times 16$

3 cwt. 2 Q. 24 ℔ 9 oz.

3. Ile sztuk 20 frankówek złotych po 7 rs. 89 k. kupimy za 867 rs. 50 kop.

$86750 : 789 = 111\,^{71}/_{789}$
875
860

Kupić przeto możemy $111\,^{71}/_{789}$ sztuk, ale że części téj monety otrzymać nie można, przeto $^{71}/_{789} \times 7{,}89$ rs.$=71$ kopiejek zatrzymać należy.

Zadania.

Ile czynią £ 134. 3. 4 w rublach, jeżeli za 1 rs. otrzymuje się sh. 2. $7\,^{5}/_{8}$ d.?

Ile półimperyałów po rs. 7,78 kupić możemy za 908 rs. i ile otrzymujemy reszty?

Ile płyt kamiennych mających powierzchni po 1 stopie □ $47\,^{5}/_{12}$ cali □ potrzeba do wybrukowania przestrzeni 72 sąż. □ 16 st. kwadr.?

Za 3435 sowerenów (£) zapłacono fl. austr. 40704,45 c., ile za 1£?

§ 49.

Najdogodniejszą i najpowszechniéj używaną drogę obliczania cen towarów przedstawia *sposób rozbiorowy*, zwany też *metodą włoską*. Sposobu takiego mnożenia używaliśmy już w § 18, tu wypada nam go bliżéj rozwinąć.

Główną treść całego tego postępowania stanowi rozkład ceny albo też ilości towaru na części mniejsze takie, aby każda z nich była częścią wielokrotną jedności najwyższéj albo którejkolwiek z poprzednio znalezionych części. Tak np. $77\frac{1}{2}$ kop.=50 kop. ($\frac{1}{2}$ rs.)+25 kop. ($\frac{1}{4}$ rs. albo $\frac{1}{2}$. 50 kop.)+$2\frac{1}{2}$ kop. ($\frac{1}{10}$. 25 kop). Podobnież 26 ℔= 20 ℔ ($\frac{1}{2}$ puda)+5 ℔ ($\frac{1}{4}$. 20 ℔)+1℔ ($\frac{1}{5}$.5 ℔), albo też 26 ℔= 20 ℔ + 4℔ ($\frac{1}{10}$. puda)+2 ℔ ($\frac{1}{10}$.20 ℔).

Przykłady najlepiéj wyjaśnią sposób ten postępowania.

1) 236 ℔ po 1 rs. $77\frac{1}{2}$ kop.

236 ℔ po	1 rs.	236 rs.	
„	„ 50 kop. ($\frac{1}{2}$.236 r.) . . .	118 „	
„	„ 25 „ ($\frac{1}{2}$.118 r.)...	59 „	
„	„ $2\frac{1}{2}$ (2,5 k., $\frac{1}{10}$.59 rs.)...	5 „	90 k.
		418 „	90 k.

2) 183 łok. po £ 2. 11. 10 d.

183 ł. po	2 £	£ 366	
„	„ 10 sh. ($\frac{1}{2}$£)	„ 91 . 10	(*NB.* $\frac{1}{2}$. 183 £,
„	„ 1 sh. ($\frac{1}{10}$.10 sh.)	„ 9 . 3	bo po 1 £ było-
„	„ 6 d. ($\frac{1}{2}$ sh.)	„ 4 . 11. 6	by 183 £)
„	„ 4 d. ($\frac{1}{3}$ sh.)	„ 3 . 1.	
		£ 474 . 5 . 6 d	

albo też

183 ł. po	2 £	£ 366
„	„ 10 sh	„ 91. 10
„	„ $1\frac{2}{3}$ sh ($\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$ sh.)	„ 15. 5
„	„ $\frac{1}{6}$ sh ($\frac{1}{10}$. $\frac{10}{6}$ sh.)	„ 1. 10. 6
		£ 474 . 5 . 6d

3) 368 ℔ po $37\frac{1}{2}$ kop.

„	po 25 k. ($\frac{1}{4}$ rs.)	92 rs.
„	„ $12\frac{1}{2}$ k. ($\frac{1}{2}$.25 k.)	46
		138 rs.

4) 284 m. po 11 fr. 56 c.

po 11 fr.	3124 fr.	
„ 50	142 „	
„ 5 c. ($\frac{1}{10}$.50 c.)	14 „	20 c.
„ 1 c. ($\frac{1}{100}$. 1 fr.)	2 „	84
	3283 fr..	04 c.

W powyższych przykładach rozkładaliśmy tylko cenę; w podobny sposób postępujemy, gdy ilość towaru jest do rozkładania:

1) 3 berk. 7 pud. 26 ℔ po 65 rs. 83 kop.

3 berk. . . . . rs. 197,49
5 pud. ($^1/_2$.65 rs. 83 k.) . „ 32,915
2 p. 20 ℔ ($^1/_2$.32,91 r.) . „ 16,457
5 ℔ ($^1/_{20}$.16,45 r.) . . . . „ 0,822
1 ℔ ($^1/_5$.0,828 r.) . . . . . „ 0,164
rs. 247,85

2) 3 Quar. 16$^1/_2$ ℔ po £ 27. 8 s. za Cwt.

2 Q. ($^1/_2$ cwt.) . . . . £ 13. 14s.
1 Q. . . . . „ 6. 17 .
14 ℔ ($^1/_2$ Q.) . . . . 3. 8 . 6 d.
2 ℔ . . . . 9 . 9$^3/_7$
$^1/_2$ ℔ ($^1/_4$.2 ℔) . . . . . 2 . 5 $^{10}/_{28}$
£ 24. 118$^{11}/_{14}$ d.

3) 9 ars. 10 wers. po 2 rs. 45 kop.

9 ar. . . . . rs. 22,05
8 wer. . . . . 1,22$^1/_2$
2 „ . . . . 30$^5/_8$
rs. 23.58

4) £ 342.17.6 d. po 9 rs. 46 k.

342 £ . . . . rs. 3235,32
10 sh. 4,73
5 sh. . . . . . . 2,36$^1/_2$
2 sh. . . . . . . 1,18$^1/_4$
3243.60$^3/_4$

5) 13 ton. 13 cwt. 2 Q. 15 ℔ po £ 7. 11. 5

13 t. po 7 £ . . . . £ 91.
„ 10 sh. ($^1/_2$.13 £) . . . 6. 10
„ 1 sh. 13
„ 5 d. . . . . 5.5 d.
10 cwt. ($^1/_2$ t.) . . . . 3. 15. 8$^1/_2$
2 „ . . . . 15. 1$^7/_{10}$
1 „ . . . . 7. 6$^{17}/_{20}$
2 Q ($^1/_2$ cwt.) . . . . 3. 9$^{17}/_{40}$
8 ℔ ($^1/_7$.2 Q) . . . . 6$^{137}/_{280}$
7 ℔ ($^1/_8$.2 Q) . . . . 5$^{217}/_{320}$
£ 103. 11. 7$^{1439}/_{2240}$

Ułamki przy dzieleniu nastręczają nam najmniéj trudności, gdy je łączymy z resztą otrzymaną z dzielenia całości; tak np. 8$^1/_2$: 5 daje 1 i na resztę 3, 3$^1/_2$ czyli $^7/_2$: 5=$^7/_{10}$.

Rozumie się zresztą, że w podobnych rachunkach ułamki należy odrzucać; a gdy jeszcze zwracamy uwagę na to, aby ilości większe od połówki brać za całości, błąd będzie zgoła nieznacznym; jeżeli nadto pominiemy szczegółowe wypisywania, potrzebne nam tu tylko dla objaśnienia, rachunek w rzeczywistości przedstawi się daleko prościéj:

13 ton. 13 cwt. 2 Q. 15 ℔ po £. 7. 11. 5 d.

£ 91
6 . 10
13
5 . 5 d.
3 . 15 . 8
15 . 2
7 . 7
3 . 9
6
6

£ 103. 11. 7 d.

Za pomocą bezpośredniego mnożenia otrzymamy tu:

13 t 13 cwt. 2 Q. 15 ℔ : 4
375 : 7
2,535 : 4
13,634 : 20
13,6817

£ 7. 11. 5 d. × $8\frac{1}{3}$
11,417 : 20
7,5708

13,6817 × 7,5708
80757
95772
6841
958
10
103,581 × 20
11,62 × 12
7,44

£ 103.11.7 d.

Z a d a n i a.

456 ℔ po 7 rs. $62\frac{1}{2}$ kop.
516 yard. po $41\frac{1}{3}$ sh.
325 łok. po $37\frac{1}{2}$ kop.

357 metr. po 78$^3/_4$ cen.
428 ℔ po 57$^1/_2$ Nxr. (krajc. austr.)
26 ltr. po ℳ 3.33$^1/_3$ ϑ
387 ℔ po rs. 1. 22$^1/_2$ kop.
7 pud. 7$^1/_4$ ℔ po 3 rs. 40 kop.
3 szefle 11$^1/_2$ ltr. po 14 ℳ.
948 Cwt. po £ 3. 12. 4$^1/_2$ d.
2500 Kgr. po fr. 2. 23$^3/_4$ c.
1280 yar. po sh. 2. 3$^3/_4$ d.
9560 ℔ po sh. 3. 7$^1/_2$ d.
1364 Cwt. po £ 15. 6.7$^1/_2$ d.
128 cet. po Rgsd. 1.7$^1/_2$ (rygsdalary duńskie)
567 Cwt. po $ 3,57$^1/_2$ c. (dolary)
82 ton. 14 cwts. 3 Qs. 24 ℔ po £ 8. 12. 6 d.
£ 725. 18. 6 d. po rs. 9, 36.
45 ar. 6 wers. po rs. 4. 87$^1/_2$ k.
317 ar. 13 wers. po 2 rs. 27$^1/_2$ kop.
345 ton. 16 cwts po 13$^3/_4$ sh. za 1 cwt.
93—20-o frankówek po rs. 7,55.
£ 316.7. 3 po ℳ. 20,38 ϑ., po 11 fl. aust. 13 nxr., po 17 Reichstal. 68 oere (szweck.), po 11 fl. 92$^1/_2$ c. holl.
783 rs. 25 k. po 32$^9/_{16}$ d, po 32$^7/_8$ d.
938 rupij 8 annas wsch. ind. po 2 sh. $^1/_4$ d., po 1 sh. 11$^1/_2$ d.

§ 50.

Ostatni przykład poprzedniego § okazuje, że gdy potrzeba rozkładać na części wielokrotne i ilość towaru i cenę, rachunki stają się zbyt długiemi i niedogodnemi; dla tego korzystniéj będzie jednę z danych wielkości wyrazić w ułamku dziesiętnym i dokonywać rozkładu drugiéj tylko. Przykłady to objaśnią.

1) 317 ton. 17 cwts 3 Qs 8 ℔ po £ 9. 11. 6$^1/_4$

317 t. 18 cwts. 3 Qs. 8 ℔
3,2859 ($^2/_7$Q)
18,8215
317,9411 t.

	317,9411
po 9 £	2861,470
„ 10 sh. ($^1/_2$. 317,941)	158,970
„ 1 „	15,897
„ 6 d.	7,948
„ $^1/_4$ d. ($^1/_{24}$. 6d)	0,331
	3044,616
	12,32
£ 3044.12.4 d.	3,8

Albo też, przez wyrażenie monet w ułamku dziesiętnym.

Ł 9. 11. 6,25
11,5208
9,57604 £ za 1 t.

7 t.	67,032
10 t.	95,760
300 t.	2872,812
10 Cwt.	4,788
5 „	2,394
2 „ 2 Q	1,197
1 „ ($^1/_{10}$.10 Cwt.). . . .	0,479
1 Q	0,119
7 ℔ ($^1/_4$ Q)	0,030
1 ℔	0,004
	3044,615
	12,30
£ 3044.12.4 d	3,6

Który z tych obu sposobów rozkładu jest dogodniejszym, zależy od szczegółów zadania. W tym przypadku, wyrażenie części £ w ułamku dziesiętnym nieco jest prostsze niż części tona, ale pierwszy rozkład jest krótszy. W ogóle najkorzystniéj jest w ułamku dziesiętnym wyrażać te wielkości, w których gatunek najwyższy stanowi liczbę większą. Zresztą, jedynie tylko po wprawie sposób rozkładowy prowadzi prędzéj do celu niż bezpośrednie mnożenie.

2) 6 berk. 8 pud. 35 ℔ à 213 rs. 79 kop.

6 berk.	1282,74
5 pud.	106,89
2 p. 20 ℔ (2$^1/_2$ p.) . .	53,45
1 „ 10 „	26,72
5 ℔ ($^1/_{10}$ 50 ℔)	2,67
	rs. 1472.47

Albo też

6 berk. 8 pud. 35 ℔ po 213 rs. 79 k.

6,8875 berk. ($^7/_8$ p.)

po	3 rs.	20,66
„	10 „	68,88
„	200 „	1377,50
„	50 k.	3,44
„	25 „	1,72
„	4 k. (4 × 0,069) . .	0,27
		rs. 1472,47

§ 51.

W powyższych zadaniach przypuszczaliśmy, że cena oznaczona była za jednostkę najwyższego gatunku; w handlu jednak hurtowym ceny oznaczają się (notują) często za 100, 200, 125, 160 i t. d. ℔, Kgr. i t. d. Obliczmy np.

1) 2319 ℔ po rs. 17. 75 kop. za 100 ℔.

Daną liczbę funtów dzielimy przez 100 dla znalezienia, za ile setek funtów zapłacić należy: 2319 : 100

23,19

po 10 rs.	231,90	albo 23,19 × 17,75
„ 7 „	162,33	5 771
„ 50 kop.	11,59	23190
„ 25 „	5,80	16233
	rs. 411,62	1623
		116
		rs. 411,62

2) 9368 ℔ po £ 5. 12. 9 za Cwt. (112 ℔)

9368 ℔ : 8

1171 : 14

83,6428 Cwt.

po	5 £	418,214
„	10 sh. ($^1/_{10}$.5 £)	41,821
„	2 sh. 6 d. ($^1/_4$.10 sh.).	10,455
„	3 d. ($^1/_{10}$.2$^1/_2$ sh.) . . .	1,046
		471,536
		10,72
		8,64

£ 471.10. 9 d.

Zadania.

Obliczyć:
148½ puda po 3 rs. 60 kop.
148 ℔ 32 zoł. po 5 rs. 50 kop.
3412 ℔ po 6 rs. 75 kop. za 100 ℔
9 ℔ 200 gr. (niem.) po ℳ. 11.50
19½ ℔ po 3 rs. 35 k. za cetnar.
28½ ℔ po 2 rs. 13 k. za pud.
42 tuziny 5 sztuk po 7 rs. 55 kop. za tuzin.
1334 ℔ po 3 rs. 77½ kop.
35 Kgr. po 87½ ₰ za ½ Kgr.
91 Kgr. po 78¾ c. za ½ Kgr.
726 Kgr. po 38 ℳ za 50 Kgr.
425½ Kgr. po 27 ℳ 45 za 50 Kgr.
5785 ℔ po 178 rs. 36 k. za 1000 ℔.
2134 ℔ po 4 rs. 37 k. za pud.
2357 ℔ po ℳ 149, 60 za 368 ℔.
5678 ℔ po £ 2. 13. 6 d. za 1 Cwt.
89 Cwt. 80 ℔ po $ 15 50 za ton.
8235 Kgr. po 31 fr. za 150 Kgr.
98476 ℔ po £ 3. 9. 5 d. za 180 ℔
12345 ℔ po £ 4. 11. 3 d. za 2240 ℔
49 Kgr. 376 gr. po fr. 11. 50 c. za Kgr.

Rozdział IV.

Reguła (prawidło) trzech.

§ 52.

Wedle dawnego zwyczaju nazywamy w arytmetyce regułami zastosowania własności proporcyi do rozwiązywania zadań. Nauka o proporcyi zbyt jest znaną, aby ją trzeba było przypominać; zajmiemy się przeto wprost wskazaniem dogodnych sposobów rozwiązywania odnoszących się tu zadań.

Zastosowanie proporcyi polega w ogólności na tém, że jest mnóstwo wielkości związanych między sobą w ten sposób, że za powiększeniem jednéj następuje powiększenie drugiéj w tymże samym stosunku; takiemi są np. ilość i cena towaru, liczba robotników i wielkość dokonanéj pracy, kapitał i procent i t. d. Dwie np. ilości tegoż samego towaru zostają między sobą w tym samym stosunku, co ich ceny, cztery te przeto liczby stanowić będą proporcyę, a jeżeli jedna z nich jest nieznaną, można ją wyszukać na zasadzie własności proporcyi.

Dajmy np., że 5 ℔ towaru kosztują 13 rs., pytanie — ile kosztować będzie 11 ℔ tegoż samego towaru?

Oznaczywszy nieznaną cenę 11 ℔ przez x, mamy stosunek ilości towaru 5 : 11, stosunek zaś ich cen 13 : x, a że stosunki te są równe, przeto

$$5 : 11 = 13 : x$$

co daje $$x = \frac{11 \times 13}{5},$$

gdyż według zasadniczéj własności proporcyi jest

$$5\,x = 11 \times 13.$$

Rozumie się zresztą, że proporcya stanowi tu tylko udogodnienie; możemy bowiem zadanie to rozwiązać bez jéj pomocy: Jeżeli 5 ℔ kosztują 13 rs., to 1 ℔ kosztuje $\frac{13}{5}$ rs. a 11 ℔ kosztuje 11 razy więcéj t. j. $\frac{13 \times 11}{5}$.

Jakkolwiek przy użyciu proporcyi zadania tego rodzaju nader prosto i łatwo się rozwiązują, można tu wprowadzić jeszcze pewne udogodnienie, polegające na inném zestawieniu liczb danych.

Oznaczywszy cenę 1 ℔ przez a, mamy:

$$x = 11\,a$$
$$5\,a = 13$$

a że ilóczyny ilości równych są równe, przeto:

$$5\,a\,x = 11 \times 13\,a$$

czyli $$5\,x = 11 \times 13$$

Wprowadzona tu zatem ilość a jest tylko pomocniczą, tak że możemy ją z góry zaniechać, a powyższy układ przedstawi się w sposób następujący:

$$\begin{array}{c|c} x & 11 \\ 5 & 13 \end{array}$$

Liczby obok siebie wypisane w jednym wierszu poziomym, nie są wprawdzie równemi, ale iloczyny liczb położonych po lewéj i po prawéj stronie linijki są równe. Jedynym tylko koniecznym tu warunkiem jest, aby domyślna ilość a zachodziła po obu stronach linijki, co osiągniemy, jeżeli w drugim wierszu zaczniemy od wielkości tego rodzaju, na któréj kończymy w wierszu pierwszym, a wtedy zakończymy wielkością tego rodzaju, od któréj rozpoczęliśmy; najdogodniéj przytém będzie zaczynać od od ilości nieznanéj. Powyższy przeto sposób wypisywania będzie obrazem wysłowienia: Ile (x) rubli płacimy za 11 ℔, jeżeli za 5 ℔ płacimy 13 rs.

$$\begin{array}{r|l} x & 11 \\ 5 & 13 \\ \hline \end{array}$$

$$5\,x = 11 \times 13$$

$$x = \frac{11 \times 13}{5}$$

W rachunkach handlowych unika się chętnie znaków przypominających działania algebraiczne, zwykło się przeto pisać:

$$\begin{array}{r|l} ? & 11 \\ 5 & 13 \\ \hline 5 & 143 \\ \hline & 28{,}60 \text{ rs.} \end{array}$$

Układ taki zowie się *łańcuchowym*, dla tego, że ilości wchodzące tu powiązane są niby ogniwa łańcucha; rozwinięcie tego sposobu znajdziemy we właściwéj regule łańcuchowéj.

Ponieważ iloczyny liczb położonych z lewéj i prawéj strony linijki pionowéj są równe, można przeto przed wykonaniem mnożenia obie strony dzielić i mnożyć przez téż same liczby i tym sposobem osiągać możliwe uproszczenia.

Przykłady:

1) 27 robotników wyrobiło w pewnym czasie 198 sztuk, ilu robotników potrzeba do wyrobienia w tymże czasie 572 sztuk?

Ilu robotników wykona 572 sztuki, jeżeli 198 sztuk wykonało 27 robotników

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{572}\ \ 286 \\ 11\ \cancel{99}\ \cancel{198} & \cancel{27}\ \ 3 \\ \hline 11 & 858 \\ \hline & 78 \text{ robot.} \end{array}$$

W przykładzie tym liczby 198 i 572 dały się uprościć przez 2, liczby 99 i 27 przez 9.

2) $2^3/_4$ arszyna kosztują 7 rs. ile zapłacimy za 22 arszyny?

$$\begin{array}{r|l} ? & 5 \\ 1\ \cancel{11} & 22\ \ 2 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline & 40 \end{array}$$

Po lewéj stronie mamy $^{11}/_4$; aby się pozbyć mianownika, należy iloczyn lewéj strony pomnożyć przez 4, dla otrzymania przeto równości obu iloczynów należało iloczyn drugiéj strony pomnożyć przez 4;

pozbywamy się zatém mianowników, wypisując je po drugiéj stronie linijki, jako czynniki. Można tedy unikać wypisywania mianowników, jeżeli je bezpośrednio przenosimy na drugą stronę.

3) $7\frac{2}{3}$ łokcia kosztuje $5\frac{3}{4}$ rs., ile otrzymamy za 12 rs. 60 kop. ($12\frac{3}{5}$ rs.)?

?	63 21
5	4
23	23
3	
5	84

$16\frac{4}{5}$ łok.

W miejsce liczb 23, 23, 3 domyślamy się po uproszczeniu 1, których wyraźnie nie wypisaliśmy.

4) Za $17\frac{1}{2}$ yarda płacimy £ 24. 11. 9 d. ile otrzymamy za £ 6. 10. 6 d.

?	6,525 0,265
0,1967 4,9175 24,5875	35 7
2	
0,3934	1,855

5,22

0,66 × 3   5 yar. 8 cali.

× 12

7,92

Oprócz zadań dotąd rozbieranych rozwiązuje się za pomocą reguły trzech inna jeszcze kategorya zadań, do których wchodzące wielkości związane są ze sobą w ten sposób, że za powiększeniem jednéj następuje zmniejszenie drugiéj w tymże samym stosunku; takiemi są np. liczba robotników i czas potrzebny na wykonanie przez nich pewnéj pracy; długość i szerokość użytego materyału; kapitał i czas, przez jaki kapitał ten ma być wypożyczonym dla uzyskania oznaczonych procentów. W przypadkach poprzednich mówimy, że wielkości są *wprost proporcyonalne* lub *w stosunku prostym*, w tych zaś — *odwrotnie proporcyonalne* lub *w stosunku odwrotnym*.

Weźmy zadanie téj kategoryi.

W ciągu ilu dni ukończy 36 robotników pracę, którą 6 robotników wykonało w ciągu 24 dni?

Wchodzące do tego zadania ilości są w stosunku odwrotnym, bo im więcéj jest robotników, tém mniéj dni potrzebują na wykonanie pracy. Oznaczmy przez x liczbę dni szukaną:

6 rob. . . . . 24 dni
36 „ . . . . x „

Stosunek liczb robotników jest 6 : 36, stosunek liczb dni 24 : x; ale że x powinno być tyle razy mniejszém od 24, ile razy 6 jest mniejszém od 36, przeto stosunkowi 24 : x równym będzie stosunek 36 : 6, t. j. mamy proporcyę:

$$36 : 6 = 24 : x$$

czyli $$6 : 1 = 24 : x$$

$$1 : 1 = 4 : x$$

zkąd $$x = 4$$

Do zadań tego rodzaju wrócimy w § następnym:

Zadania.

1) 40 ℔ kosztuje 19 rs. ile 1387 ℔?

2) Ile kosztuje 2600 ℔ pszenicy, jeżeli korzec, odpowiadający 242 ℔, kosztuje 8 rs. 40 kop.?

3) 2000 funtów niem. pszenicy kosztują 263 ℳ ile kosztuje hektolitr odpowiadający 153 ℔?

4) Ile kosztuje w Londynie 4896 ℔ pszenicy po 66 sh. za 496 ℔ i 13652 ℔ jęczmienia po 35 sh. za 416 ℔?

5) Z 2400 ℔ bawełny otrzymano 2185 ℔ nici, ile nici wyrobić można z 70000 ℔ takiéj bawełny?

6) Pud rosyjski pewnego towaru płaci się po $26\frac{1}{2}$ ℳ. ile wypada za 100 ℔ niem. (1 p. ros. = $32\frac{3}{4}$ ℔ niem.).

7) $\frac{5}{6}$ ℔ kosztuje $\frac{3}{5}$ rs., ile $\frac{7}{8}$ ℔?

8) Przewóz 1120 fun. wynosi rs. 22 kop. 40, ile się zapłaci od 7120 fun.?

9) Za 3 Cwt. 2 Q. 25 fun. towaru zapłacono w Londynie £ 100. 8. 8 d., ile się zapłaci za 14 fun.?

10) Jeżeli ktoś pobiera miesięcznie pensyi 83 rs. $33\frac{1}{3}$ kop., ile otrzyma w ciągu 1 roku 5 mies. 15 dni?

11) Ile wynosi ludność miasta dostarczającego 943 rekrutów, jeżeli na 1200 mieszkańców pobiera się 7 ludzi?

12) Ile rubli srebrnych czyni 2500 dolarów złotem, i ile dolarów złotem czyni 3712 rs., jeżeli 1 rs. 20 kop. srebrem wynosi $96\frac{1}{4}$ centów złotem?

13) 57 arszynów ile metrów, 39 metrów ile arszynów (5 m.= 7 ar.).

14) 69 łok. warsz. ile metrów, 72 metry ile łokci warsz. (4 m.= 7 łok.).

15) 235,7 m. ile yardów, $46^3/_4$ yarda ile metrów (11 y.=10 m.)

16) 75 pudów 25 ℔ ile Kg., 386 Kg. ile pudów (1 pud.=$16^3/_8$ Kg.).

17) 140 korcy warsz. ile czetwierti, 57 czetw. ile korcy warsz. (5 cz. = 8 kor.).

18) 360 gar. 3 kwarty war. ile wiader ros., 145 wiader ile garncy (100 wiader = $307^1/_4$ gar.).

§ 53.

Reguła trzech złożona obejmuje zadania, w których zachodzą więcéj niż dwa stosunki, czyli, w których odpowiedź zależy więcéj niż od jednego warunku.

Postępowanie objaśnimy na przykładzie:

6 mularzy wystawiło w ciągu 50 dni, pracując dziennie po 12 godzin, mur długi na 24 sążnie, wysoki na stóp 15 i gruby na $2^1/_2$ stopy. Ile dni potrzebować będzie 16 mularzy dla wystawienia muru długiego na sążni 75, wysokiego na stóp 10 i grubego na 4 stopy, jeżeli dziennie pracować będą po 10 godzin?

6 mul.	—50 d.	— 12 god.	—24 sąż. dł.	15 st. wys.	$2^1/_2$ st. gr.
16 „	x —	10 „	75 „	10 „ „	4 „

Dla rozwiązania tego zadania, rozbijmy je na szereg zadań częściowych, powstających przez to, że waruuki wiersza pierwszego zastępować będziemy kolejno warunkami wiersza drugiego:

6 mul.	50 d.	12 g.	24 sąż. dł.	15 st. wys.	$2^1/_2$ st. gr.
16 „	x_1 „	12 „	24 „	15 „	$2^1/_2$ „
16 „	x_2 „	10 „	24 „	15 „	$2^1/_2$ „
16 „	x_3 „	10 „	75 „	15 „	$2^1/_2$ „
16 „	x_4 „	10 „	75 „	10 „	$2^1/_2$ „
16 „	x „	10 „	75 „	10 „	4 „

Każde dwa wiersze po sobie następujące różnią się jednym tylko szczegółem, obejmują przeto w sobie zadanie, dające się rozwiązać za pomocą reguły trzech pojedyńczéj. I tak, z wiersza pierwszego i drugiego wyczytujemy zadanie: 6 mularzy w ciągu dni 50 ukończyło pewną robotę, pracując 12 godzin dziennie, w ciągu ilu dni ukończy tęż samą robotę 16 mularzy, pracując téż po 12 godziu dziennie? A że liczba robotników i czas pracy są w stosunku odwrotnym, znajdziemy szukaną liczbę x_1 z proporcyi:

$$16 : 6 = 50 : x_1$$

Podobnież z wiersza drugiego i trzeciego wyczytujemy zadanie: Pewna liczba robotników ukończyła pewną robotę w ciągu x_1 dni pracując po 12 godzin dziennie, w ciągu ilu dni ukończyłaby ją, pracując po 10 godzin dziennie:

$$10 : 12 = x_1 : x_2$$

W wierszu trzecim i czwartym zawartém jest zadanie: Pewna liczba robotników wystawiła w ciągu dni x_2 mur długi na 24 sążnie, w ciągu ilu dni taż sama liczba robotników, pracując takąż samą liczbę godzin dziennie, wystawi mur długi na 75 sążni, takiéj saméj, jak poprzednio, wysokości i grubości. Tu stosunek między liczbą dni pracy a wielkością pracy jest prosty, zatém

$$24 : 75 = x_2 : x_3 \text{ i t. d.}$$

W ten sposób z warunków danego zadania otrzymujemy szereg następnych proporcyj:

$$\begin{aligned} 16 &: 6 = 50 : x_1 \\ 10 &: 12 = x_1 : x_2 \\ 24 &: 75 = x_2 : x_3 \\ 15 &: 10 = x_3 : x_4 \\ 5/2 &: 4 = x_4 : x \end{aligned}$$

Niewiadoma x w ostatniéj proporcyi jest właśnie wielkością szukaną w danėm zadaniu.

Szereg powyższy proporcyj rozwiązać możemy kolejno; z pierwszéj, wynalazłszy x_1, podstawimy tę wartość w drugą i znajdziemy x_2; znalazłszy z drugiéj x_2, podstawimy tę wartość w trzecią i znajdziemy x_3 i t. d.

Zamiast jednak tego kolejnego wyszukiwania niewiadomych, dosyć przypomnieć sobie, że mając szereg proporcyj, można z nich utworzyć nową, przez pomnożenie odpowiednich wyrazów przez siebie. (1).

---

(1) Dajmy szereg proporcyj:

$$\begin{aligned} a &: b = c : d \\ f &: g = h : k \\ l &: m = n : p \end{aligned}$$

Wypisując je w postaci ułamków, czyli biorąc wykładniki, mamy:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$$
$$\frac{l}{m} = \frac{n}{p}$$

Stosując tę własność do powyższych proporcyj, otrzymujemy:

$$16\times10\times24\times15\times{}^5/_2 : 6\times12\times75\times10\times4 = 50.x_1x_2x_3x_4 : x_1x_2x_3x_4x$$

A podzieliwszy oba wyrazy drugiego stosunku przez wspólnie zachodzący w nich iloczyn $x_1x_2x_3x_4$, mamy prcporcyę:

$$16\times10\times24\times15\times{}^5/_2 : 6\times12\times75\times10\times4 = 50 : x,$$

z któréj wynaleźć możemy szukaną niewiadomą x.

Widzimy zatém, że wprowadzone przez nas ilości posiłkowe x_1, x_2, x_3, x_4 ulegają rzeczywiście wyrugowaniu, możemy ich przeto nie wprowadzać do rachunku i tylko ze stosunkiem liczb dni 50 : x porównywać wprost inne stosunki, uważając, czy brane pod uwagę wielkości są w stosunku prostym czy odwrotnym. W ten sposób dane zadanie:

6 mul.	50 d.	12 g.	24 sąż. dł.	15 st. wys.	$2^1/_2$ st. gr.
16 „	x „	10 „	75 „	10 „	4 „

poprowadzi do układu:

$$\left.\begin{array}{r}16 : 6\\ 10 : 12\\ 24 : 75\\ 15 : 10\\ {}^5/_2 : 4\end{array}\right\} = 50 : x$$

Układ ten uważać należy za uproszczony, gdzie stosunek drugi jest już wynikiem pomnożenia 5 stosunków: 50 : x_1, x_1 : x_2 i t. d., należy tylko pomnożyć pierwsze stosunki odpowiedniemi wyrazami. Poprzednio jednak wykonawszy w znany sposób możliwe uproszczenia, otrzymujemy:

$$\left.\begin{array}{r}1 : 1\\ 1 : 1\\ 1 : 75\\ 1 : 1\\ 1 : 1\end{array}\right\} = 1 : x$$

$$\overline{1 : 75 = 1 : x}$$

zkąd $x = 75$.

W każdym razie w zadaniu tém i podobnych mu idzie ostatecznie o oddzielenie liczb, których iloczyn stanowić ma dzielną, od liczb, których iloczyn ma być dzielnikiem; do podobnego oddzielenia dojść możemy w sposób dogodniejszy. Uważmy że liczba robotników liczba dni i liczba godzin pracy dziennéj mają tu znaczenie zupełnie

---

A że iloczyny ilości równych są równe; przeto mnożąc stronami, otrzymujemy:

$$\frac{afl}{bgm} = \frac{chn}{dkp}$$

czyli $afl : bgm = chn : dkp.$

jednakowe, bo mniejsza np. liczba dni zyskaną być może przez powiększenie liczby godzin pracy dziennéj; tak samo długość, wysokość i grubość muru są w tém zadaniu w podobny sposób między sobą związane. Możemy przeto dane tu liczby rozdzielić na cztery grupy i uważać liczbę robotników, dni i godzin za przyczynę, wymiary zaś muru za skutek. W ten sposób mamy w daném zadaniu dwie przyczyny (P i P') i odpowiadające im dwa skutki (S i S'). Skutki te są wprost proporcyonalne do wytwarzających je przyczyn, tak że mamy proporcyę:

$$P : P' = S : S'$$

czyli według podanego w § poprzedzającym sposobu pisania:

$$\begin{array}{c|c} P & S \\ S' & P' \\ & \end{array}$$

Różnica zatém między regułą trzech pojedynczą a złożoną będzie ta tylko, że wielkości, które tu nazywamy przyczyną i skutkiem, mogą być złożone z kilku liczb;—pamiętać tylko należy, aby w drugim wierszu rozpoczynać od wielkości tego rodzaju, na których kończymy w wierszu pierwszym. Najdogodniéj będzie znów układ rozpoczynać od ilości szukanéj. Ułożymy przeto dane liczby według wysłowienia:

Ile (?) dni potrzebuje 16 mularzy pracujących po 10 godzin dziennie (przyczyna) dla wystawienia muru długiego na 75 sąż., wysokiego na 10 i grubego na 4 stopy (skutek), jeżeli dla wystawienia muru długiego na 24 sążnie, wysokiego na 15 st. i grubego na $2\frac{1}{2}$ stopy (skutek) potrzeba było 6 mularzy pracujących przez dni 50 po 12 godzin dziennie:

$$\begin{array}{r|r} \left.\begin{array}{r} ? \\ 16 \\ 10 \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r} 75 \\ 10 \\ 4 \end{array}\right\} \\ & \\ \left\{\begin{array}{r} 24 \\ 15 \\ 5/2 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 6 \\ 50 \\ 12 \end{array}\right\} \end{array}$$

Wartość ilości niewiadoméj otrzymamy, podobnie jak w regule pojedyńczéj, przez podzielenie iloczynu strony prawéj przez iloczyn lewéj, dokonawszy w każdym razie poprzednio możliwe uproszczenia. Nawiasy zresztą, obejmujące liczby między sobą jednoznaczne, są tu użyte tylko dla objaśnienia, a mianownik 2 można bezpośrednio przenieść na drugą stronę:

$$
\begin{array}{r|l}
? & \cancel{75} \\
\cancel{4}\ \cancel{16} & \cancel{10} \\
\cancel{10} & \cancel{4} \\
\cancel{24} & \cancel{2} \\
\cancel{5}\ \cancel{15} & \cancel{6} \\
\cancel{5} & \cancel{50} \\
 & \cancel{12}\ \cancel{3} \\
\hline
 & 75 \text{ sąż.}
\end{array}
$$

Dla sprawdzenia weźmy w zadaniu powyższém inną wielkość za niewiadomą, np. grubość muru pierwszego, czyli rozwiążmy zadanie przedstawione przez liczby:

6 mul. 50 d. 12 g. 24 sąż. dł. 15 st. wys. ? st. gr.
16 „ 75 „ 10 „ 75 „ 10 „ 4 „

Ile stóp grubości posiadać będzie mur długi na 24 sąż. i na 15 stóp wysoki (skutek), wystawiony przez 6 mularzy, pracujących przez dni 50 po 12 godzin dziennie (przyczyna), jeżeli 16 mularzy pracujących przez dni 75 po 10 godzin dziennie (przyczyna) wystawiło mur długi na 75 sąż. wysoki na 10 i gruby na 4 stopy (skutek):

$$
\begin{array}{r|l}
\left\{\begin{array}{r} ? \\ \cancel{2}\ \cancel{24} \\ \cancel{3}\ \cancel{15} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} \cancel{6} \\ \cancel{50}\ \ 10 \\ \cancel{12} \end{array}\right\} \\
 & \\
\left\{\begin{array}{r} 4\ \cancel{16} \\ \cancel{75} \\ \cancel{10} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} \cancel{75} \\ \cancel{10} \\ \cancel{4} \end{array}\right\} \\
\hline
4 & 10 \\
\cline{2-2}
 & 2^1/_2 \text{ stopy.}
\end{array}
$$

Jedyną przeto trudność przy rozwiązywaniu tego rodzaju zadań stanowić może rozdzielenie liczb na grupy, któreśmy oznaczyli nazwą przyczyny i skutku; trudność ta wszakże nie jest większą niż rozpoznawanie, czy dane wielkości są w stosunku prostym czy odwrotnym. Można tu zresztą nadmienić, że niekoniecznie i przyczyna i skutek są, jak w zadaniu powyższém, ilościami złożonemi,—jedna z nich może być pojedyńczą.

Rozwiążmy tu kilka jeszcze przykładów.

1) Ile procentu przynosi kapitał 2400 rs. w ciągu 6 lat przy

4% (t. j. jeżeli 100 w ciągu roku przynosi 4). Tu kapitał i czas stanowią przyczynę, procent skutek. Zatém:

Ile rs. procentu (skutek) przyniesie kapitał 2400 rs. w ciągu 6 lat (przyczyna), jeżeli kapitał 100 rs. w ciągu jednego roku (przyczyna) przynosi 4 rs. procentu (skutek):

$$\begin{array}{r|l} ? & 2400 \\ & 6 \\ 100 & \\ 1 & 4 \\ \hline & 576 \text{ rs.} \end{array}$$

2) Jaki kapitał w ciągu lat 6 przyniósł 576 rs. procentu przy 4%?

Jaki kapitał w ciągu lat 6 (przyczyna) przyniół 576 rs. procenu (skutek), jeżeli 4 rs. procentu (skutek) otrzymujemy od kupitału 100 w ciągu roku jednego (przyczyna)

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{576}\ \cancel{144}\ 24 \\ \cancel{6} & \\ & 100 \\ \cancel{4} & 1 \\ \hline & 2400. \end{array}$$

3) Przez ile lat kapitał 2400 rs. przyniósł 576 rs. przy 4%.

Przez ile lat kapitał 2400 rs. (przyczyna) przyniósł 576 rs. procentu (skutek), jeżeli 4 rs. procentu (skutek) otrzymujemy od kapitału 100 za 1 rok (przyczyna).

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{576}\ \cancel{24}\ 6 \\ \cancel{2400} & \\ 4 & \cancel{100} \\ & 1 \\ \hline & 6 \end{array}$$

4) Ile procentu przyniesie kapitał 780 rs. w ciągu 7 miesięcy przy $4\frac{1}{2}\%$.

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{780}\ 65 \\ & 7 \\ 100 & 9 \\ \cancel{12} & \\ 2 & \\ \hline 200 & 4095 \\ \hline & 20{,}47\frac{1}{2} \text{ rs.} \end{array}$$

5) Jeżeli za pomocą pompy wyczerpano w ciągu 8 dni staw mający 4 łokcie głębokości, 3 łok. długości i 12 łok. szerokości, ile łokci głębokości ma staw długi na 40 a szeroki na 18 łok., jeżeli za pomocą tejże pompy wyczerpanym został w ciągu 18 dni?

$$\begin{array}{r|l} ? & \\ \cancel{40} & \cancel{18} \\ \cancel{18} & \cancel{4} \\ & \cancel{30} \\ 2\ \cancel{8} & \cancel{12}\ 3 \\ \hline 2 & 9 \\ \cline{2-2} & 4\tfrac{1}{2}\ \text{ł. gł.} \end{array}$$

6) W ciągu ilu dni wyczerpie pompa staw mający 30 łok. długości, 12 łok. szer. i 4 głębokości, jeżeli staw mający 40 łok. długości, 18 ł. szer. i $4\frac{1}{2}$ ł. gł. wyczerpała taż sama pompa w ciągu 18 dni?

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{30} \\ & \cancel{12}\ 4 \\ \cancel{40} & \cancel{4} \\ \cancel{18} & 2 \\ \cancel{9} & \cancel{18} \\ \hline & 8\ \text{dni.} \end{array}$$

7) Ilu ludzi ukończy w 14 dni, pracując po 8 godzin dziennie, robotę, którą poprzednio wykonało 12 ludzi w ciągu 20 dni, pracując po 7 godzin dziennie?

W zadaniu tém wielkość roboty nie jest bliżéj oznaczoną, ale jest jednakową w obu razach; oznaczywszy ją przeto przez A, mamy:

$$\begin{array}{r|l} ? & \\ 14 & A \\ 8 & \\ & 12 \\ A & 20 \\ & 7 \end{array}$$

czyli podzieliwszy obie strony przez A:

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{12}\ 3 \\ 2\ \cancel{14} & \cancel{20}\ 5 \\ 2\ \cancel{8} & \cancel{7} \\ \hline & 15 \end{array}$$

8) Jaki kapitał w ciągu 7 miesięcy przy $4\frac{1}{2}\%$ przyniesie tyleż procentu, co kapitał 4400 rs. przy $3\frac{3}{4}\%$ w ciągu 9 miesięcy.

W zadaniu tém skutek, t. j. procent, jest także w obu razach jednakowym, zatém:

?	2
7	~~4400~~ 1100
~~9~~	15
~~4~~	~~9~~
7	33000
	4714,29 rs.

Dwa ostatnie zadania prowadzą nas bezpośrednio do rozwiązywania zadań reguły trzech pojedynczéj, w których zachodzą stosunki odwrotne; w tym bowiem razie ilości dane muszą być uważane za przyczyny jednego i tegoż samego skutku (lub téż za skutki jednéj i téj saméj przyczyny).

Tak np.: 1) W ciągu ilu dni 36 robotników ukończy pracę, którą 6 robotników dokonało w ciągu 24 dni. Skutek (wielkość pracy) jest w obu razach jednakim, zatém:

?	6
36	24
	4 dni.

W tych przeto zadaniach należy po jednéj stronie linijki wypisywać liczby stanowiące szczegóły pytania, po drugiéj liczby wyrażające warunek dany.

2) Na jakim procencie umieścić należy kapitał 3000 rs., aby przynosił dochód takiż sam, jak kapitał 3600 przy $3^3/_4$%.

?	15
3000	3600
4	
	$4^1/_2$%.

3) Na pewną odzież potrzeba $9^1/_2$ łokci tkaniny szerokiéj na $1^3/_4$ łok., ile łokci innéj tkaniny, szerokiéj na $1^1/_2$ łok., kupić trzeba na podszewkę, którą cała suknia ma być podszytą.

?	2
3	19
2	7
4	
	$11^1/_{12}$ łok.

Zadania.

1) Tkacz wyrobił z $7\frac{1}{2}$ ℔ przędzy $31\frac{1}{2}$ łokcia płótna szerokiego na $1\frac{1}{4}$ łok., ile potrzebować będzie przędzy na 45 łokci płótna szerokiego na $7\frac{1}{2}$ ćwierci łokcia.

2) 24 robotników wykończyło 72 sztuki towaru, z których każda była długa na 18 yardów a szeroka na $\frac{2}{3}$ y., pracując przez 6 tygodni, tygodniowo po 6 dni a dziennie po 10 godzin. Jak długą będzie sztuka podobnegoż towaru, którego 9 robotników wyrobiło 36 sztuk szerokich na $\frac{1}{2}$ yarda w ciągu 8 tygodni, jeżeli pracowali po 5 dni tygodniowo i po 12 godzin dziennie.

3) Woźnica podejmuje się przewiezienia 40 cetnarów przez 30 mil za 60 rs. Po ujechaniu 10 mil otrzymuje polecenie dalszego prowadzenia towaru inną drogą, przyczém ma przybrać jeszcze 10 cetnarów towaru, i zawiezienia go o 5 mil daléj niż był pierwotnie ugodzonym. Jaką ma otrzymać zapłatę, jeżeli uciążliwości drogi drugiéj są $\frac{4}{3}$ raza większe niż pierwszéj, a ceny żywności $\frac{6}{5}$ raza wyższe.

4) Dla wystawienia budynku potrzeba 5400 płyt kamiennych, z których każda, gdy jest wmurowaną, zajmuje przestrzeń $2\frac{1}{2}$ stopy długości, $1\frac{3}{4}$ stopy szerokości i 1 stopy długości. Ile na wystawienie tegoż budynku trzeba będzie cegieł, jeżeli przyjmiemy, że cegła wmurowana ma długości 12 cali, szerokości 6 a grubości 3 cale.

5) W pewném mieście zamierzoném jest wprowadzenie oświetlenia gazowego; obliczono, że koszt roczny 250 płomieni, które zużywają na godzinę po 5 stóp sześciennych gazu i palą się przez 1440 godzin, wynosi 356 rubli. Postanowiono jednak liczbę latarń ograniczyć do 220, a zużycie gazu na godzinę do $4\frac{1}{2}$ st. sześciennych, natomiast czas oświetlenia powiększyć do 1560 godzin. Ile teraz wynosić będzie koszt oświetlenia?

6) Ile trzeba będzie cegieł dla wystawienia muru długiego na stóp 20, wysokiego na 12 a grubego na 2 stopy, jeżeli każda cegła ma 6 cali długości, 4 c. szerokości i 2 c. grubości?

7) Książka wydrukowaną jest na 56 arkuszach liczących po 16 stronic i zawiera na stronie 24 wiersze, a w wierszu przecięciowo 30 głosek. W nowém wydaniu ma być wydrukowaną również w ósemce

ale mniejszemi głoskami, tak aby na stronie było wierszy 32 a w wierszu 40 głosek. Ile papieru trzeba na egzemplarz?

8) Kupuje ktoś 50 młodych szczepów po 7 kop. za sztukę. Tyle jednak z nich obumiera, że sztuka wypada po 3 kop. drożéj; ile szczepów wymarło?

10. Jeżeli 3 zecerów składa w ciągu $4\frac{1}{2}$ dnia, pracując po 10 godzin dziennie, 6 arkuszy, ilu potrzeba zecerów do złożenia dzieła obejmującego $102\frac{2}{5}$ arkusza druku, jeżeli praca ma być ukończoną w ciągu 4 tygodni, licząc po 6 dni tygodniowo i po 12 godzin pracy dziennéj?

11) U cieśli 5 czeladników w ciągu 12 dni zarabia 180 rs. Niektórzy z nich przyrzekają udzielić jednemu ze swych towarzyszy, który uległ nieszczęśliwemu wypadkowi, tyle wsparcia, ile zarabiają w ciągu $2\frac{1}{2}$ dnia i dają mu 22 rs. 50 kop.; ilu ich było?

12) Dla oczyszczenia łożyska rzeki szerokiéj na 28 sążni i przecięciowo głębokiej na $5\frac{1}{6}$ stóp, na przestrzeni 280 sążni, potrzeba było 280 ludzi pracujących przez 16 tygodni po 6 dni tygodniowo. Ilu robotników potrzeba dla oczyszczenia innéj części tejże saméj rzeki, długiéj na 310 szerokiéj na $23\frac{1}{3}$ sążni, a głębokiéj na $5\frac{1}{6}$ stopy, jeżeli robota ma być ukończona w ciągu 20 tygodni po 5 dni tygodniowo?

13) Ile procentu wydaje kapitał 1600 rs. w ciągu $\frac{3}{4}$ roku, odsany *a*) na 5% i *b*) na 6%?

14) Na jakim procencie (na ilu od sta) umieścić należy kapitał 1500 rs. aby po $3\frac{1}{5}$ roku otrzymać 216 rs. procentu?

15) Ile procentu przynosi kapitał 2751 rs. 36 kop. po $5\frac{1}{3}\%$ od 20 maja 1877 do 25 lipca 1878 roku (miesiąc po dni 30)?

16) A. pożyczył od B. 3600 rs. na 8 miesięcy; obecnie B. potrzebuje od A. 8000 rs., na jak długo powinien kapitał ten wypożyczyć, aby poprzednią usługę wynagrodzić?

17) Jaki kapitał daje po $4\frac{1}{2}\%$ tenże sam procent, co 850 rs. po 6%?

18) Ile wypożyczyć należy na $6\frac{2}{3}$ lat po 4%, aby mieć dochód takiż sam, jak z wypożyczenia 9800 rs. po 5% przez 8 lat?

19) Wypożyczono 920 rs. po 4% na $4\frac{1}{3}$ roku; na jak długo pożyczyć należy 1200 rs. po $3\frac{1}{2}\%$ aby mieć takiż sam dochód?

20) Ktoś posiada 830 rs. wypożyczone na 6%, chce je pozosta-

wić tak długo, dopóki wraz z procentami (pojedynczemi) nie wzrosną do 1070 rs. Przez ile lat ma kapitał ten pozostawać u dłużnika?

21. Kapitał 10000 rs. umieszczony w handlu przyniósł w ciągu $4\frac{1}{2}$ lat 3600 rs. procentu; jak się procentował (ile % przynosił)?

22) 30 tkaczy wyrabia w ciągu 4 miesięcy 90 sztuk tkaniny, pracując miesięcznie po 25 dni a dziennie po 10 godzin; przez ile miesięcy zajętych będzie 20 tkaczy wyrobieniem 80 sztuk podobnéj tkaniny, jeżeli każda sztuka będzie 3 razy krótsza a $1\frac{2}{3}$ raza szersza niż poprzednio, i jeżeli przy 9 godzinnéj pracy dziennie pracować będą miesięcznie po dni 24?

Rozdział V.

Reguła łańcuchowa.

§ 54.

Reguła łańcuchowa obejmuje zadania, w których ilość szukana związana jest z warunkiem danym przez szereg równości, łączących się między sobą niby ogniwa łuńcucha, t. j. tak, że każda z wielkości pośredniczących zachodzi w dwu z tych równości.

Określenie to jak i sposób rozwiązywania tych zadań objaśni najlepiéj przykład:

Kupiono w Paryżu 200 Kgr. towaru za 2560 franków; po czemu wypada 1 pud (czyli 40 funt.) w Warszawie, jeżeli 100 funtów ross. czynią 41 kgr., a za 300 franków płaci się 108 rs?

Zadanie to przedewszystkiém rozwiązać można za pomocą szeregu następnych proporcyj:

$$100 : 40 = 41 : z$$
$$200 : z = 2560 : y$$
$$300 : y = 108 : x$$

W proporcyach tych z jest liczbą kilogramów, równych 40 fun. ross. czyli 1 pudowi, y ceną z Kgr. czyli 1 puda we frankach, x nakoniec ceną 1 puda w rublach, zatém liczbą szukaną.

Zamiast rozwiązywać proporcye te kolejno, można wyrugować nieznane z i y przez pomnożenie tych proporcyj odpowiedniemi wyrazami, zkąd otrzymamy, biorąc iloczyny wyrazów skrajnych i średnich:

100. 200, 300. z. y. x = 40.41. 2560.108. z. y. a po podzieleniu obu stron przez iloczyn zy:

$$100.\ 200.\ 300.\ x = 40.\ 41.\ 2560.\ 108.$$

Jeżeli zaś liczby stanowiące te iloczyny wypiszemy w kierunku pionowym, będziemy mieli:

x	40
100	41
200	2560
300	108

zkąd znajdziemy liczbę szukaną przez podzielenie iloczynu liczb stojących po prawéj stronie linijki przez iloczyn liczb znajdujących się obok x po lewéj stronie.

Układ taki zowiemy łańcuchowym dla tego, że każdy wiersz zawiera po stronie lewéj wielkość tego rodzaju, jaka w wierszu poprzednim znajduje się po stronie prawéj, a liczba kończąca ten układ jest tegoż rodzaju, co niewiadoma x rozpoczynająca go. Uwidoczni się to przez wypisanie obok liczb ich mianowań:

x rs.	40 funt. ross.
100 funt. ros.	41 Kgr.
200 Kgr.	2560 fr.
300 fr.	108 rs.

Układ ten przeto będzie obrazem wysłowienia: Ile (x) rs. kosztuje 40 funt. ross., jeżeli 100 funt. ross. czyni 41 Kgr., 200 Kgr. kosztuje 2560 fr., a 300 fr. stanowi 108 rs.

Zasada jednak, na któréj polega układ łańcuchowy, okaże się lepiéj z następnego rozumowania:

Oznaczmy przez a i b wartość 1 rs. i 1 fr. w jakiéjkolwiek innéj monecie, np. w złp.; niech nadto c oznacza cenę 1 funta ross., a d cenę 1 Kgr. również w złp., i niech x, jak wyżéj, będzie ceną 1 puda czyli 40 funt. wyrażoną w rublach.

Skoro 1 rs. czyni a złp., przeto x rs. stanowi ax złp., czyli ax jest ceną 40 funt. ross. wyrażoną w złp.; a skoro daléj 1 funt kosztuje c marek, przeto 40 funt. kosztują 40 c marek; ax zatém i 40 c wyrażają też same wielkości, mamy więc równość $ax = 40\,c$. Podobnież, gdy 100 f. kosztują $100c$ złp. a 41 Kgr. $41d$ złp., 100 funt. zaś czyni 41 Kgr., przeto $100\,c = 41\,d$. W takiż sam sposób otrzymamy jeszcze równości: $200\,d = 2560\,b$ i $300\,b = 108\,a$. Mamy zatém szereg równości:

$$ax = 40\ c$$
$$100\ c = 41\ d$$
$$200\ d = 2560\ b$$
$$300\ b = 108\ a,$$

zkąd przez pomnożenie stronami wypływa

$$100.\ 200.\ 300.\ a\ c\ d\ b.\ x = 40.\ 41.\ 2560.\ 108\ c\ d\ b\ a$$

a po podzieleniu obu śtron przez iloczyn ilości $a\ b\ c\ d$

$$100.\ 200.\ 300.x = 40.\ 41.\ 2560.108,$$

Ilości zatém posiłkowe znoszą się nawzajem, można je przeto pomijać zupełnie; ale aby uległy istotnie zniesieniu, potrzeba, aby każda z nich zachodziła domyślnie po lewéj i po prawéj stronie linijki, co będzie miało miejsce właśnie wtedy, gdy w każdym wierszu następnym zaczynamy od wielkości tego rodzaju, na któréj kończymy w poprzednim, i gdy całe to zestawienie kończy się wielkością tego rodzaju co wielkość, od któréj je rozpoczynamy, to jest ilość szukana.

Liczby wypisane obok siebie nie są wprawdzie między sobą równemi, ale iloczyn liczb po lewéj równym jest iloczynowi liczb po prawéj. A że po wykonaniu mnożenia wolno obie strony dzielić przez też same liczby, wolno przeto dzielenia te czyli uproszczenia dokonywać przed przeprowadzeniem mnożenia, — i ostatecznie znajdziemy ilość szukaną, podzieliwszy iloczyn liczb po prawéj przez iloczyn liczb po lewéj, stojących obok x. Gdyby między liczbami danemi zachodziły ułamki, to przenosimy je na drugą stronę, to bowiem wychodzi na pomnożenie obu stron przez jedne i też same liczby.

Wracając przeto raz jeszcze do rozbieranego tu zadania, będziemy mieli:

?	$\cancel{40}$
$\cancel{100}$	41
100 $\cancel{200}$	$\cancel{2560}$
100 $\cancel{300}$	$\cancel{108}$ 18
10000	755712
	75,57 rs.

Ponieważ niewiadoma stanowić ma pewną liczbę rubli i możemy przeto poprzestać na dwu cyfrach dziesiętnych, można było użyć mnożenia przybliżonego, którebyśmy sobie ułatwili podzieliwszy liczby strony prawéj przez 100×100, t. j. mnożąc np. $4 \times 41 \times 2{,}56 \times 0{,}18$.

Jeżeli układ łańcuchowy zbyt jest długim, korzystniejszém być może rozwiązanie zadania przez szereg proporcyj wyżéj wskazany, przyczém zresztą wypisywanie proporcyj jest zbytecznėm, tak że proporcye te pozostać mogą domyślnemi.

Tak np. powyższe zadanie wykona się w sposób następujący:

2560 : 200	
$12{,}80 \times 41$	12,80 cena 1 Kgr. we fr.
515	
$524{,}80 \times {}^{4}/_{10}$ . . .	524,80 „ 41 „ czyli 100 ℔ ros. we fr.
$209{,}92 \times {}^{36}/_{100}$ . .	209,92 cena 40 ℔ czyli 1 puda we fr.
6298	1 fr. $= {}^{108}/_{300} = {}^{36}/_{100}$ rs., zatem
1259	$209{,}92 \times {}^{36}/_{100} = 75{,}57$ jest ceną 1 pu-
75,57 rs.	da w rublach, t. j. liczbą szukaną.

§ 55.

Upraszczanie liczb wchodzących do układu łańcuchowego sprowadza istotne ułatwienie wtedy, gdy na dzielnik otrzymuje się 1 lub przynajmniéj liczba niewielka. Jeżeli zaś dostrzegamy, że uproszczenia do takiego rezultatu doprowadzić nas nie mogą, lepiéj będzie pomijać je zupełnie, a przyśpieszenia roboty szukać w mnożeniu i dzieleniu skróconém. To zwłaszcza wtedy będzie korzystném, jeżeli możemy z góry oznaczyć, ile cyfr zawierać będzie część całkowita liczby szukanéj, co w ogólności nie będzie trudném dla każdego, kto choćby pobieżnie obeznanym jest z cenami towarów; a zresztą łatwo się daje wykryć przez przyjrzenie się liczbom danym. Wtedy, pomijając uproszczenia, jeżeli takowe są zbyt małéj wagi lub nie dosyć widoczne, oraz nie zwracając uwagi na cyfry dziesiętne i zera, mnożymy liczby przez siebie tak, aby z obu stron otrzymać tyle cyfr w iloczynie, ile potrzeba dla otrzymania odpowiedzi z dostateczną ścisłością; następnie sposobem skróconym dzielimy skrócony iloczyn strony prawéj przez podobnyż iloczyn strony lewéj. W ogólności dosyć będzie szukać w ilorazie trzech cyfr dziesiętnych, gdyż rezultat taki najczęściéj przedstawia dostateczną ścisłość.

Dla objaśnienia przerobimy kilka zadań:

1) Ile rubli kosztować będzie 150 funt. warszawskich towaru, za 75 Kgr. którego zapłacono ℳ 248.75, jeżeli 300 ℳ przyjmuje się (z przybliżeniem) za 90 rubli srebrnych, a za 100 rubli srebrnych

płaci się $138\frac{3}{4}$ rubli papierami; 1 funt warszawski = 40,55 dekagramom.

Jeżeli przyjmiemy z przybliżeniem funt warszawski za $\frac{1}{2}$ Kg., to za 150 funt. zapłacilibyśmy 248,75 *M*, co czyni w ogólności mniéj niż 100 rs., a istotna wartość 150 funt. warsz. będzie jeszcze mniejszą, gdyż funt war. mniejszym jest od $\frac{1}{2}$ Kg., zatem część całkowita szukanéj ceny 150 funt. warsz. składać się będzie z 2 cyfr, a że idzie nam jeszcze o kopiejki, dosyć przeto będzie szukać 3 cyfr dziesiętnych czyli w ogóle 5 cyfr. Sam układ zresztą nie potrzebuje bliższych objaśnień, przypomnimy tylko, że 1 Kg.=100 dekagramom.

?	150 2
1	40,55
100	1
75	248,75
300	90
100	138,75
	83,97 rs.

```
  4055 × 2
   811 × 24875
          118
  199000
    2488
     249
  201737 × 9
  181563 × 13875
   57831
  181563
   54469
   14525
    1271
      90
  251918 : 3
   83,973
```

Mnożyliśmy wszędzie tak, aby otrzymywać po 6 najwyższych cyfr iloczynu i z otrzymanego ostatecznie rezultatu odcięliśmy 2 cyfry na całkowite według przybliżonego z góry obliczenia. Można było zresztą poprzestawać i na 5 cyfrach iloczynów. Przy pewnéj wprawie nie potrzeba nawet mnożnika podpisywać pod mnożną w porządku odwrotnym cyfr, a wprost brać iloczyny skrócone.

2) Przeróbmy teraz zadanie odwrotne poprzedzającemu, t. j.

Jeżeli 150 funt. warszawskich wypada po 83,97 rs., ile marek płacono za 75 Kg. tegoż towaru? Dane jak w zadaniu poprzedniém.

Przez podobną ocenę, jak w zadaniu poprzedniém, oznaczyć można, że część całkowita liczby szukanéj będzie trzycyfrową,—szukać przeto będziemy razem 6 cyfr.

?	75
1	100
40,55	1
2 150	83,97
138,75	100
90	300
	248,74 ℳ

dzielnik

4055×2
811×13875
118
111000
1388
139
112527.9
101274

dzielna

8397×3
25191 : 101274
49362 248,744
8852
750
42

Obliczanie dzielnika w większéj liczbie cyfr nie doprowadziłoby tu do oczekiwanéj odpowiedzi 248,75 ℳ; źródło błędu mieści się już w samém zadaniu, przyjęliśmy bowiem za cenę 150 funt. 83,97 rs. w miejsce znalezionéj poprzednio liczby 83,973; ponieważ przeto czwarta cyfra dzielnéj już była niepewną, nie mogliśmy się spodziewać (§ 39) więcéj nad 4 cyfry pewne ilorazu. Liczba 83,973 doprowadziłaby nas do rezultatu 248,75.

3) Ile mil austryackich stanowi $36\frac{1}{2}$ werst ros., jeżeli 1 wersta = 1066 metrów, a 1 mila austr. = 7,585936 kilometrów?

Wersta stanowi nieco więcéj nad kilometr, czyli na milę austr. idzie około 7 werst ros., część przeto całkowita liczby szukanéj zawierać będzie jednę tylko cyfrę, a jeżeli chcemy mieć 4 cyfry dziesiętne, szukać należy razem 5 cyfr.

?	36.5
1	1066
1000	1
7,585936	1
	5,1291 mil. austr.

365×1066
389090 : 73839|36
9793 5,1291
2207
690
8

4) Jaka jest wartość w rublach srebrnych eagle'a północno-amerykańskiego, jeżeli jedna sztuka téj monety złotéj waży 258 troy-granów i zawiera $\frac{9}{10}$ czystego złota; z funta zaś rosyjskiego czystego złota bije się $68\frac{4}{15}$ sztuk półimperyałów, a wartość półimperyała w srebrze wynosi 5 rs. 15 kop. (1 troy-funt = 12 oz. po 20 dwts po 24 grany = 5760 granów, = 373,242 grama; 1 funt ros.=409,5174 grama).

Ponieważ eagle jest monetą 10-dolarową, a dolar ma wartość nieco większą od rubla, część przeto całkowita liczby szukanéj zawierać będzie dwie cyfry,—szukać będziemy tedy razem 5 cyfr.

?	1
1	258
5760	1
10	9
1	373,242
409,5174	1
1	68,267
1	5,15
	12,92 rs.

4095174 × 576
204759
28666
2457
235882

68267 × 373242
204801
47767
2048
136
27
1
254780 × 258
509560
127390
20382
657332 × 4635 (9 × 515)
262933
39440
1972
329
304674 : 235882
68792 12,916
21616
387
151
10

5) Bryła żelaza ważąca 975 funt. ros. jaką posiada objętość w stopach sześciennych ross., jeżeli ciężar właściwy tego żelaza wynosi 7,4 (1 funt ross. = 409,5174 gr., 1 metr = 3,281 stóp ross.).

Za punkt wyjścia w rozwiązaniu tego zadania posłuży nam związek, jaki w układzie miar francuzkich zachodzi między miarami długości a wagami (§ 2), t. j. że jeden centymetr sześc. wody waży 1 gram, zatém 1 centymetr sześc. żelaza waży 7,4 gr. Dodać tu też należy, że gdy 1 metr=3,281 stóp ross., przeto 1 metr sześc.=3,281 × 3,281 × 3,281=35,317 stóp sześc.

?	975 funt.
1	409 5147 gr.
7,4	1 cm. sześc.
1000.000	1 metr sześc.
1	35,317 stóp ross.
	1,91

975 × 4095147
39000
877
47
1
0,39925 × 35317
11978
1997
120
4
14,099 : 7,4
1,91

Przyjrzenie się liczbom mogło tu naprowadzić na domysł, że część całkowita liczby szukanéj będzie jedno cyfrową, albo téż można mnożenia dokonywać po podzieleniu obu stron przez 1000.000.

Zadania.

1) Funt rosyjski towaru kosztuje rs. 2,84, po czemu wypada 1 Kgr. w Wiedniu, jeżeli 1 pud rosyjski = $29\frac{1}{5}$ funt. wiedeńskich, 1 funt wiedeński = 56 dekagramom, a 1 rs. płaci się po $1{,}54\frac{3}{4}$ guldenów austryackich?

2) 10 łokci brabanckich koronek kosztują w Brukselli 85 franków; po ile rubli wypada 1 arszyn, jeżeli za 1 rs. płaci się w Wiedniu $1{,}53\frac{3}{4}$ guldenów austr., a 100 fr. w Wiedniu w wekslu na Bruksellę kosztują 44,75 guld. austr. 1 łok. brab. = 0,695, 1 arszyn= 0,711 metra?

3) Półimperyałów rossyjskich bije się $68\frac{4}{15}$ sztuk z funta ros. (409,5147 gr.) czystego złota; są one próby 88, t. j. na 96 części stopu zawierają 88 części czystego złota; ile sztuk wybić można z 1 kilograma tego stopu 88 próby?

4) Ile funtów warszawskich waży stopa sześc. war. wody; 1 stopa war. (linijna)=0,288 metra, 1 funt war. = 405,504 gr.

5) Korzec pszenicy płaci się w Warszawie po 62 zł. pol. 15 gr., po ile *M* wypada w Berlinie 1000 Kgr. jeżeli za wagę korca pszenicy przyjmuje się 240 funtów ross., 1000 funt. ross. = 819 funt. niem., za 100 rs. płaci się 275 *M*, a 3 rs. czynią 20 złp?

6) 1 Cwt. kosztuje w Anglii £ 2. 7. 6 d, ile florenów austryackich kosztuje 1 cetnar wiedeński, jeżeli 100 funt. ang. czynią 81 funt. wiedeńskich, 10 £ = $124\frac{1}{2}$ fl. austr., 1 cwt. ang.=112 funt. angielskim?

7) 1 cetnar niemiecki oleju skalnego kosztuje 14 *M* 82 ₰; jaka jest odpowiednia cena za 1 garniec warsz., jeżeli ciężar właściwy oleju skalnego wynosi 0,7? 1 kwarta warsz. = 1 litrowi, a 1 marka płaci się po $37\frac{1}{2}$ kopiejek.

8) Jaki jest stosunek tomana perskiego do półimperyała, jeżeli $101\frac{3}{4}$ tomana = 100 dukatów hollenderskich, których z pół kilograma czystego złota bije się 145,577; z 1 zaś funta rossyjskiego złota

88 próby (t. j. zawierającego w 96 częściach 88 części czystego złota) wybija się $68^4/_{15}$ sztuk półimperyałów?

9) Jeżeli 1 turecka oka wyborowego tytuniu kosztuje 35 piastrów, jaka wypada cena w Warszawie za 1 funt ross. tegoż tytuniu? 1 oka=1282,945 gr., 1 lira złota (medżydie—moneta 100 piastrowa) płaci się w Wiedniu po 9 guld. $82^1/_2$ c., a za 150 guldenów austr. płaci się w Warszawie $112.27^1/_2$ rs.

10) Jeden yard sukna kosztuje w Londynie s 6.8d, po ile rubli wypada *a*) 1 arszyn i *b*) 1 łokieć warsz.? (Jeden yard=0,915 m., 1 ar. = 0,711 m., 1 łok. war.=0,576 m; 1 £ płaci się w Warszawie 8,73 rs.

11) Za 2645 Kgr. ryżu zapłacono w Bremie $812,84^1/_2$ ℳ; jaka jest odpowiednia cena za 1 funt ross., 1 funt warsz., 1 funt wiedeński i 1 okę w Bukareszcie? 1 funt ross.=409,5174 gr., 1 funt warszawski=405,504 gr., 1 funt wiedeński = 560,06 gr., 1 oka rumuńska=1283,474 gr. W Warszawie płaci się za 300 ℳ 131,40 rs., w Wiedniu za 100 ℳ 54,50 guldenów; 1 dukat notowanym jest w Wiedniu 5,28 guld., a w Bukareszcie 1 dukat przyjmuje się za 11 lei 75 bani.

12) Ile *a*) kilogramów *b*) funtów rosyjskich czynią 24 arroby 24 arratele portugalskie, jeżeli arroba ma 32 funty funt zaś portugalski=459 gr.?

13) Jaką wartość przedstawia sztabka srebra 72 próby (t. j. zawierająca w 96 częściach 72 cz. czystego srebra), mająca 4 werszki długości, $1^1/_2$ werszka szerokości i $^1/_4$ grubości? Jeden arszyn= 0,71119 metra, z 1 f. ross. czystego srebra bije się $22^{34}/_{45}$ sztuk rubli, ciężar właściwy srebra 72 próby=10,1.

---

14) 35 czetwierti ile czynią korcy warszawskich?

15) 100 garncy warsz., ile czynią wiader ross.?

16) Pud żyta płaci się 88 kopiejek, ile wypada za czetwert'? Przyjmuje się, że korzec żyta waży 230 funt. ross., a stosunek czetw do korca=5 : 8.

17) Łokieć warszawski sukna kosztuje 3,75 rs., ile arszyn?

18) Pud kosztuje 5 rs. $76^1/_2$ kop., ile cetnar warszawski?

19) Metr kosztuje 8,72 ℳ, ile rs. 1 arszyn i 1 łokieć? (1 marka po $37^1/_2$ kop.).

20) 1 cetnar niemiecki kosztuje 267,80 ℳ, ile rs. 1 pud i 1 cetnar warszawski? (300 ℳ płaci się 131,25 rs.).

21) Garniec warsz. okowity 78% płaci się 2,31 rs., po czemu wypada wiadro wódki 60%?

Zadania powyższe sprawdzone być mogą najlepiéj przez utworzenie zadań odwrotnych, jeżeli liczby znalezione weźmiemy za dane, a liczby dane za szukane.—Niepodane stosunki miar znalezione być mogą na końcu dzieła.

Rozdział VI.

Obliczenia odsetkowe (procentowe).

§ 56.

Obliczenia odsetkowe stanowią jedno z najpospolitszych zadań w rachunkowości handlowéj; zachodzą one w ogólności wtedy, gdy ma być znalezioną wartość, wskazana stosunkiem do 100 innéj wielkości.

Jeżeli mówimy, że zarabiamy 15 *od stu* czyli 15 *procent*, 15 *procentów*, to znaczy, że na każdych wyłożonych 100 rublach, złotych, markach, frankach i t. d. mamy 15 rs., zł., *M*, fr. i t. d. zarobku.

Liczba 100 zatém jest podstawą obliczeń odsetkowych; liczba wskazująca, ile policzyć należy od każdéj setki liczby danéj, nazywa się *stopą procentową* (*pro cento*, t. j. od stu), i oznacza się przez %. Liczba, od któréj obliczają się *procenty* czyli *odsetki*, zowie się *kapitałem* lub *walutą*; niekoniecznie ma ona być pewną liczbą monet, może np. oznaczać pewną liczbę funtów. Obliczyć 3% od kapitału 700 znaczy, wziąć 3 jedności od każdych 100 danéj liczby, szukany zatém procent czyli odsetka wynosi 21. ([1])

---

[1]) Nie należy zapominać, że procentem w najpospolitszym znaczeniu nazywa się dochód od kapitału wypożyczonego na pewien czas. Tu wyraz ten ma znaczenie odmienne; obliczaniem właściwych procentów zajmiemy się w rozdziale następnym.

Niektóre dzieła niemieckie procent w znaczeniu tu uważaném nazywają *percentem*; zresztą język niemiecki na oznaczenie dochodu od kapitału posiada wyraz *Zins*.—Byłoby może korzystném, aby rozpowszechniony już u nas wyraz — odsetka ograniczyć do znaczenia, jakie ma w tym rozdziale—i tak go też tu używamy.

W niektórych też przypadkach podstawą rachunku nie jest liczba 100 a 1000,—rachujemy wtedy od tysiąca, *pro mille*, a znak tu używany jest $^0/_{00}$; np. 7000 po $5^0/_{00}$ czyni 35.

Obliczenia odsetkowe zachodzą przy wyszukiwaniu różnych wielkości, z których ważniejsze są:

Zysk i strata. Zyskiem nazywamy różnicę między dochodami a wydatkami w danėm przedsiębierstwie, kiedy pierwszy jest większym, strata natomiast następuje, gdy przy pewnėm przedsiębierstwie więcėj wykładamy, aniżeli odbieramy.

Zysk i strata oznaczają się odsetkach od kapitału wyłożonego.

Dywidenda. Jeżeli przedsiębierstwo podjętėm zostaje przez pewną liczbę uczestników, to zysk przypadający do podziału pomiędzy nich, w stosunku włożonego do przedsiębierstwa kapitału, nazywa się dywidendą. *Superdywindą* jest dochód, jaki akcye (dowody udziałowe) pewnego stowarzyszenia akcyjnego przynoszą nad ustanowiony z góry procent.

Tantyema jest udziałem, jaki w zysku pewnego przedsiębierstwa mają dyrektorowie, członkowie zarządu, urzędnicy i t. d., w przedsiębierstwie tém pracujący.

Prowizya czyli *komisowe* jest wynagrodzeniem, jakie komisyoner (wykonywający zlecenie) pobiera od komittenta (dającego zlecenie) za wypełnienie pewnego polecenia.

Kurtaż (*sensarya*) jest wynagrodzeniem, jakie pobiera mekler czyli agent handlowy za pośrednictwo w interesach.

Komisowe, kurtaż, wydatki na przywóz towaru i t. d. stanowią *koszta handlowe* (niem. *Spesen*).

Premija ubezpieczenia (*assekuracyjna)* jest wynagrodzeniem, jakie płaci ubezpieczony ubezpieczającemu za przyjęte przezeń pewne niebezpieczeństwo (ognia, gradobicia i t. d.). Dowód ubezpieczenia nazywa się *polisą.*

Agio (*ażio)* jest zyskiem otrzymywanym przy zamianie pewnéj sumy pieniężnéj na monetę innego rodzaju; tak np. otrzymujemy agio przy zamianie rubli srebrnych na papierowe; przeciwnie przy zamianie rubli papierowych na monetę złotą lub srebrną ponosimy stratę—*disagio.*

Tara jest wagą opakowania towaru; waga towaru wraz z opakowaniem nazywa się *brutto*, waga samego towaru *netto*. Na niektórych towarach ustępuje się jeszcze druga tara — *supratara*.

Nawaga (*gutgewicht*) jest ustępstwem na wadze towaru, jakie kupiec hurtowy udziela detaliście (kupcowi drobiazgowemu) dla pokrycia strat, które ten ponosi na wadze przy drobnéj sprzedaży.

Rabat jest w ogólności ustępstwem na cenie towaru, udzielaném np. przy nabywaniu towaru w znacznych ilościach.

Dyskont w handlu weklowym—potrącenie pewnéj części należności za to, że zapłata ma miejsce przed terminem umówionym.

Takież ustępstwo w handlu towarowym nazywa się *skonto* (*sconto*). Podobne znaczenie ma *dekort*.

§ 57.

Rozumie się, że obliczenia odsetkowe są tylko szczególnym przypadkiem reguły trzech, ważność jednakże tych zadań nakazuje rozebrać je bliżéj i wykazać wszelkie ułatwienia, jakie umożliwia zachodząca tu stale liczba 100.

Oprócz liczby 100 mamy tu do czynienia z trzema jeszcze wielkościami, kapitałem, odsetką czyli procentem i stopą procentową, które oznaczmy głoskami K, P i s.

Ponieważ kapitały proporcyonalne są do odsetek przeto, według przyjętego tu sposobu pisania proporcyi, mamy:

$$\begin{array}{r|l} P & K \\ 100 & s \end{array}$$

zkąd $$(1)\ P = \frac{Ks}{100}$$

Z tego zasadniczego związku wypływa:

$$(2)\ K = \frac{100P}{s}$$

$$(3)\ s = \frac{100P}{K}$$

Mając zatem dwie z trzech ilości P. K i s, można zawsze wynaleźć trzecią. Rozbierzmy szczegółowo każde z trzech zadań, wskazanych trzema powyższemi wzorami.

§ 58.

Dochodzenie odsetki z danego kapitału i stopy procentowéj jest w życiu handlowém najczęściéj przytrafiającém się zadaniem z trzech wyżéj wskazanych.

Odsetkę tę w każdym razie znaleźć możemy za pomocą proporcyi; tak np, obliczyć procent od 3748 rs. po $7^1/_2\%$.

$$
\begin{array}{r|l}
? & 3748 \\
100 & 15 \\
2 & \\
\hline
\end{array}
$$

Ale do tego samego celu prowadzi wzór (1), łatwo dający się zapamiętać; według tego dla znalezienia odsetki należy kapitał pomnożyć przez stopę i podzielić przez 100:

$$
\begin{array}{r}
3748 \times {}^{15}/_{2} \\
\hline
1874 \\
\hline
28110 : 100 \\
\hline
281{,}10 \text{ rs.}
\end{array}
$$

Niższych gatunków monet, jak np. kopiejek przy rublach, w ogólności odrzucać nie należy, bo, zwłaszcza przy nieco wyższych stopach, mają one wpływ wyraźny na wysokość procentu. Tak np. rs. 3462,38 po 15% dają rs. 519,35 procentu, gdy 3462 rs. prowadzą do rs. 519,30. Przy niewielkich jednak stopach można kopiejki odrzucać, pamiętając tylko podwyższać o 1 ostatnią cyfrę rubli, jeżeli odrzucona liczba kopiejek jest większą od 50.

§ 59.

Stosowanie wszakże proporcyi do wyszukiwania procentów jest zgoła zbyteczném; ta mianowicie okoliczność, że przy wynajdywaniu procentów dzielnikiem jest 100, prowadzi do ułatwień istotnie praktycznych.

Dosyć zauważyć, że $1^0/_0$ liczby stanowi jéj setną część, uwaga ta może być punktem wyjścia rachunku, który dalej prowadzimy przez rozkład stopy procentowéj na części dogodne, zupełnie w ten sposób, jak to wskazano w § 49. Kilka przykładów wyjaśni dostatatecznie to postępowanie.

1) 4768 rs. po $5\frac{1}{2}$ %

1% . . . . 47,68 rs.

5% 238,40

$\frac{1}{2}$% ($\frac{1}{10}$. 5) . . . 23,48

261,88 rs.

2) 769,81 rs. po $3\frac{3}{4}$ %

3% . . . 23,09

$\frac{3}{4}$% ($\frac{1}{4}$.3) . . . 5,52

28,61 rs.

Nie wypisaliśmy tu wyraźnie, czemu się równa 1% danéj liczby, dosyć bowiem po temu przesunąć w myśli przecinek o dwie cyfry ku stronie lewéj; obliczając zaś 3% rozpoczynamy mnożenie od cyfry 8 i dziesiątki iloczynu 8×3 t. j. 2 dodajemy do następnego iloczyny $3 \times 9 = 27$.

3) ₤ 271. 12. 6d po $2\frac{5}{8}$%

₤ 271,625

2% 5,432

$\frac{4}{8}$% ($\frac{1}{2}$.1) . . 1,358

$\frac{1}{8}$% ($\frac{1}{4}$.$\frac{4}{8}$) . . 0,340

7,130 $\times 20$

2,6 $\times 12$

7,2

₤ 7. 2. 7 d.

4) ℳ 3468,75 ₰ po $5\frac{3}{4}$%

5% 173,44

$\frac{2}{4}$% ($\frac{1}{10}$.5) . . . 17,34

$\frac{1}{4}$% ($\frac{1}{2}$.$\frac{2}{4}$) . . . 8,67

199,45 ℳ

albo też:

ℳ 3468,75 po $5\frac{3}{4}$%

6% 208,12

÷$\frac{1}{4}$% ($\frac{1}{4}$.1) 8,67

199,45 ℳ

5) fs. 4058 po $^7/_8\%$

1% 40,58

$\div ^1/_8\%$ . . . 5,07

35,51 fs.

Jeżeli stopa jest większą od 10, za punkt wyjścia rachunku korzystnie jest brać 10% danéj liczby, co stanowi jéj cześć dziesiątą. Tak np.

6) Rs. 3486 po 17%

10% 348,60

5% ($^1/_2$.10) . 174,30

2% (2.1) . . 69,72

592,62 rs.

7) fl. 2642,38 c. po $22^1/_2\%$

20% (2.10) 528,48

$2^1/_2\%$ ($^1/_4$.10) . . 66,06

594,54

8) fs 4765,40 po $13^1/_3\%$

10% 476,54

$3^1/_3\%$ ($^1/_3$.10) 158,85

635,39

Często téż można opierać się na 100% danéj liczby, czyli na saméjże danéj liczbie:

9) Rs. 4764 po 75%

50% ($^1/_2$.100) 2382

25% ($^1/_2$.50) 1191

3573

10) Rs. 876,25 po $58^1/_3\%$

50% 438,12

$8^1/_3\%$ ($^{25}/_3 = {^1/_6}$.50) 73,02

511,14 rs.

Szczególną dogodność przy obliczaniu odsetek przedstawiają stopy, zawierające się całkowitą liczbę razy w 100. Liczby takie poznaliśmy już w § 11. W tym razie dla znalezienia procentu potrzeba tylko kapitał podzielić przez liczbę wskazującą, ile razy stopa mieści się w stu; jeżeli bowiem $\frac{100}{s} = n$, to $P = \frac{Ks}{100} = \frac{K}{n}$. Tak np.

11) rs. 647 po $12\frac{1}{2}\%$ ($12\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.100$)
$\overline{80{,}87}$: 8

12 $\mathcal{M}$ 548,32 po $33\frac{1}{3}\%$
$\overline{182{,}77}$: 3

13) rs. 4289,60 po $87\frac{1}{2}\%$ ($87\frac{1}{2} = 7.12\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.100 = 100 - \frac{1}{8}.100$).

100% . .	4289,60
$\div \frac{1}{8}.100\%$ . .	536,20
	3753,40 rs.

14) fs. 7026,45 po $116\frac{2}{3}\%$

100%	7026,45
$16\frac{2}{3}\%$ ($\frac{1}{6}.100$) . .	1171,07
	8197,52 fs.

Rachunek od tysiąca (*pro mille*) nie potrzebuje osobnych wyjaśnień:

15) rs. 14376 po $3\frac{1}{2}$‰

1‰	14.376
3‰	43,13
$\frac{1}{2}$‰	7,19
	50,32 rs.

Zadania.

Obliczyć odsetki od kapitałów

1) rs. 476	po $2\frac{1}{2}\%$	9) rsr. 3849,20 k.	po $12\frac{1}{2}\%$
2) fs. 4729,73 c.	„ $3\frac{3}{4}\%$	10) £. 76.9.6 d.	„ $16\frac{2}{3}\%$
3) $\mathcal{M}$ 274,50 ϑ.	„ $5\frac{3}{8}\%$	11) $\mathcal{M}$ 1719,20 ϑ.	„ $4\frac{3}{4}\%$
4) fs. 679,45 c.	„ $3\frac{7}{8}\%$	12) fs. 3029,46 c.	„ $33\frac{1}{3}\%$
5) rs. 4026,83 k.	„ $9\frac{1}{2}\%$	13) fl. 2517,30 c.	„ $17\frac{3}{4}\%$
6) £ 147.6.8 d.	„ $\frac{5}{8}\%$	14) $ 397.86 cts.	„ $37\frac{1}{2}\%$
7) fl. 379,43 c.	„ $5\frac{5}{6}\%$	15) £ 754.11.7 d	„ $166\frac{2}{3}\%$
8) £ 86.13.10 d	„ $6\frac{1}{4}\%$	16) fs. 2346	„ 88 %

17) Cena kupna towaru wynosi rs. 648,40 k., na sprzedaży zyskano 15%; jaki zysk?

18) Cena kupna £ 23.6.8, strata 5%; jaka strata?

19) Ile wynosi *a*) komisowe od $\mathcal{M}$ 368,25 po $4\frac{1}{2}\%$, *b*) kurtaż od od fl. ö. w. 11350,75 po $\frac{1}{2}$‰, *c*) premija ubezpieczenia od rs. 12568,94 po $3\frac{3}{4}$‰?

20) Ile wynosi dywidenda od rsr. 3650 po $6^1/_4$%, *b*) od fs. 245600 po 3%, *c*) od ℳ 73500 po $12^1/_2$%?

21) Ile wynosi tara *a*) od 378 berk. 5 pud. po $8^1/_3$%, *b*) od 472 Cwt. 86 funt. po 12%.

22) Rabat *a*) 25% od 48 rs., *b*) $33^1/_3$% od rs. 6,50 kop., *c*) 15% od £ 268.7 sh.

23) Ile odbierze wierzyciel za należne sobie 4786 rs., jeżeli z powodu upadłości dłużnika odbiera tylko *a*) $83^1/_3$% *b*) $56^1/_4$%, *c*) $77^1/_2$%?

24) Z wygranych w loteryi Królestwa Polskiego otrzymuje wygrywający w Warszawie 85%, na prowincyi 84%; ile przypada do wypłaty za główną wygranę (75000 rs.) na cały los, połówkę i ćwiartkę losu, w Warszawie i na prowincyi?

§ 60.

Dochodzenie kapitału, jak to wypada z samego wzoru (2) w § 57, nie może przedstawiać tych udogodnień rachunkowych, co dochodzenie odsetki, gdyż w mianowniku nie ma 100. Dla znalezienia więc kapitału należy 100 razy wziętą odsetkę podzielić przez stopę, do czego też doprowadzi i proporcya:

Jaki kapitał przy 8% wydał procentu 35 rs.?

?	35
8	100
8	3500
	437,50 rs.

Jeżeli jednak stopa mieści się w stu bez reszty, dla znalezienia kapitału dosyć jest pomnożyć odsetkę przez liczbę wskazującą, ile razy stopa zawiera się w stu; gdyż ze wzoru $K = \frac{100P}{s}$ wypływa $K = nP$, gdy $\frac{100}{s} = n$; zresztą jest to też bezpośredniém następstwem odpowiedniéj uwagi § poprzedzającego.

Jaki kapitał wydał przy $12^1/_2$% 83,72 rs. procentu?

$$\begin{array}{r} 83{,}72 \times 8 \\ \hline 669{,}76 \text{ rs.} \end{array}$$

Zadania.

Od jakich kapitałów otrzymujemy odsetki:

1) rs. 76 przy $4^1/_2$% 4) £ 4.7.6 przy $^7/_8$%
2) fs. 48,25 „ $6^1/_4$% 5) rs. 32.15 „ $16^2/_3$%
3) ℳ 52,36 „ $8^2/_3$% 6) fl. aus. 114,36 „ $17^1/_2$%

7) Jakie były ceny kupna towarów, przy sprzedaży których zysk wynosił:

a) rs. 172,75 przy $5^1/_2$%, *b*) £ 327.7.6 przy $3^1/_3$% *c*) $ 4350 przy 5%, *d*) fl. 355.64 przy $6^1/_4$%, *f*) £ 122.14.8 d przy $12^1/_2$%.

8) Od jakich kapitałów policzono:

a) rs. 19,25 komisowego po $1^1/_2$%, *b*) fs. 7,50 kartażu po $^1/_2$‰, *c*) £ 1.6.9 zysku po $2^1/_2$%, *d*) rs. 786 tantyemy po 6%, *e*) rs. 217 straty po $3^3/_4$%?

§ 61.

Dochodzenie stopy procentowéj. Według wzoru (3) § 57 wynajdujemy stopę procentową z danego kapitału i odsetki dzieląc 100 razy wziętą odsetkę przez kapitał, do czego téż prowadzi i proporcya.

Przy jakiej stopie kapitał 17450 rs. wydał procentu 436,25 rs?

?	100	43625 : 174|50	
17450	436,25	87	2,5
	2,5=$2^1/_2$%		

Ponieważ przy dochodzeniu stopy poprzestawać możemy w ogólności na dwu, lub co najwyżéj na trzech cyfrach dziesiętnych, możemy używać dzielenia skróconego.

Zadania.

Przy jakich stopach od następnych kapitałów wypadły odsetki:

1) rs. 3468,75 . . . . rs. 199,45
2) fs. 476,54 . . . . fs. 35,39 fs.
3) £ 271.12.6 d. . . . £ 7.2. 7 d.
4) rs. 647 . . . . . . rs. 80,87

5) Po jakiéj stopie policzono:
a) od ceny towaru rs. 734,65 komisowe rs. 76,84.
b) od sumy ubezpieczonéj rs. 4000 premiję rs. $53{,}87\frac{1}{2}$.
c) od ceny kupna rs. 4765 zysk rs. 297,50.
d) od ceny kupna £ 16.18.6 stratę sh 19.8 d.
e) od cyny kupna kop. 15 zysk 3 kop.
f) od ceny towaru 700 rs. rabat 50 rs.

6) Ile $^0/_{00}$ liczono, jeżeli wynosi:
a) suma ubezpieczona rs. 7460, premija rs. 18,65.
b) suma wekslowa \$ 753,40 kurtaż \$ 1.41.

7) Massa upadłości wynosi rs. 85246,80, stan zaś bierny rs 33785,50; ile $^0/_0$ swych wierzytelności otrzymują wierzyciele?

8) Przedsiębierstwo, które jednego roku dało 4000 rs. dochodu wydało następnego o rs. 178,50 mniéj; o ile $^0/_0$ zmniejszył się dochód?

§ 62.

Dochodzenie kapitału zwiększonego. Kapitałem zwiększonym i zmniejszonym nazywać będziemy przez skrócenie kapitał powiększony o odsetkę lub kapitał zmniejszony o odsetkę. Dochodzenie tych kapitałów wymaga kilku uwag.

Kapitał zwiększony, mając kapitał normalny i stopę, znaleźć możemy przedewszystkiém, jeżeli z wielkości danych obliczymy odsetkę i takową do kapitału normalnego dodamy.

Można jednak wynajdywać kapitał powiększony i bezpośrednio; ztąd bowiem, że kapitały są proporcyonalne do odsetek, wypada, że kapitały powiększone są proporcyonalne do kapitałów normalnych (i odsetek). Gdyż z proporcyi:

$$100 : K = s : P$$

wypływa

$$100 + s : K + P = 100 : K$$

lub

$$100 + s : K + P = s : P. \text{ [1]}$$

---

[1] Stosowna tu będzie przypomnieć tę ważną własność proporcyi. Niech będzie proporcya:

$$a : b = c : d, \text{ czyli}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Oznaczywszy zatém kapitał powiększony $K+P$ przez W, dla znalezienia go używać możemy proporcyi

$$\begin{array}{c|c} W & K \\ 100 & 100+s \\ \hline & \end{array}$$

$$\text{zkąd } W=\frac{K(100+s)}{100}.$$

Przykłady:

1) Ile wyda kapitał rs. 4536, jeżeli się powiększy o $5\frac{1}{4}\%$?

Liczby szukanéj możemy dochodzić, albo wynajdując procent i dodając go do kapitału danego, albo też bezpośrednio przez proporcyę wyżéj wskazaną.

$$\begin{array}{rr} & \text{rs. } 4536 \\ 5\% & 226{,}80 \\ \frac{1}{4}\% & 11{,}34 \\ \hline & \text{rs. } 4774{,}14 \end{array} \qquad \text{albo: } \begin{array}{r|l} ? & 4536 \\ 100 & 105\frac{1}{4} \\ \hline & 4774{,}14 \text{ rs.} \end{array}$$

2) Po czemu sprzedawać 1 funt towaru, który nas kosztuje 36 kop., aby zarobić 25%?

Do tych ilości równych dodawszy lub odjąwszy po 1, będzie:

$$\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1, \text{ czyli}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}, \text{ t. j.}$$

$$a\pm b : b=c\pm d : d$$

W proporcyi téj przestawiwszy wyrazy średnie, i z uwagi, że $b : d= a : c$, mamy:

$$a\pm b : c\pm d=b : d=a : c,$$

t. j. w każdéj proporcyi suma lub różnica wyrazów pierwszego stosunku tak się do sumy lub różnicy wyrazów drugiego, jak poprzednik do poprzednika, lub następnik do następnika.

Zastosowawszy tę własność do proporcyi:

$$a : c=b : d,$$

powstającéj z proporcyi danéj przez przestawienie wyrazów średnich, mamy:

$$a\pm c : b\pm d=a : b=c : d,$$

co, według pierwotnego znaczenia wyrazów, daje: w każdéj proporcyi suma lub różnica poprzedników tak się ma do sumy lub różnicy następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

$$\begin{array}{rr} & \text{k. } 36 \\ 25\% & 9 \\ \hline & 45 \text{ k.} \end{array} : 4 \qquad \text{albo} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 36 \\ 100 & 125 \\ \hline & 45 \text{ kop.} \end{array}$$

3) Ile zapłacić należy za towar, kosztujący rs. 2783,50 kop., jeżeli komisowe i inne koszta wynoszą $12\frac{1}{2}\%$?

$$\begin{array}{rr} & \text{rs. } 2783{,}50 \\ 12\frac{1}{2}\% & 347{,}94 \\ \hline & 3131{,}44 \text{ rs.} \end{array} : 8 \qquad \text{albo} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 2783{,}50 \\ 8\ \cancel{100} & \cancel{112}\frac{1}{2}\ 9 \\ \hline 8 & 25051{,}50 \\ \hline & 3131{,}44 \text{ rs.} \end{array}$$

W ogólności zatém pierwszy sposób postępowania o wiele jest dogodniejszym, w różnych jednak bardziéj zawiłych zadaniach i drugi będzie nam przydatnym. Z przykładu 2) widzimy, jak drobne zadania tego rodzaju dają się rozwiązywać pamięciowo, bez użycia pióra.

§ 63.

Dochodzenie kapitału zmniejszonego, gdy mamy dany kapitał normalny i stopę procentową, odpowiada w zupełności zadaniu poprzedzającemu, możemy mianowicie kapitał zmniejszony otrzymać, albo szukając odsetki i odejmując ją od kapitału danego, albo téż szukając go bezpośrednio na téj zasadzie, że kapitały zmniejszone są proporcyonalne do kapitałów normalnych (i odsetek). Z proporcyi bowiem

$$\begin{array}{ll} & 100 : K = s : P \\ \text{wypływa} & 100 - s : K - P = 100 : K \\ \text{lub} & 100 - s : K - P = s : P. \end{array}$$

Dla znalezienia zatém kapitału zmniejszonego $M (= K - P)$ używać możemy proporcyi:

$$\begin{array}{c|c} M & K \\ 100 & 100 - s \\ \hline & \end{array}$$

$$\text{zkąd } M = \frac{K\,(100 - s)}{100}$$

Przykłady:

1) Towar kupiony za 6783 rs. sprzedano ze stratą 7%; ile zań odebrano?

	rs. 6783	albo	?	6783
÷7%	474,81		100	93
	6308,19			6308,19 rs.

2) Za towar, którego cena wynosi fs 546.75 c. ile odbierzemy po ustąpieniu 10% rabatu?

	fs. 546,75	albo	?	546,75
÷10%	54,67		100	90
	492,08			492,08

§ 64.

W powyższych przykładach zachodziło tylko jednokrotne podwyższenie albo zniżenie procentowe danego kapitału; bardzo częstem są jednak zadania, w których dany kapitał ulegać ma kilkakrotnemu podobnemu podwyższeniu albo zniżeniu. Wszystkie takie zadania rozwiązywać można jak poprzednie, dwojako, t. j. albo przez dodawanie kolejno obliczanych odsetek, albo też przez bezpośrednie wynajdywanie szukanych kapitałów za pomocą reguły łańcuchowéj. Zachodzić tu też mogą redukcye miar i monet, mamy zatém w ogólności zadania odnoszące się do reguły łańcuchowéj, ale połączone z obliczeniami odsetkowemi.

Przykłady:

1) Ile winien kupiec w Lublinie odebrać za towar, który go w Warszawie kosztuje 1248 rs., jeżeli koszta kupna i przewozu tego towaru wynoszą 12½%, a zarobić chce 10%.

	1248	: 8	albo	?	1258
+12½%	156			8 ~~100~~	~~112½~~ 9
	1404			100	110
+10%	140.40				1544,40
	1544.40 rs.				

Konieczna dodać tu uwagę, że zebranie dwu stóp 12% i 10% i doliczenie do kapitału 22½% doprowadziłoby nas do wypadku błędnego i rzeczywiście.

	1248
+20%	249.60
+2½%	31.20
	2158.80

Różnica liczb 1544,40 i 1528,80 pochodzi ztąd, żeśmy w drugim razie zamierzony zysk 10% obliczali tylko od saméj ceny towaru 1248 rs., a nie od kosztów wynoszących 156 rs., które wraz z ceną towaru stanowią wydatek kupna, a zysk winien być obliczanym od całego kapitału wyłożonego. Wrócimy przeto do pierwszéj liczby, jeżeli do drugiéj dodamy 10% kosztów 156 rs.

	1528,80 rs.
+ 10% od 156	15,60
	1544,40

Natomiast porządek, w jakim doliczamy odsetki nie ma wpływu na wypadek, co najlepiéj uwidocznia drugie rozwiązanie, które jest obrazem wysłowienia: Ile żądać mamy za towar, kosztujący nas 1248 rs., jeżeli za każde 100 téj ceny rzeczywiście wyłożyliśmy $112\frac{1}{2}$, a za każde 100 z tak wyłożonego kapitału pragniemy odebrać 110. Zmiana porządku w doliczaniu odsetek wychodziłaby jedynie na napisanie liczby 110 nad $112\frac{1}{2}$.

2) Za ile funtów przypada zapłata, jeżeli od wagi brutto 23360 funtów mamy $1\frac{1}{2}$% nawagi i $6\frac{1}{2}$% tary.

		albo		
	23360		?	23360
÷ 1%	233.60		100	$98\frac{1}{2}$
÷ $\frac{1}{2}$%	116.80		100	$93\frac{1}{2}$
	23009.60			21513,98 f.
÷ 6%	1380.58			
÷ $\frac{1}{2}$	115.05			
	21513,97 funt.			

3) Towar, za który zapłacono 680 rs. i 4% komisowego, sprzedanym został ze stratą 5%; ile zań odebrano?

		albo		
	680 rs.		?	680
+ 4%	27.20		100	104
	707.20		100	95
÷ 5%	35.36			671,84 rs.
	671,84 rs.			

4) Kupujemy w Hamburgu 23360 funt. bawełny po 47 ϑ otrzymujemy tam $\frac{1}{2}$% nawagi, 4% tary, 1% dekortu, różne zaś koszta wynoszą $16\frac{2}{3}$%. Jaką cenę za cały ten towar oznaczyć w Warszawie, jeżeli zarobić chcemy 10%? Kurs w Warszawie wynosi 128 rs. $17\frac{1}{2}$ k. za 300 ℳ.

Przybliżona ocena łatwo wskazuje, że szukana cena stanowić będzie 4 cyfrową liczbę rubli, aby przeto otrzymać kopiejki, rachować będziemy do 6 cyfr dziesiętnych (§ 55).

?	23360
100	$99\frac{1}{2}$ (nawaga)
100	96 (tara)
1	47
100	1
100	99 (dekort)
300	128,175
100	$116\frac{2}{3}$ (koszta)
100	110 (zysk)
	5638,38 rs.

23360 × 995 (1000 − 5)
1168
232432 × 96 (100—4)
9297
223135 × 47
89254
15619
104873 × 99 (100—1)
1049
103824
20765
8306
104
72
5
133076 × $116\frac{2}{3}$ $(100 + \frac{1}{6} \cdot 100)$
22179
155255 × 11
170781 : 3
5692,70 rs.

Albo też

	23360 funt.
$\div \frac{1}{2}\%$ (naw.)	116,80
	23243,20
$\div 4\%$ (tara)	929,73
	22313,47 × 47
	8925388
	1561943
	1048733,1 ϑ
	10487,331 ℳ
$\div 1\%$ (dek.)	104,873
	10382,458 × 128,175
	2076491
	830596
	10382
	7267
	519
	13307,713 : 3
	4435,90 rs.
$+ 16\frac{2}{3}\%$ (kosz.)	739,32
	5175,22
$+ 10\%$ (zysk)	517,52
	5692,74 rs.

Wypadek drugi jest pewniejszy, bośmy działali na większéj liczbie cyfr. Obliczenia odsetkowe wprowadzaliśmy tu w porządku wskazanym zadaniem, dla tego nawagę i tarę strącaliśmy od wagi towaru, dekort od jego ceny w markach, koszta zaś i zysk doliczaliśmy do jego ceny w rublach,—ale powtarzamy jeszcze, że porządek, w jakim te obliczenia do rachunku zostają wprowadzane, nie ma wpływu na ostateczny rezultat.

Przy wprowadzaniu warunków procentowych do układu łańcuchowego, baczyć zawsze należy, czy warunek dany wpływa na powiększenie, czy też na zmniejszenie ostatecznéj odpowiedzi, i stosownie do tego liczbę większą pisać po prawéj lub po lewéj stronie linijki pionowéj.

Zadania.

1. Jakie są ceny przedaży towarów, których ceny kupna i zamierzone zyski są:

a) rsr. 1260, zysk 6%, *b*) ℳ 3458—8$^1/_3$%, *c*) £ 125 — 2$^1/_4$%, *d*) fs. 5286—12$^1/_2$%?

2) Towar kupiony za rs. 350,75 sprzedanym został ze stratą 6$^1/_4$%; za ile?

3) Dom przynosi dochodu brutto rs. 10448, ile przynosi czystego dochodu, jeżeli podatki i inne wydatki czynią 43$^1/_5$%?

4) Za towary, których ceny wynoszą: *a*) rs. 725,50, *b*) fs. 2860 *c*) £ 26.5.8, ile zapłacimy, jeżeli otrzymujemy rabatu od stu=*a*) 10%, *b*) 12$^1/_2$% *c*) 8$^1/_4$%?

5) Za towar kupiony w Londynie za £ 116.8 sh. ile zapłacić należy wraz z 3$^1/_4$% komisowego?

6) Jaką cenę oznaczyć za towar kosztujący 560 rs., jeżeli koszta wynoszą 8$^1/_3$%, a zamierzony zarobek wynosi 15%?

7) Po ile sprzedawano towar kupowany po rs. 17,25, jeżeli koszta wynosiły 12%, a na sprzedaży poniesiono 5% straty?

8) Ile otrzymano za 3740 funt. po 19$^1/_2$ kop., jeżeli ustępowano 4% tary i $^1/_2$% za zapłatę gotówką?

9) Ile należy zapłacić za 3846 funt. po 17$^1/_2$ kop. z rabatem 14$^1/_2$%?

10) Księgarnia sortymentowa sprowadza z Lipska książek za

$\mathcal{M}$ 1425,20; ile zapłacić winna rs. po kursie rs. 139,05 za 300 $\mathcal{M}$, jeżeli otrzymuje *a)* 25% *b)* $33\frac{1}{3}$% rabatu od stu?

11) $9832\frac{3}{4}$ funt. po $\mathcal{M}$ 19.15 za 200 funt. z rabatem $3\frac{3}{4}$%, ile czynią?

12) 6915 funt. brutto z tarą $5\frac{1}{2}$% po rs. 13.75 za 240 funt. netto, z rabatem $1\frac{3}{4}$%, ile czynią?

13) 69412 funt. brutto z tarą $13\frac{11}{16}$% po $49\frac{1}{2}$ $\mathcal{M}$ za 200 funt. netto z $3\frac{3}{4}$% rabatu, przy kosztach $8\frac{1}{3}$%, ile rubli przy kursie $41\frac{1}{2}$ k. za 1 $\mathcal{M}$?

14) 54719 funt. z $1\frac{1}{2}$% tary po $156\frac{3}{4}$ $\mathcal{M}$ za 3600 funt. netto, z rabatem $3\frac{3}{8}$%, przy kosztach $5\frac{1}{2}$%, po $1\frac{1}{2}$ fl. aust. za 1 $\mathcal{M}$; ile fl. aust.?

15) Warszawa sprowadza z Londynu towar w cenie £ 3. 2. 8 d. za 112 funt. ang. netto; otrzymujemy tam 1% nawagi, 15% tary, $1\frac{1}{2}$% rabatu, komisowe zaś wynosi $2\frac{1}{2}$%, a koszta przywozu, cło, i t. d. $16\frac{2}{3}$%, żądany zarobek 12%. Jaką cenę oznaczyć za 1 pud w Warszawie, jeżeli 1 funt angielski = 453,5922 gr., 1 funt ross.=409,5144 gr., a 1 £ płaci się po rs. 9,63?

15) Jaką cenę oznaczyć należy w Antwerpii za 100 Kgr. oleju skalnego z 6% zysku, jeżeli 1 gallon w New-Yorku kosztuje 39 c. pieniędzmi papierowemi, a koszta kupna i sprowadzenia wynoszą 32%? (1 gallon oleju skalnego odpowiada 2,9 Kgr., 1 £=4 \$ 81 c. w złocie=fs. 25,30 c., moneta zaś złota w Ameryce ma względem papierowéj 13% agio).

§ 65.

Odsetki na sto i w stu. W poprzednich ustępach wyszukiwaliśmy z danego kapitału i stopy procentowéj — kapitał zwiększony i zmniejszony. Bardzo często nadarzają się rachunki, w których punktem wyjścia być może taki kapitał powiększony lub zmniejszony. Najprostsze np. zadania tego rodzaju będą. Towar sprzedanym został za 3680 rs. z zyskiem 10%, ile wynosi zysk? Ponieważ zysk liczymy nie od kapitału odebranego ze sprzedaży towaru, ale od kapitału wyłożonego na jego kupno, powyższy przeto zysk 10% odnosi się nie do kapitału danego 3680 rs., ale do mniejszego, nam nieznanego; kapitał zaś 3680 rs. jest kapitałem wyłożonym wraz z zyskiem, jest przeto kapitałem powiększonym, który odpowiada nie kapitałowi zasadniczemu 100, a kapitałowi 110. Podobnież w zadaniu: towar sprzedany m został ze stratą 5% za 2485 rs., ile wynosi strata?—kapitał odpowiada nie kapitałowi zasadniczemu 100 a kapitałowi 95, jest kapitałem zmniejszonym. Trzy zatém przypadki zachodzić mogą przy obliczaniu procentów, stosownie do tego, czy punktem wyjścia rachunku jest kapitał normalny, kapitał powiększony, czy téż zmniejszony, t. j. czy kapitał dany odpowiada kapitałowi zasadniczemu 100, kapitałowi $100+s$, czy téż kapitałowi $100-s$, gdzie s oznacza stopę procentową. Odsetki te rozróżniać będziemy nazwami *odsetek* (*procentów*) *od stu*, *na sto* i *w stu*. Pierwsze zajmowały nas już w powyższych ustępach, pozostaje nam poznać zadania odnoszące się do procentów na sto i w stu.

§ 66.

Odsetki na sto. W zadaniach odnoszących się do odsetek na sto zachodzić mogą w ogóle cztery wielkości, t. j. kapitał powiększony, kapitał normalny, odsetka i stopa procentowa, które, podobnie jak w powyższych ustępach, oznaczać będziemy głoskami W, K, P i s. Według okazanéj w § 62 proporcyonalności kapitałów powiększonych do normalnych i do odsetek, mamy proporcye:

$$\begin{array}{r|l} P & W \\ 100+s & s \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{r|l} K & W \\ 100+s & 100 \end{array}$$

zkąd:

$$(1)\ P=\frac{Ws}{100+s}$$

$$(2)\ K=\frac{100W}{100+s}$$

a daléj:

$$(3)\ W=\frac{P\ (100+s)}{s}$$

$$(4)\ W=\frac{K\ (100+s)}{100}$$

Z tychże wzorów wyprowadzić można wartość na s, mając dane W i P, albo W i K, dogodniéj je jednak otrzymać ze związku

$s=\frac{100P}{K}$, pamiętając, że $W=P+K$; zkąd wypływa:

$$(5) \quad s=\frac{100P}{W-P}$$

$$(6) \quad s=\frac{100\,(W-K)}{K}$$

Sześć powyższych związków stanowi sześć oddzielnych zadań odnoszących się do nauki o procentach na sto. Zadanie jednak, wskazane wzorem (4), t. j. dochodzenie kapitału powiększoneyo z danego kapitału normalnego i stopy procentowéj, było już rozbieraném w § 62 i wracać doń nie mamy potrzeby.

§ 67.

Dochodzenie odsetek na sto. Według wzoru (1) wynajdujemy odsetkę na sto, dzieląc 100 razy wzięty kapitał powiększony przez 100 więcéj stopą procentową, do czego doprowadza téż użycie proporcyi. Podobne ułatwienie, jakie ma miejsce przy obliczaniu procentów od stu, tu jest niemożliwém, dla tego, że w mianowniku nie zachodzi 100, dzielenia zatém unikać nie można. W tym tylko razie, kiedy stopa mieści się w 100, otrzymujemy procent prościéj, dzieląc kapitał powiększony przez liczbę wskazującą, ile razy stopa mieści się w 100, zwiększoną o 1. Jeżeli bowiem $\frac{100}{s}=n$, ze wzoru $P=\frac{Ws}{(100+s)}$ wypada $P=\frac{W}{n+1}$.

Przykłady:

1) Jaki jest procent na sto od rsr. 1343.75 przy 7%?

$$\begin{array}{r|l} ? & 1343{,}75 \\ 107 & 7 \\ \cline{2-2} & 87{,}91 \text{ rs.} \end{array}$$

2) Jaki jest procent na sto od rs. 3685 przy 10%?

$$\begin{array}{r|l} ? & 3685 \\ 11\cancel{0} & 1\cancel{0} \\ \hline & 335 \text{ rs.} \end{array}$$

albo prościéj, ponieważ 10 zawiera się w stu 10 razy:

$$\begin{array}{l} 3685 : 11 \\ \hline 335 \end{array}$$

3) Funt towaru sprzedaje się po 45 kop. z zyskiem 25%, ile wynosi zysk na funcie? (Ob. przyk. 2 § 62).

Cena sprzedaży 45 kop. zawiera już w sobie zysk, odpowiada przeto kapitałowi zasadniczemu 125, zatém:

$$\begin{array}{r|l} ? & 45 \\ 125 & \underline{25} \\ & 9 \end{array}$$ albo, ponieważ 25 mieści się w 100 4 razy $\dfrac{45}{9} : 5$

4) Za towar wraz z kosztami, wynoszącemi $12\frac{1}{2}\%$, zapłacono 3131,44 rs., ile wynoszą koszta? (Ob. przyk. 3 § 62).

$$\dfrac{3131,44}{347,94} : 9$$

5) Ile wynosi $5\frac{1}{4}\%$ skonto na sto od ℳ 4774,14?

Rabat i skonto najczęściéj obliczają się od stu, w niektórych jednak miejscach w pewnych rodzajach handlu ustępstwa te obliczają się na sto.

$$\begin{array}{r|l} ? & 4774,15 \\ 105\frac{1}{4} & \underline{5\frac{1}{4}} \\ & 238,14. \end{array}$$

Z a d a n i a.

1. Obliczyć odsetki na sto: *a*) od rs. 8649 po 3%, *b*) od rs. 7540 po 4%, *c*) od ℳ 2546,75 po $6\frac{1}{4}\%$, *d*) fs. 1378,46 po $12\frac{1}{2}\%$, *e)* od fl. austr. 3596,48 po $16\frac{2}{3}\%$ *f*) od £ 70.6 sh. po $3\frac{1}{3}\%$.

2) Ze sprzedaży towarów osiągnięto: *a*) rs. 1250 *b*) fs. 300 *c*) ℳ 7620, *d*) £ 275.8 *s.*, *e*) fl. austr. 4000, *f*) fs. 4756,50, z zyskiem *a*) 5% *b*) $7\frac{1}{2}\%$ *c*) 4% *d*) $3\frac{3}{4}\%$, *e*) $8\frac{1}{3}\%$ *f*) 10%. Ile zyskauo na każdéj z tych przedaży?

3) Ile wynosi komisowe zawarte w następnych zapłatach: *a*) rs. 7645,19 po 3%, *b*) £ 152.6.5 d. po $1\frac{1}{2}\%$ *c*) fs. 1798,93 po $\frac{1}{8}\%$, *d*) ℳ 2340,25 po $1\frac{3}{4}\%$.

4) Ile wynosi rabat na sto *a*) od rs. 1015,46 po 5%, *b*) od fs. 857,75 po $6\frac{1}{4}\%$, *c*) od fl. austr. 748,20 c. po 10%, 5) od £ 18.8.10 d. po $7\frac{3}{4}\%$?

5) W pewném biurze podniesiono płace urzędników o 25%, tak że obecnie wynoszą *a*) rs. 500, *b*) rs. 750, *c*) rs. 1000 *d*) rs. 1250,

e) rs. 1340 i *f)* rs. 1400, ile wynosi podwyżka płacy każdego urzędnika?

6) W pewnéj gminie podniesiono podatki o $7\frac{1}{2}\%$, tak że obecnie wynoszą fs. 1343,75; o ile je podniesiono?

§ 68.

Dochodzenie kapitału czystego z kapitału powiększonego. Tu użyć możemy wzoru (2) § 66, którego pamiętanie zastąpić możemy proporcyą, albo też wynajdujemy, według § poprzedzającego, procenty na sto i odejmujemy takowe od danego kapitału powiększonego.

Przykłady:

1) Jaki kapitał przez dodanie $5\frac{1}{4}\%$ wzrósł do 4774,14 rs.? (Ob. przyk. 1 § 62).

$$\begin{array}{r|l} ? & 4774{,}14 \\ 105\frac{1}{4} & 100 \\ \hline & 4536 \text{ rs.} \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r|l} ? & 4774{,}14 \\ 105\frac{1}{4} & 5\frac{1}{4} \\ \hline & 238{,}14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4774{,}14 \\ \div \;\; 238{,}14 \\ \hline 4536 \text{ rs.} \end{array}$$

2) Po czemu płacono 1 funt towaru, jeżeli z zarobkiem 25% sprzedawano go po 45 kop. (ob. przyk. 2 § 62).

$$\begin{array}{r|l} ? & 45 \\ 5\;\cancel{125} & \cancel{100}\;4 \\ \hline & 36 \text{ kop.} \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \div 9 \\ \hline 36 \text{ kop.} \end{array} : 5$$

3) Ile kosztował towar, za który wraz z kosztami wynoszącemi $12\frac{1}{2}\%$ zapłacono rs. 3131,44? (Ob. przyk. 3 § 62).

$$\begin{array}{r|l} ? & 3131{,}44 \\ 9\;\cancel{112\frac{1}{2}} & \cancel{100}\;8 \\ \hline 9 & 25051{,}52 \\ \hline & 2783{,}50 \text{ rs.} \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r} 3131{,}44 \\ \div 12\frac{1}{2}\% \;\; 347{,}94 \\ \hline 2783{,}50 \text{ rs.} \end{array} : 9$$

W ogóle zatém przy stopach zawierających się w stu dogodniéj będzie poszukiwać procentu i odejmować od kapitału danego, w innych razach bezpośrednie dochodzenie kapitału czystego będzie korzystniejszém.

Zadania.

1) Jakie kapitały wzrosły do:

a) rs. 1720 przez dodanie $7^1/_2$%
b) „ 945 „ „ 5%
c) „ 4225 „ „ 10%

2) Ile zapłacono za towary sprzedane za:

a) rs. 1264,75 z zyskiem 8%
b) fs. 7561,81 „ $1^3/_4$%
c) ℳ 722 „ $6^1/_4$%
d) £ 1.19.6 „ $8^1/_2$%
f) fl. aust. 1130.85 „ 15%
g) \$ 385,80 „ 25%
h) ℳ 1672 „ $33^1/_3$%

3) Dwu kupców przedaje tenże sam towar za ℳ 600 z rabatem na sto 6% i za ℳ 611,28 z rabatem również na sto 8%, u którego taniéj?

3) Po wykończeniu bilansu z końcem roku okazuje się w pewném przedsiębierstwie dochód rs. 47550, co w porównaniu z rokiem zeszłym stanowi przewyżkę $8^1/_3$%; jaki był dochód zeszłoroczny?

4) Ile należy zapłacić za towary, których cena wynosi: a) rs. 5400, b) £ 240, c) ℳ 2335,94 d) fs. 2500, jeżeli otrzymujemy od tych cen rabaty na sto: a) $12^1/_2$%, b) $3^3/_4$%, c) 8% d) 10%.

§ 69.

Dochodzenie kapitału powiększonego z danéj odsetki i stopy procentowéj. Kapitał powiększony w tym razie danym jest przez wzór (3) § 66, który zresztą w każdym razie zastąpić można proporcyą. Można téż poszukiwać kapitału normalnego (§ 57) i do takowego dodać procent. W razie jednak, gdy stopa zawiera się bez reszty w 100, mamy, jeżeli $\frac{100}{s}=n$, ze wzoru (3) $W=P(n+1)$, t. j. w tym razie należy odsetkę pomnożyć przez liczbę wskazującą, ile razy stopa mieści się w 100, zwiększoną o 1, co zresztą wypływa bezpośrednio z prawidła na dochodzenie odsetki w podobnym przypadku (§ 67).

Przykłady:

1) Jeżeli otrzymano rs. 238,14 procentu po $5\frac{1}{4}\%$, ile wynosi kapitał wraz z procentem? (Ob. przyk. 1 § 68).

$$\begin{array}{r|l} ? & 238{,}14 \\ 5\frac{1}{4} & 105\frac{1}{4} \\ \hline & 4774{,}14 \text{ rs.} \end{array} \qquad \text{albo} \qquad \begin{array}{r|r} ? & 238{,}14 \\ 5\frac{1}{4} & 100 \\ \hline & 4536 \\ & 238{,}14 \\ \hline & 4774{,}14 \end{array}$$

2) Po ile sprzedawano 1 funt towaru, jeżeli zarabiając na przedaży 25%, miano na każdym funcie 9 kop. zysku? (Ob. przyk. 2 § 68)

$$\begin{array}{r|l} ? & 9 \\ 25 & 125 \\ \hline & 45 \text{ kop.} \end{array}$$

albo wprost, ponieważ 25 mieści się w 100 4 razy.

$$\begin{array}{c} 9 \times 5 \\ \hline 45 \text{ kop.} \end{array}$$

3) Ile zapłacono za towar wraz z kosztami $12\frac{1}{2}\%$, jeżeli takowe wynosiły rs. 347,94 (ob. przyk. 3 § 68).

$$\begin{array}{r} 347{,}94 \\ \hline 3131{,}46 \end{array} \times 9$$

Zadania.

1) Od jakich kapitałów procenty na 100 wynoszą *a)* 96 rs. po $12\frac{1}{2}\%$, *b)* ℳ 271 po 9%, *c)* rs. 8,15 po 25%?

2) Za ile sprzedano towary, jeżeli zyskując na nich *a)* 10% *b)* 15% *c)* $8\frac{1}{3}\%$ *d)* $4\frac{1}{2}\%$ zarobiono *a)* rs. 68,50 *b)* ℳ 587,25 *c)* sh. 19.7 *d)* fs. 12 64?

3) Ile przesłano komisyonerom na zapłacenie towaru i przypadającéj im prowizyi, jeżeli przy *a)* $1\frac{1}{2}$ *b)* $2\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{5}{8}\%$ prowizyi, policzyli jéj sobie *a)* £ 1.6.5 d. *b)* fs. 178,15 *c)* £ 8.9 d.

4) Wartość wywozu pewnego kraju powiększyła się od roku 1872 o fs. 3.450.000, co w porównaniu z owym rokiem stanowi $8\frac{1}{6}\%$ przyrostu, ile wynosi obecnie wartość wywozu?

5) Trzem urzędnikom podwyższono płace *a)* o $33\frac{1}{3}\%$ *b)* o 20% *c)* o 15%; podwyżki te czynią: *a)* 200 rs. *b)* 210 rs. *c)* 180 rs.; ile wynoszą obecnie ich płace?

§ 70.

Dochodzenie stopy procentowéj z danego kapitału powiększonego i procentu, lub z danego kapitału powiększonego i czystego polega na wzorach (5) i (6) § 66; w każdym jednak razie najdogodniéj z liczb danych wyprowadzić wartość kapitału czystego i odsetki i z tych danych, na zasadzie § 61, obliczyć stopę procentową.

Przykłady:

1. Kapitał 4536 rs. przez przyrost procentowy wzrósł do 4774,14; ile to czyni %?

kap. powięk. 4774,14	?	100	23814 : 453|6	
kap. czysty 4536	4536	238,14	113	5,25
procent 238,14		$5\frac{1}{4}$%	22	

2) Ile % wynoszą koszta handlowe, jeżeli w cenie rs. 3131,46 zapłaconéj za towar znajduje się tych kosztów rs. 347,94?

cena towaru z kosztami rs. 3131,46
koszta 347,94
2783,52

34794 : 2783,|52
696 12,5
139 $12\frac{1}{2}$%
0

Zadania.

1) Ile procentów zyskano, jeżeli towary kupione za *a*) fs. 7250 *b*) rs. 346,25 *c*) $ 76,80 *d*) ℳ 2640 sprzedano za *a*) fs. 7500, *b*) rs. 400 *c*) $ 80 *d*) ℳ 3260.

2) Ile procentów zyskano, jeżeli na cenach przedaży *a*) £ 3.5.6 d *b*) rs. 3445,60 *c*) fs. 24,75 *d*) ℳ 175,75 *e*) £ 3.15.8 d zarobiono *a*) sh. 1.8 d. *b*) rs. 750,80 *c*) fs. 3,50 *d*) ℳ 25 *e*) sh. 15.

3) Pewna droga żelazna przyniosła w ciągu 4 lat:

	dochód brutto	dochód netto
a)	fs. 4.850,365,75	fs. 2.345.760
b)	„ 5.125.460,41	„ 3.475.672,13
c)	„ 6.847.350	„ 4 260.750
d)	„ 11.121.413.95	„ 8.697.433$\frac{1}{3}$

ile % wynosiły koszta eksploatacyi téj drogi w każdém z tych czterech lat.

§ 71.

Odsetki w stu. W zadaniach tu należących występują znowu cztery wielkości, t. j. kapitał zmniejszony M, kapitał normalny K, odsetka P i stopa procentowa s. Gdy kapitały zmniejszone są proporcyonalne do procentów i do kapitałów normalnych (§ 62), mamy

$$\begin{array}{r|l} P & M \\ 100-s & s \end{array} \qquad \text{i} \qquad \begin{array}{r|l} K & M \\ 100-s & 100 \end{array}$$

zkąd

$$(1)\ P=\frac{Ms}{100-s}$$

$$(2)\ K=\frac{100\,M}{100-s}$$

a daléj

$$(3)\ M=\frac{P\,(100-s)}{s}$$

$$(4)\ M=\frac{K\,(100-s)}{100}$$

Z tychże wzorów wynalezione być mogą wartości na s, gdy dane są M i P albo M i K, co wszakże prościéj otrzymać ze wzoru $s=\frac{100P}{K}$ (§ 57), pamiętając, że $M=K-P$; zkąd

$$(5)\ s=\frac{100\ P}{M+P}$$

$$(6)\ s=\frac{100\,(K-M)}{K}$$

Wzory te stanowią 6 różnych zadań; zadanie jednak wskazane wzorem (4) było już rozbieraném w § 63.

§ 72.

Dochodzenie odsetek w stu. Podobnie jak przy obliczaniu procentów na sto nie są tu możliwe te ogólne ułatwienia, jakie zachodzą przy obliczaniu procentów od sta, należy tu przeto wykonać działania wskazane wzorem (1), do czego też prowadzi użycie proporcyi. Jeżeli jednak stopa mieści się w 100 bez reszty, dla znalezienia procentu dosyć jest kapitał zmniejszony podzielić przez liczbę wskazującą, ile razy stopa mieści się w 100, zmniejszoną o 1. Ze wzoru bowiem $P = \frac{100-s}{Ms}$, gdy $\frac{100}{s} = n$, wypływa $P = \frac{M}{n-1}$.

Przykłady:

1) Sprzedawszy towar za rs. 6308,19 straciliśmy 7%; ile wynosi strata? (Ob. przyk. 1 § 63).—Strata oblicza się od kapitału wyłożonego, czyli od ceny kupna, która zatém odpowiadać będzie kapitałowi zasadniczemu 100, dana przeto cena przedaży odpowiada kapitałowi zasadniczemu 93,—strata więc stanowi procent w stu.

?	6308,19
93	7
	474,81 rs.

2) Za towar pragniemy odebrać rs. 492,08; ile do ceny téj dodać, aby można ustąpić 10% rabatu od stu? (Ob. przyk. 2 § 63).

10% rabatu ustąpimy od ceny podwyższonéj, nam nieznanéj; za każde 100 tak oznaczonéj ceny odbierzemy tylko 90, cena przeto, którą chcemy odebrać, odpowiada zasadniczemu kapitałowi 90; powiemy zatém, o ile powiększyć kapitał rs. 492,98, jeżeli 90 powiększyć należy o 10.

?	492,08
90	10
	54,67

albo wprost $\frac{492{,}08}{54{,}67} : 9$

3) Zaciągający pożyczkę otrzymał rs. 624 po strąceniu $6\frac{1}{4}$%, ile rs. strącono?

$\frac{624}{26\text{ rs.}} : 24$ czyli

?	624
$93\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$
24	
	26 rs.

Zadania.

1) Obliczyć procenty w stu *a*) od rs. 670 po 5% *b*) od rs. 2486,75 po $4\frac{3}{4}$% *c*) od ℳ 4780 po 6% *d*) od fs. 2165 po 10%.

2) Dokonano przedaży za *a*) rs. 7000 *b*) $\mathcal{M}$ 745,50 *c*) fs. 140, *d*) £ 26.4s. i *e*) rs. 1743,32, na których stracono *a*) $7^3/_4\%$ *b*) $1^5/_6\%$ *c*) $12^1/_2\%$ *d*) $2^1/_2\%$ *e*) 4%, ile wynosi strata na każdéj z tych przedaży?

3) Za dług, na którym ustąpiono 25% zapłacono rs. 5640; ile wynosiła suma ustąpiona?

4) Towar waży netto funt. 7225, łut. 20, tara 9%: ile tara wynosi?

5) O ile podwyższyć ceny towarów, aby po ustąpieniu *a*) 10% *b*) 15% *c*) $8^1/_2\%$, *d*) 25% *e*) $33^1/_3\%$ rabatu, otrzymać *a*) rs. 660 *b*) fs. 2680 *c*) rs. 48,75 *d*) $\mathcal{M}$ 8 *e*) $\mathcal{M}$ 1640.

6) Wartość machin w fabryce, po odpisaniu 10% za zużycie przez rok, oznaczona jest w bilansie na rs. 73250; ile odpisano?

7) Z masy upadłości, z któréj wierzycielom wypłacono $25^3/_4\%$, odebrał ktoś rs. 7323,20; ile wynosiła jego strata?

§ 73.

Dochodzenie kapitału czystego (*normalnego*) *z kapitału zmniejszonego.* Kapitał czysty znaleźć możemy albo bezpośrednio ze wzoru (2) § 71, do czego też dojść możemy za pomocą proporcyi, albo też według § poprzedzającego, wyszukujemy odsetkę i takową do danego kapitału zmniejszonego dodajemy.

Przykłady:

1) Ile kosztował towar przedany za rs. 6308,19 ze stratą 7% (ob. przyk. 1 § 72).

$$\begin{array}{r|l} ? & 6308,19 \\ 93 & 100 \\ \hline & 6783 \end{array} \qquad \text{albo} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 6308,19 \\ 93 & 7 \\ \hline & 474,81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6308,19 \\ 474,81 \\ \hline 6783 \text{ rs.} \end{array}$$

2) Jaką cenę oznaczyć za towar, aby po ustąpieniu 10% odebrać zań rs. 492,08 (ob. przyk. 2 § 72).

$$\begin{array}{r|l} ? & 492,08 \\ 90 & 100 \\ \hline & 546,76 \text{ rs.} \end{array} \qquad \text{albo} \qquad \begin{array}{r} 492,08 \\ 54,67 \\ \hline 546,75 \text{ rs.} \end{array} : 9$$

Zadania.

1) Jakie kapitały po strąceniu *a*) $7^1/_2\%$, *b*) $12^1/_2\%$ *c*) 25% *d*) 15% zmniejszyły się na *a*) rs. 368,25, *b*) fs. 4963 *c*) fs. 816 *d*) £ 7.3.6 d?

2) Ile kosztowały towary przedane ze stratą *a)* $1\frac{1}{4}$% *b)* $3\frac{1}{3}$% *c)* $6\frac{1}{4}$% *d)* 5% za *a)* rs. 672 *b)* $ 18 *c)* ℳ 1086 *d)* fs. 720?

3) Jakie ceny oznaczyć za towary, aby po ustąpieniu *a)* 3% *b)* $12\frac{1}{2}$% *c)* 25% *d)* 13% odebrać *a)* rs. 400 *b)* rs. 5600 *c)* ℳ 6,30 *d)* fs. 475?

4) Po ustąpieniu od pewnego kapitału 12% sconto odebrano rs 613; jaki to był kapitał?

5) Dom przynosi czystego dochodu rs. 1044,76, jaki jest dochód brutto, jeżeli podatki i inne koszta wynoszą $43\frac{1}{5}$%?

6) Po odpisaniu od szacunku ruchomości w pewnym zakładzie 10%, wynosi on obecnie rs. 3091,50; ile wynosił roku zeszłego?

§ 74

Dochodzenie kapitału zmniejszonego z danéj odsetki i stopy procentowéj wskazane jest wzorem (3) § 71, co zresztą otrzymać można za pomocą proporcyi. Można téż szukać kapitału normalnego i od niego odejmować dany procent. Jeżeli jednak stopa mieści się w stu, dosyć jest procent pomnożyć przez liczbę wskazującą, ile razy stopa zawiera się w stu, zmniejszoną o jedność, bo ze wzoru (3), gdy $\frac{100}{s}=n$, wypada $M=P\ (n-1)$.

Przykłady:

1) Na sprzedaży towaru stracono rs. 474,81, co czyni 7%; za ile go sprzedano? (Ob. przyk. 1 § 73).

$$\begin{array}{r|l} ? & 474,81 \\ 7 & 93 \\ \hline & 6308,19 \text{ rs.} \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r|l} ? & 474,81 \\ 7 & 100 \\ \hline & 6783 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6783 \\ \div\ 474,81 \\ \hline 6308,19 \end{array}$$

2) Ile odebrano ze sprzedaży towaru, na cenie którego, przy 10% rabatu od stu, ustąpiono rs. 54,67? (Ob. przyk. 2 § 73).

$$\begin{array}{r|l} ? & 54,67 \\ 10 & 90 \\ \hline & 492,03 \end{array} \quad \text{albo wprost} \quad \begin{array}{r} 54,67 \\ \hline 492,03 \end{array} \times 9$$

Z a d a n i a.

1) Od jakich kapitałów procenty w stu wynoszą *a)* rs. 672 przy $4\frac{3}{4}$% *b)* fs. 840 przy $12\frac{1}{4}$ *c)* rs. 87,20 przy 5% *d)* ℳ 17,50 przy $8\frac{1}{3}$%?

2) Za ile sprzedano towary, jeżeli przy stracie *a*) $12\frac{1}{2}\%$ *b*) $1\frac{1}{2}\%$, *c*) $16\frac{2}{3}\%$ *d*) 4% stracono *a*) 63 rs. *b*) £ 1.6d. *c*) fs. 50, *d*) rs. 72.96?

3) Ile odebrano za towary, jeżeli udzielając na nich rabatu *a*) $3\frac{1}{3}\%$ *b*) $8\frac{1}{3}\%$ *c*) 25% *d*) 15%, ustąpiono przy sprzedaży *a*) rs. 568 *b*) fs. 1430 *c*) ℳ 12,60 *d*) £ 6.8 sh.?

4) Na ile oznaczono w bilansie wartość ruchomości, jeżeli po odpisaniu na zużycie 10% zniżono ich szacunek o rs. 343,50?

5) Ktoś pożycza pieniądze na 12% i z pożyczki strąca rs. 81,60 procentu; ile wypłacił pożyczającemu?

?) Jeżeli podatki płacone z domu w ilości $37\frac{1}{2}\%$ wynoszą rs. 3862,75, jaki jest czysty dochód z tego domu?

7) Tara 9% wynosi 468 funt., jaka jest waga netto towaru?

§ 75.

Dochodzenie stopy procentowéj z danego kapitału zmniejszonego i procentu, lub z kapitału zmniejszonego i czystego, wskazaném jest wzorami (5) i (6) § 71; lepiéj jest jednak sprowadzać zadania te do wynajdywania stopy z kapitału czystego i procentu.

Przykłady:

1) Na towarze przedanym za rs. 6308,19 stracono rs. 474,81; ile to wynosi %?

kapitał zmniejszony	6308,19
procent	474,81
kapitał czysty	6783,00

?	100
6783	474,81
	7%

2) Waga towaru brutto wynosi 7567 funt., netto 7370 funt.; ile % strącono na tarę?

waga brutto 7567 funt.	?	100		19700	7567
„ netto 7370 „	7567	197		457	2,60
tara 197 funt.		$2\frac{3}{5}\%$ około		3	

Zadania.

1) Na sprzedaży przy stracie rs. 200 odebrano rs. 752,45; ile stracono %?

2) Waga towaru netto wynosi 6732 funt., tara 68 funt., ile % takowa wynosi?

3) Towarzystwo akcyjne odpisuje od szacunku swych efektów rs. 345000 i oznacza go na ten rok w bilansie na rs. 2,452,360,—ile procentów zeszłorocznego szacunku odpisano?

4) Stan czynny pewnego przedsiębierstwa wynosił z końcem r. 1876 rs. 584.572,45, z końcem r. 1877 rs. 344.875,32½; ile % wynosi strata?

5) Za towar, na którym ustąpiono fs. 66,67 zapłacono 600 fs. ile % wynosi rabat?

6) Od ubezpieczenia ruchomości oszacowanych na rs. 6340 opłacono premiję rs. 15,85, ile ‰ pobiera towarzystwo ubezpieczeń?

7) Towary kupione za *a*) rs. 1,84 *b*) £ 3478 *c*) ℳ 50 *d*) fs. 52,26 sprzedano za *a*) rs. 1,50 *b*) £ 2500 *c*) ℳ 44 *d*) fs. 50; ile % wynosi strata na każdéj z tych sprzedaży?

§ 76.

Zamiana stopy procentowéj. Naukę o procentach na sto i w stu zakończymy wyjaśnieniem, jak daną stopę procentową od stu zamienić na odpowiednią jéj stopę na stu i w stu i nawzajem. Aby zadanie to rozwiązać w ogólności, oznaczmy stopę od stu przez p, odpowiadającą jéj stopę na sto przez q, a w stu przez r; mamy wtedy

$$\begin{array}{r|l} q & 100+q \\ 100 & p \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{r|l} r & 100-r \\ 100 & p \end{array}$$

zkąd:

$$(1)\ q=\frac{100\,p}{100-p} \qquad (2)\ r=\frac{100\,p}{100+p}$$

$$(3)\ p=\frac{100\,q}{100+q} \qquad (4)\ p=\frac{100\,r}{100-r}$$

Ze wzorów (3) i (4) albo też wprost z proporcyi:

$$\begin{array}{r|l} q & 100+q \\ 100-r & r \\ & \end{array}$$

wypada

$$(5)\ q = \frac{100\,r}{100-2r}$$

$$(6)\ r = \frac{100\,q}{100+2q}$$

które to dwa wzory służą do zamiany stopy w stu na stopę na sto i nawzajem.

Rozumie się, że zamiast pamiętania tych wzorów dogodniéj będzie w każdym razie używać proporcyi.

Przykłady:

1) Stopę 4% od sta zamienić na stopę na sto i w stu.

$$\begin{array}{r|l} x & 100+x \\ 100 & 4 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 100-x \\ 100 & 4 \\ & \end{array}$$

Dla rozwiązania tych proporcyj najdogodniéj wprowadzić do nich znaną przemianę (§ 62, odsyłacz).

$$\begin{array}{r|l} x & 100 \\ 96 & 4 \\ \hline & 4\,^1/_6\% \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 100 \\ 104 & 4 \\ \hline & 3\,^{11}/_{13} \end{array}$$

Przy obliczeniach zatem procentowych stopa 4 od stu znaczy tyleż, co stopa $4\,^1/_6$ na sto lub $3\,^{11}/_{13}$ w stu.

Dla sprawdzenia obliczmy procenty od kapitału rs. 750 przy 4% od sta, $4\,^1/_6$ na sto i $3\,^{11}/_{13}$ w stu:

$a)$ . . . . 750 rs.
4% . . . 30 rs.

$$b)\ \begin{array}{r|l} ? & 750 \\ 104\,^1/_6 & 4\,^1/_6 \\ \hline & 30 \text{ rs.} \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r|l} ? & 750 \\ 96\,^2/_{13} & 3\,^{11}/_{13} \\ \hline & 30 \text{ rs.} \end{array}$$

Zamieńmy teraz znalezione stopy $4\,^1/_6\%$ na sto i $3\,^{11}/_{12}$ w stu na stopy od stu.

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 104\,^1/_6 & 4\,^1/_6 \\ \hline & 4\% \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 96\,^2/_{13} & 3\,^{11}/_{13} \\ \hline & 4\% \end{array}$$

Nakoniec zamieńmy jeszcze stopę $4\,^1/_6\%$ na sto na stopę w stu i stopę $3\,^{11}/_{13}$ w stu na stopę na sto.

$$\begin{array}{r|l} x & 100-x \\ 104\,^1/_6 & 4\,^1/_6 \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 100+x \\ 96\,^2/_{13} & 3\,^{11}/_{13} \\ \hline & \end{array}$$

zkąd:

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 108\frac{1}{3} & 4\frac{1}{6} \\ \hline & 3\frac{11}{13}\% \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 92\frac{4}{13} & 3\frac{11}{13} \\ \hline & 4\frac{1}{6}\% \end{array}$$

Widzimy z tego, że z pomiędzy stóp jednoznacznych stopa na sto jest największą, stopa w stu najmniejszą.

Zadanie to zresztą ma w ogóle niewielką wartość praktyczną; najczęściéj jeszcze nadarza się przy zamianie rabatu na sto na rabat od sta.

2) Rabat $33\frac{1}{3}\%$ na sto jakiemu odpowiada rabatowi od stu?

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 133\frac{1}{3} & 33\frac{1}{3} \\ \hline & 25\% \end{array}$$

W istocie od rs. 6380 np. rabat $33\frac{1}{3}\%$ na sto zarówno jak rabat 25% od sta wynosi rs. 6380 : 41, t. j. rs. 1595.

3) Rabat 20% w stu jakiemu odpowiada rabatowi od stu?

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 80 & 20 \\ \hline & 25\% \end{array}$$

4) Rabat 25% od stu jakiemu odpowiada rabatowi na sto i w stu?

$$\begin{array}{r|l} & 100+x \\ x & 25 \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 100-x \\ 100 & 20 \\ \hline & \end{array}$$

czyli:

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 75 & 25 \\ \hline & 33\frac{1}{3}\% \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 125 & 25 \\ \hline & 20\% \end{array}$$

5) Rabat $33\frac{1}{3}\%$ na sto zamienić na rabat w stu:

$$\begin{array}{r|l} x & 100-x \\ 133\frac{1}{3} & 33\frac{1}{3} \\ & \end{array} \text{ czyli, postępując jak wyżéj } \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 166\frac{2}{3} & 33\frac{1}{3} \\ \hline & 20 \end{array}$$

6) Rabat 20% w stu zamienić na rabat na sto:

$$\begin{array}{r|l} x & 100+x \\ 80 & 20 \\ & \end{array} \text{ czyli } \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 60 & 20 \\ \hline & 33\frac{1}{3}\% \end{array}$$

Z zadań zatém powyższych wypada, że rabat 25% od stu znaczy tyleż, co rabat $33\frac{1}{3}\%$ na sto albo 20% w stu, o czém nietrudno przekonać się na jakiejkolwiek cenie towaru.

7) Zyskując 10% na cenie kupna, ile zarabiamy na cenie przedaży?

Oznaczywszy cenę kupna przez 100, mamy, z powodu 10% zysku, odpowiednią cenę przedaży 110, a pytamy, ile zarabiamy na każdych 100 téj ceny przedaży (zamieniamy tu przeto procent na sto na procent od stu):

$$\begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 110 & 10 \\ \hline & 9\frac{1}{11}\% \end{array}$$

8) Zyskując $9\frac{1}{11}\%$ na cenie przedaży, ile zarabiamy istotnie (t. j. na cenie kupna)?

Oznaczywszy przez x zysk osiągnięty przy przedaży na każdych 100 ceny kupna, widzimy, że każdym 100 ceny kupna odpowiada $100+x$ ceny przedaży, na których zarabiamy x, a że na 100 ceny przedaży zarabiamy $9\frac{1}{11}$, przeto zamieniamy procent od stu na procent na sto.

$$\begin{array}{r|l} x & 100+x \\ .100 & 9\frac{1}{11} \\ & \end{array} \quad \text{czyli} \quad \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 90\frac{10}{11} & 9\frac{1}{11} \\ \hline & 10\% \end{array}$$

Że rzeczywiście zarobek 10% na cenie kupna znaczy toż samo, co zarobek $9\frac{1}{11}\%$ na cenie przedaży, łatwo się przekonać. Dajmy, żc towar kosztujc nas rs. 680, wtedy, mając na nim 10% zysku, t. j. rs. 68, przedajemy go za rs. 748, a $9\frac{1}{11}\%$ téj ceny stanowi znowu rs. 68.

Rozwiązanie zadania 4 uczy nas zresztą, że zamiana procentu od stu na procent na sto wychodzi na zamianę procentu w stu na procent od sta, a zamiana procentu od sta na procent w stu znaczy toż samo, co zamiana procentu na sto na procent od stu,—co może ułatwiać rozwiązywanie tych zadań.

Zadania.

1) 5%, 6%, $3\frac{1}{2}\%$ na sto ile czynią % od stu i w stu?

2) 5%, 6%, $3\frac{1}{2}\%$ w stu ile czynią % od stu i na sto?

3) 5%, 6%, $3\frac{1}{2}\%$ od sta ile czynią % na stu i w stu?

4) Cena sprzedaży towaru wynosi rs. 548.50 z rabatem 5% od sta; jaką cenę oznaczyć, aby można było ustąpić 6% na sto i 4% w stu?

5) Sprzedawano dotąd towar po £ 3.10 sh. z rabatem 3% na sto; jaką oznaczyć cenę, aby można ustępować rabat $2\frac{1}{2}\%$ od sta i 2% w stu?

6) Z rabatów $4\frac{1}{2}\%$ na sto, $4\frac{1}{3}\%$ od sta i $4\frac{1}{6}\%$ w stu, który jest najkorzystniejszym dla przedającego i kupującego?

7) Jeżeli zyskujemy 20% na cenie kupna, ile zyskujemy na cenie przedaży?

8) Jeżeli zyskujemy 15% na cenie przedaży, ile zyskujemy istotnie (na cenie kupna)?

9) Jeżeli tracimy 5% na cenie kupna, ile tracimy na cenie przedaży?

10) Jeżeli tracimy $7\frac{1}{2}\%$ na cenie przedaży, ile tracimy istotnie?

§ 77.

Różne przykłady. Dla dokładniejszego poznania powyższych zasad, przerobimy jeszcze kilka zadań.

1) Sprzedając funt towaru po rs. 3,60, stracilibyśmy 10%; po ile go przedawać aby zarobić 5%?

Cena sprzedaży	rs. 3,60	: 9
strata 10% (w stu)	„ 40	
cena kupna	rs. 4	
zysk żądany 5% (od stu)	„ 20	
szukana cena przedaży	rs. 4,20	

Albo też, ponieważ cena dana odpowiada kapitałowi zasadniczemu 90, cena szukana podobnemuż kapitałowi 105:

?	3,60
90	105
	4,20 rs.

2) Sprzedając towar po 27 rs. za pud, zyskujemy 8%; ile % zyskamy, jeżeli otrzymamy za pud po 28 rs.

Cena przedaży	27 rs.
8% zysku (na sto)	2 „
cena kupna	25 rs.
nowa cena sprzedaży	28 „
zysk	3 rs.

?	27
108	8
	2

na 25 rs. przeto zyskujemy 3 rs., zatém na 100 rs. 12 rs., t. j. w ogóle 12%.

Albo też, ponieważ dana cena odpowiada kapitałowi zasadniczemu 108, jakiemu kapitałowi odpowiadać będzie cena 28 rs?

?	28
27	108
	112

A że w tak znalezionéj liczbie 112, 100 stanowi cenę kupna, przeto na każdych 100 zyskujemy 12, t. j. 12%.

3) Kupując listy likwidacyjne Królestwa Polskiego po kursie 86,15 rs., jaki mamy procent od wyłożonego kapitału?

Kurs 86,15 rs. znaczy cenę listu likwidacyjnego nominalnéj wartości 100 rs., a że listy likw. są 4%, t. j. przynoszą 4 rs. od każdych 100 rs. wartości nominalnéj, przeto pobierać będziemy rzeczywiście 4 rs. od każdych wyłożonych 86,15 rs., a że pytamy o stopę procentową, przeto

?	100
86,15	4
	4,64, t. j. około $4^2/_3$%.

4) Kupujemy towar po rs. 18 kop. 50; jaką zań cenę oznaczyć, aby po ustąpieniu 10% rabatu od stu, mieć 12% zysku?

Cena kupna	18,50 rs.	
żądany zysk (12% od sta) 10% . . .	1,85 „	
2% . . .	37 „	
Cena kupna wraz z zyskiem . . .	20,72 rs.	: 9
10% rabatu (10% w stu, § 72) . . .	2,30 „	
cena szukana	23,02 rs.	

Albo

?	18,50
100	112
90	100
	23,02 rs.

5) Koszta przewozu towaru wynoszą $7\frac{1}{2}$%, zysk zamierzony 16%, a rabat, który będzie trzeba ustępować nabywcom, $12\frac{1}{2}$% od stu. O ile % podnieść należy cenę kupna towaru, aby pokryć koszta, zysk i rabat?

Cena towaru	100	
koszta $7\frac{1}{2}$%	$7\frac{1}{2}$	
	107,5	
zysk . . . . . . 10% . . .	10,75	
6% . . .	6,45	
	124,7	
rabat $12\frac{1}{2}$% (w stu)	17,8	: 7
	142,5	

Za każde 100 przeto żądać należy $142\frac{1}{2}$ (prawie), zatem cenę podnieść należy o $42\frac{1}{2}$%,—o czém przekonać się można na jakiéjkolwiek cenie towaru.

Albo téż:

?	100
100	$107\frac{1}{2}$
100	116
$87\frac{1}{2}$	100
	142,5

6) Ile kosztował w Warszawie towar przedany w Lublinie za rs. 1544,40, w któréj to cenie zawartych jest $12\frac{1}{2}$% kosztów i 10% zysku? (Ob. przyk. 1 § 64).

	1544,40	: 11
$\div 10\%$ (na sto	140,40	
	1404	: 9
$\div 12\frac{1}{2}\%$ (na sto)	156	
	1248 rs.	

albo

?	1544,40
110	100
9 $\cancel{112\frac{1}{2}}$	$\cancel{100}$ 8
	1248 rs.

7) Ile ważył brutto towar, za który po strąceniu $1\frac{1}{2}\%$ nawagi i $6\frac{1}{2}\%$ tary zapłacono za 21514 funtów? (Ob. przyk. 2 § 64).

	21514 funt.
$+6\frac{1}{2}\%$ (w stu)	1495,6
	23009,6
$+1\frac{1}{2}\%$ (w stu)	350,4
	23360

albo

?	21514
$93\frac{1}{2}$	100
$98\frac{1}{2}$	100
	23360

8) Ile kosztował towar przedany za rs. 671,84 ze stratą 5%, jeżeli komisowe przy kupnie wynosiło 4% (ob. przyk. 3 § 64).

	671,84	: 19
$+5\%$ (w stu)	35,36	
	707,20	: 26
$\div 4\%$ (na sto)	27,20	
	680 rs.	

albo

?	671,84
95	100
104	100
	671,84

9) Za kupione w Hamburgu 23360 funtów bawełny oznaczono w Warszawie na sprzedaż cenę rs. 5692,70, w której doliczono 10% zysku. Po czemu płacono funt bawełny w Hamburgu, jeżeli tam otrzymano $\frac{1}{2}\%$ nawagi, 4% tary, 1% dekortu, koszta zaś wynosiły $16\frac{2}{3}\%$? Płacono po kursie rs. $128,17\frac{1}{2}$ za 300 ℳ.

Aby zadanie to rozwiązać najpierw za pomocą układu łańcuchowego, uważmy, że cena w Warszawie oznaczona daje około 24 kop. za funt, a że w cenie téj policzone są koszta przewozu i zysk, niezawodna więc, że cena funta w Hamburgu będzie o wiele niższą od 1 ℳ, ażeby przeto znaleźć cenę 1 funta w ϑ, dosyć będzie szukać trzech cyfr najwyższych.

?	1
$99\frac{1}{2}$	100 (nawaga)
96	100 (tara)
23360	5692,70
110	100 (zysk)
$116\frac{2}{3}$	100 (koszta)
128,175	300
99	100 (dekort)
	47 ϑ.

dzielna	*dzielnik*	
5692,70 × 3	995 × 96	171 : 361 = 47,3
171	896	266
	59	13
	955 × 2336	2
	191	
	29	
	3	
	223 × 11	
	245 × 116,66	
	25	
	14	
	1	
	285 × 128,175	
	57	
	22	
	364 × 99	
	328	
	33	
	361	

Nawaga, tara i dekort wpłynęły na zniżenie ceny oznaczonéj w Warszawie; przy dochodzeniu zatém ceny pierwotnéj mają wpływ na powiększenie szukanéj odpowiedzi i dla tego liczby większe piszemy tu po prawéj stronie linijki.

Rozwiążmy jeszcze to zadanie bez użycia układu łańcuchowego

cena dana	5692,70 rs.	: 11
÷10% zysku (na sto) . . .	517,52	
	5175,18	7
÷$16^2/_3$% kosztów (na sto) .	739,31	
	4435,87 rs.	× 300
	1330761 : 128,175 = 10382,47 M	
	49011	
	10569	
	315	
	59	
	8	

$$\begin{array}{rl}
 & 10382,47\ \mathcal{M} \\
+1\%\ \text{dek. (w stu)} & (1153,61) \quad : 99\ (9.\ 11) \\
 & \underline{104,87} \\
 & 10487,34\ \mathcal{M} \\
+4\%\ \text{tary (w stu)} & (1747,89) \quad : 24\ (6.\ 4) \\
 & \underline{436,97} \\
 & 10924,31\ \mathcal{M} \\
+\frac{1}{2}\%\ \text{naw. (w stu)} & \underline{54,89} \quad : 199 \\
 & 10979,20 : 23360 \\
 & \underline{163} \qquad 0,47\ \mathcal{M} \\
 & 0
\end{array}$$

Można też było tarę i nawagę, jako ustępstwa na wadze, strącić od 23360 funt., t. j.

$$\begin{array}{lr}
 & 23360 \\
\div\frac{1}{2}\ \text{naw. (od stu)} & \underline{116,8} \\
 & 23243,2 \\
\div 4\%\ \text{tary (od stu)} & \underline{929,7} \\
 & 22313,5
\end{array}$$

rzeczywiście więc zapłaciliśmy za 22313,5 funt. 10487,34 $\mathcal{M}$, zatém za 1 funt

$$\begin{array}{l}
10487,34 : 223|13,5 \\
\qquad\qquad 0,47\ \mathcal{M}
\end{array}$$

Całe to postępowanie zresztą znaczniéby się uprościło, gdybyśmy rozpoczęli od znalezienia ceny 1 funta w rublach, w ten sposób jednak zachowaliśmy rozwiązanie przykładu 4 § 64, z którego przykład ten przez odwrócenie wyprowadzonym został. Najlepiéj też w ogólności zrozumieć można znaczenie procentów w stu i na sto przez podobne odwracanie zadań, jakiegośmy tu użyli dla zadań § 64. Dla tego téż polecamy uczącym się wyprowadzić zadania odwrotne z zadań § 64, jako téż i z następnych, co zarazem stanowić będzie sprawdzenie roboty.

10) Cetnar łoju sprowadzonego z Warszawy sprzedawanym był w Berlinie ze stratą 5% po 54 $\mathcal{M}$; ile kosztował pud w Warszawie, jeżeli koszta kupna i sprowadzenia do Berlina wynosiły $10\frac{1}{2}\%$, a za 100 rs. płacono 215 $\mathcal{M}$? (1 pud=33 funt. niem.).

Łatwo dostrzedz, że cena puda wyrazi się tylko w jednostkach rubli, szukać przeto będziemy 4 cyfr.

?	33
100	54
95	100
$110\frac{1}{2}$	100
215	100
	7,89 rs.

54×33
162
1782

1782 : 2258
2014 7,892 rs.
208
5

95×1105
55
1050×215
108
2258

Albo:

cena 1 cetn. . . . . 54 ℳ
+strata 5% (w stu) . . . 2,84 : 19
56,84
—koszta 10% (na sto) 5,40
51,44
: 2,15
23,93 rs.
cena 1 funta 0,2393
$\times 33$
2,632
cena 1 puda . . . . . 7,89 rs.

Zadanie odwrotne. Pud łoju w Warszawie kosztował rs. 7,89, po ile ℳ sprzedawanym był 1 cetnar w Berlinie, jeżeli koszta kupna i przewozu wynosiły $10\frac{1}{2}$%, a na sprzedaży stracono 5%.

?	100
33	7,89
100	215
100	$110\frac{1}{2}$
100	95

789×215
1578
39
1696×1105
170
8
1874×95
94
1780 : 33 (3. 11)
5933
53,94 ℳ

Albo

cena 1 puda . . . . 7,89 rs.
$\times 2,15$
„ „ . . . . . . 16,964 ℳ
5654 : 33
„ 1 cet. niem. . . . . . 51,40 ℳ
+$10\frac{1}{2}$% kosztów 5,14
26
56,80
—5% straty 2,84
53,96 ℳ

Drobna niezgodność z ceną daną w poprzedniém zadaniu 54 ℳ pochodzi z odrzucenia ułamku kopiejki.

Jeżeli koszta przewozu, cło i t. p. koszta podane są nieprocentowo, a w istotnéj wysokości, w takim razie nie mogą być wprowadzone w układ łańcuchowy, ale winny być oddzielnie doliczane.

Zadania

1. Cena przedaży rs. 19,75, zysk 6%; jaki zysk?

2. Cena przedaży 21 kop., strata 16%; jaka strata?

3. Sprzedając towar po 45 rs., traciliśmy 15%, jaką cenę zań oznaczyć, aby tyleż % zarobić?

4. Towar przedawanym był po 15 rs. ze stratą 10%; po ile byłby przedawanym, gdyby musiano jeszcze dalszych 20% tracić?

5. Towar przedaje się po rs. 25 z zyskiem 10%; po ile go przedawać, aby zarobić o $7\frac{1}{2}$% więcéj?

6. Sprzedając towar po rs. 3,75, zarabiamy 25%; po ile moglibyśmy go przedawać bez straty?

7. Sprzedawszy towar za rs. 2464,50, pokryliśmy $3\frac{3}{5}$% kosztów i otrzymaliśmy 18% zysku; za ileśmy go kupili?

8. Towar wraz ze wszystkiemi kosztami wypada po rs. 6,45; jaką cenę zań oznaczyć, aby po ustąpieniu 15% rabatu (od stu) mieć jeszcze 15% zysku?

9. Towar przedawanym był dotąd po rs. 5,75 z rabatem 4% na sto; jaką cenę oznaczyć, aby można było ustępować 5% od stu?

10. Z towaru ważącego $1213\frac{1}{2}$ funt. zepsuło się $112\frac{1}{2}$ funt.; ile % wynosi ta strata i po ile przedawać należy funt, jeżeli zarobić chcemy 15%, a towar kosztował rs. 624,45?

11. Ktoś płaci roczną premiję $2\frac{1}{4}$‰ £ 25.13 sh., na jaką sumę jest ubezpieczonym?

12. Przy 12% straty tracimy na funcie $16\frac{1}{2}$ kop.; po ile przedawać funt, aby zarobić $6\frac{2}{3}$%?

13) Ile zapłaci się za *a*) 7860 kgr. po fs 21,50 z 2% rabatu (od stu), *b*) 5 Cwt. 2 Q. 20 funt. po 4 sh. 8 d. za funt z $2\frac{1}{2}$% rabatu (na 100), *c*) za 6475 funt. po ℳ 24,75 za 100 funt. z $1\frac{1}{2}$% dekortu (w stu)?

14. Za partyę towaru, na której udzielono 10% sconto, zapłacono $\mathcal{M}$ 2632,50; na ile $\mathcal{M}$ takowa była ocenioną?

16. Po pewnym czasie ma ktoś do zapłacenia 342 rs., przyjęto jednak od niego natychmiast 300 rs., ile % mu ustąpiono (na sto)?

16. Komisyoner w Hamburgu kupuje na zlecenie kupca warszawskiego 26 cetnarów kawy po 93 $\mathcal{M}$; otrzymuje tam $\frac{1}{2}$% nawagi i 1% tary; jeżeli więc nadsyła rachunek na 2490,05, ile % policzył sobie prowizyi?

17) Ile % zarabia kupiec, jeżeli towar nabyty po rs. 6,25 przedaje po rs. 8, a koszta sprowadzenia wynoszą 10%?

18) Wydawca udziela na dziele, kosztującém rs. 2,25 na 12 egzemplarzach jeden bezpłatnie; ile % udziela rabatu i jaka jest cena netto?

19) Cena towaru oznaczona jest na £ 120.10.3 d., jak się ustanowi, jeżeli mamy udzielić 5% rabatu (od sta)?

20. Zamierzamy przedawać towar po rs. 17,50 k., po ile go kupować, jeżeli chcemy zarobić 10% a koszta wynoszą 12$\frac{1}{2}$%?

22) Listy likwidacyjne (4%) Król. Polskiego płacą się po 85,25, listy zastawne miasta Warszawy (5%) po 92 (za 100); ile istotnie % przynosi każdy z tych papierów, po powyższym kursie nabywany?

23. Jak się procentuje pożyczka premijowa rosyjska (5%) nabywana po kursie 235 (za sto)?

24. Komisyoner, pobierający 1$\frac{1}{2}$% delcredere, miał z tego $\mathcal{M}$ 2187,35, dochodu w ciągu roku: na jeděm poręczeniu stracił jednak $\mathcal{M}$ 1800. Za jaką sumę poręczył, ile % takowéj wynosi strata i ile % pozostało mu istotnego zysku po odciągnięciu straty?

25. Jaką cenę ma oznaczyć kupiec za towar, który jego samego kosztuje po rs. 26, jeżeli oprócz 12% zysku chce pokryć 3% straty na procencie przez kilkomiesięczne trzymanie towaru, jeżeli nadto udzielać zamierza 5% rabatu (od stu) a ajent pośredniczący przy przedaży pobiera 2% komisowego (od ceny przedaży)?

26. 360 funt. kawy po wypaleniu ważą tylko 304 funt.; ile % wynosi strata?

27. Przy 5% zysku łokieć sprzedaje się po 21 kop., po ile przy 12$\frac{1}{2}$% zysku?

28. Przy sprzedaży towaru po 36 kop. zarabiamy 12$\frac{1}{2}$%; ile % zarabiamy, jeżeli go sprzedajemy po 34 i po 40 kop.?

29. Ile tracimy u niewypłatnego kupca, od którego należy nam się za towary rs. 763,25, jeżeli od téj należności ustępujemy 40%, a na cenie przedaży mieliśmy 15% zysku.

30. Ile % zarabia kupiec, jeżeli funt towaru kosztujący go po 38 kop. sprzedaje po 45 kop. z rabatem $12\frac{1}{2}$% (od sta)?

31. Na sprzedaży towaru zarobić chcemy 8% i pokryć 2% straty na procentach; nadto udzielić chcemy 5% rabatu (od stu), komisowe zaś przy sprzedaży także wynosi 5% (od ceny sprzedaży). Ile % do ceny kupna dodać należy, aby dojść do żądanego rezultatu?

32. Jeden i ten sam towar kosztuje u A 46 ℳ z 10% rabatu, u B 43,50 ℳ z 2% rabatu, u kogo taniéj?

33. Z powodu uszkodzenia towaru ustępuje kupiec 10% ceny oznaczonéj na sprzedaż, w któréj mamy tyleż % zysku; czy traci się tu tylko zysk, czy téż zachodzi istotna strata, i ile % takowa wynosi?

33. W cenie oznaczonéj na sprzedaż jest 15% zysku; ile % rabatu (od stu) ustąpić możemy, aby towar przedawać bez straty.

34. $33\frac{1}{3}$% rabatu od stu i na sto ile wynoszą % od ceny istotnie płaconéj?

35. Ajent pobierający $\frac{1}{2}$‰ kurtażu miał w ciągu jednego roku rs. 1407,35, w ciągu następnego rs. 2116,06; ile wynosiły tranzakcye handlowe, zawarte przez jego pośrednictwo?

36. Po ile rs. kupować należy pud towaru, jeżeli funt zamierzamy sprzedawać po 46 kop. z zyskiem 10%, koszta zaś kupna, dostawy i t. d. tego towaru wynoszą $6\frac{1}{2}$%?

37. Po ile fs. kupować możemy w Paryżu kgr. towaru, którego funt w Warszawie przedawać zamierzamy po rs. 2,30 z zyskiem 15% i rabatem 5% (od stu). Koszta zaś kupna, przewozu i t. d. wynoszą $22\frac{1}{2}$%? (1 funt=509,5174 gr., za 300 fr. płaci się rs. 108,24).

38. Yard materyi wełnianéj francuskiéj sprzedawanym był w Londynie ze stratą 4% po sh. 4.3 d. Jaka była cena 1 metra w Paryżu, jeżeli tam otrzymano 6% rabatu (od stu), a koszta wynosiły 18%?

39. Sprzedając w Warszawie pud towaru po rs. 11 kop. 25 z rabatem 8% zarabiamy 42%; ile wynosiła w Londynie cena 1 Cwt tego towaru, jeżeli otrzymaliśmy 1% nawagi, 15% tary, $1\frac{1}{2}$% dekortu; komisowe w Londynie wynosiło $2\frac{1}{2}$%, a koszta przywozu, cło i t. d. po obliczeniu uczyniło 26%? (1 funt ross.=409,5174 gr., 1 funt ang.=453,5922; za 1 £ płacono rs. 9,06).

40. Kupiec wiedeński obliczył cenę 1 cetnara kawy na fl. 84 50 (papierowych) z zyskiem $12\frac{1}{2}$%. Ile zapłacił w Amsterdamie za 5000 Kgr. téj kawy, jeżeli tam otrzymał 1% nawagi, 3% tary; komisowe wynosiło w Amsterdamie $\frac{1}{2}$%, inne koszta tamże również $\frac{1}{2}$%, koszta zaś przewozu do Wiednia 3%? Cło od kawy wynosi w Austryi 9 fl. srebrem za 1 cet., ażio od srebra $6\frac{1}{2}$%. (1 cet. wied.=56 kgr, za 100 fl. hollenderskich płaci się 95,50 fl. austr. papierami).

41. Pud karuku astrachańskiego kosztuje w Petersburgu 375 rs.; po ile przedawać można w Wiedniu funt z zarobkiem 15%, jeżeli komisowe w Petersburgu wynosiło 3%, a przewóz do Wiednia fl. 3,75 od cetnara? (1 pud=$29\frac{1}{5}$ funt. wied., a rubel płacono po 1,51 fl. aus.).

42. Pszenica płaci się w Gdańsku po 205 ℳ za 1000 kgr.; dla dostawy na ten rynek zamierzamy nabywać ją w Lublinie, po czemu można tam płacić korzec, jeżeli 1 wagon towarowy zabiera 100 korcy, a fracht kolejowy do Gdańska wynosi od wagonu ℳ 181, inne zaś koszta w Gdańsku (przewóz do spichrza, przeładowanie i t. d.) ℳ 38.65. Ajentowi w Lublinie płacimy $3\frac{1}{2}$% komisowego, nabywcy w Gdańsku żądają 5% rabatu od stu, a zysku pragniemy osiągnąć 12%? (1 korzec pszenicy przyjmuje się za 242 ℔ ross., 1 pud= 33 funtom niemieckim, a za 300 ℳ płaci się 133,65 rs.)

Rozdział VII.

Rachunek procentów.

§ 78.

Procentem w ściślejszém znaczeniu nazywamy wynagrodzenie jakie dłużnik płaci wierzycielowi za korzystanie przez pewien czas z jego kapitału. Miarą tego wynagrodzenia jest procent od kapitału 100 za jednostkę czasu, pospolicie za rok.

Wysokość stopy procentowéj zależy głównie od stosunku między zaofiarowaniem a żądaniem kapitału, czyli między podażą a popytem, ważny jednak wpływ na wysokość stopy procentowéj ma pewność kapitału; w niektórych krajach wysokość stopy procentowéj obwarowaną jest przepisami prawnemi.

Od obliczeń odsetkowych, w poprzednim rozdziale rozbieranych, rachunek procentu różni się pod względem arytmetycznym tém, że przybywa tu nowa wielkość, równoznaczna z kapitałem, t. j. czas. Czas na wysokość procentu ma wpływ taki sam, jak kapitał, bo od kapitału mniejszego za czas dłuższy można mieć dochód takiż sam, jak od kapitału większego za czas krótszy.

Rok pospolicie przyjmuje się za dni 360, miesiąc zatem za dni 30; w niektórych tylko miejscowościach rok liczy się po dni 365 a miesiąc po dni tyle, ile ma rzeczywiście.

W zadaniach zatém odnoszących się do rachunku procentów zachodzą cztery wielkości: Kapitał (K), procent (P), czas (C) i stopa procentowa (s); mając trzy z tych wielkości, można zawsze czwartą wynaleźć, przedstawiają się tu zatém cztery zadania do rozwiązania.

Związek tych czterech ilości wyprowadza się łatwo z proporcyi (§ 53); jeżeli C oznacza pewną liczbę lat, mamy

$$\begin{array}{c|c} P & \left.\begin{matrix}K\\C\end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix}100\\1\end{matrix}\right. & s \end{array}$$

$$(1)\ P = \frac{KCs}{100}$$

zkąd:

$$(2)\ K = \frac{100P}{Cs}$$

$$(3)\ C = \frac{100P}{Ks}$$

$$(4)\ s = \frac{100P}{KC}$$

Jeżeli C oznacza pewną liczbę miesięcy lub pewną liczbę dni (rok po dni 360), procent za C miesięcy lub za C dni będzie 12 lub 360 razy mniejszy niż za C lat; w tych zatém przypadkach mamy:

$$(5)\quad P = \frac{KCs}{1200},$$

$$(6)\quad P = \frac{KCs}{36000},$$

i inne zatém wzory na wynajdywanie kapitału, czasu i stopy procentowéj różnić się będą od wzorów (2), (3) i (4) tém tylko, że w miejsce liczby 100 zachodzić w nich będą liczby 1200 lub 36000.

Najważniejszém z tych zadań, rozumie się, jest obliczanie procentu, stanowiące najpospolitszy ze wszystkich rachunków, jakie się w życiu handlowém przytrafiają. Sposoby téż, używane do obliczania procentu, są w ogólności znacznie dogodniejsze, aniżeli bezpośrednie stosowanie powyższych wzorów.

§ 79.

Dochodzenie procentu. Procent za pewną liczbę lat. Procent za 1 rok od danego kapitału sprowadza się do prostego obliczenia odsetkowego według danéj stopy procentowéj; jeżeli bowiem $C = 1$, $P = \frac{Ks}{100}$. Tak np. procent za rok od rs. 7346,72 przy 6% jest:

$$\begin{array}{rl} & 7346{,}72 \text{ rs.} \\ \hline 1\% & 73{,}467 \\ \hline 6\% & 440{,}80 \end{array}$$

Jeżeli idzie o procent za pewną liczbę lat, możemy najpierw użyć wzoru (1), według którego procent jest setną częścią iloczynu z kapitału przez liczbę lat i stopę procentu; tak np. procent od 875 rs. za 5 lat przy 6% jest:

$$\frac{875 \times 5 \times 6}{262{,}50 \text{ rs.}}$$

Do tegoż samego zresztą rezultatu dojść możemy z proporcyi:

$$\begin{array}{r|l} ? & 875 \\ & 5 \\ 100 & \\ 1 & 6 \\ \hline & 26250 \text{ rs.} \end{array}$$

Dogodniéj jest obliczyć procent za jeden rok i takowy pomnożyć przez liczbę lat

$$\begin{array}{rl} & 875 \text{ rs.} \\ \hline 1\% & 8{,}75 \\ \hline 6\% & 52{,}50 \\ \hline 5\text{ l.} & 262{,}50 \quad \text{rs.} \end{array}$$

Nakoniec z uwagi, że 6% przez 5 lat przynosi tyleż, co $6 \times 5\%$ przez 1 rok, zadanie wychodzi wprost na obliczenie $5 \times 6 = 30\%$ danego kapitału.

$$\begin{array}{rl} & 875 \text{ rs.} \\ \hline 10\% & 87{,}50 \\ \hline 30\% & 262{,}50 \text{ rs.} \end{array}$$

Ostatni ten sposób będzie w ogólności najszybszym, gdy stopa procentowa i liczba lat są liczbami całkowitemi; przy liczbach ułamkowych dogodniéj będzie najpierw obliczać procent za 1 rok. Tak np. procent od rs. 746,75 przy $4\frac{1}{2}\%$ za $7\frac{3}{4}$ lat.

$$\begin{array}{rl} & 746{,}75 \text{ rs.} \\ \hline 4\% & 29{,}87 \\ \frac{1}{2}\% & 3{,}73 \\ \hline & 33{,}60 \end{array}$$

1 r.	33,60
7 lat	235,20
$^1/_2$ roku	16,80
$^1/_4$ roku . . .	8.40
$7^3/_4$ lat	260,40 rs.

Już przy obliczaniach odsetkowych poznaliśmy, że odrzucanie niższych gatunków monet przy wyższych, jak kopiejek przy rublach, prowadzić może do błędów dosyć znacznych; tém więcéj miałoby to miejsce tutaj, gdzie błąd ten się uwielokrotnia. W ostatniém zadaniu, chcąc mieć dokładną liczbę kopiejek szukanego procentu, należało baczyć i na dziesiętne części kopiejki przy obliczaniu procentu za rok.

Zresztą istotnie praktycznego znaczenia dochodzenie procentów za pewną liczbę lat nie ma, nie napotykają się one bowiem prawie wcale w życiu handlowém. Jeżeli kapitał umieszczony jest na procencie przez pewien ciąg lat, a procenta nie pobierają się corocznie, to w ogólności przypisują się takowe do kapitału, t. j. same przechodzą w kapitał, tak że następnych lat mamy procenty od procentów, czyli procenty złożone.

Jeżeli obok liczby lat podaną jest pewna liczba miesięcy lub dni, najlepiéj jest uważać ją za część roku i postępować według ostatniego zadania.

Przykłady:

1) Rs. 685,40 po $6^1/_2$% za 4 lata i 7 mies.

	685,40 rs.
6%	41,12
$^1/_2$%	3,47
1 rok . . .	44,59 rs.
4 lata	178,36
6 mies. ($^1/_2$ r.) .	22,30
1 mies. ($^1/_6$-$^1/_2$ r.)	3,71
	204,37 rs.

2) fs. 2837,46 po $3^3/_4$% za 2 lata 7 mies. 18 dni.

	2837,46 fs.
3%	85,12
$^3/_4$%	21,18
1 rok	106,40

	106,40
2 lata	212,80
6 mies.	53,20
1 mies.	8,87
18 d. ($^1/_{20}$ roku)	5,32
	280,19 rs.

3) Rs. 485 po $6^1/_4$% za 1 rok 85 dni.

	485 rs. : 16
1 rok	30,31
60 dni	5,05
20 dni	1,68
5 „	0,42
	37,46 rs.

Zadania.

Obliczyć procenty od kapitałów.

1) rs.	775	po 6%	za 3 lata
2) „	478,36	„ 5%	„ 5 „
3) fs.	2476,70	„ $3^1/_3$%	„ $4^3/_4$ „
4) ℳ	894,50	„ $3^1/_2$%	„ $1^3/_4$ „
5) ℳ	4726	„ $8^1/_3$%	„ $2^1/_4$ „
6) rs.	713,70	„ $6^1/_4$%	„ $3^5/_6$ „
7) öwfl.	625,25	„ $5^1/_2$%	„ 2 l. 3 m.
8) £	170,16 sh.	„ $2^3/_4$%	„ 3 l. 8 m. 24 d.
9) fs.	4650	„ $4^1/_2$%	„ 4 l. 342 d.
10) £	87.16 s.	„ $2^1/_4$%	„ 1 r. 200 d.

§ 80.

Dochodzenie procentu za pewną liczbę miesięcy. Według wzoru (5) § 78 znajdujemy procent za pewną liczbę miesięcy, dzieląc iloczyn z kapitału, liczby miesięcy i stopy procentowéj przez 1200. Tak np. procent od rs. 467,35 po 5% za 7 m.

$$\begin{array}{rl} 467,35 & \\ \hline 2336,75 & \times 5 \\ \hline 16357,25 & \times 7 \\ \hline 13,63 \text{ rs.} & : 1200 \end{array}$$

Do tegoż samego rezultatu prowadzi użycie proporcyi:

?	467,35
	7
100	5
12	
	13,63 rs.

Obliczając procent od 467 rs., znaleźlibyśmy 13,62 rs.; w ogóle pomijanie kopiejek sprowadza tu różnicę bardzo nieznaczną, przy znacznem uproszczeniu rachunków; przypominamy jednak, że gdy część odrzucona stanowi więcéj od połowy jednostki wyższéj, bierzemy ją za 1.

Jeżeli stopa s mieści się bez reszty w 1200, osiągnąć można istotne uproszczenie; dajmy, że $\frac{1200}{s}=D$, wtedy wzór (4) przechodzi na $P=\frac{KC}{D}$; należy przeto dla znalezienia procentu pomnożyć tylko kapitał przez liczbę miesięcy i iloczyn ten podzielić przez dzielnik odpowiadający danéj stopie. Dzielnikami takiemi będą:

dla stopy $1\frac{1}{2}$	 800,	dla stopy $3\frac{1}{3}$	 360
„ „ 2	. . . 600,	„ „ 4	 300
„ „ $2\frac{1}{2}$	 480,	„ „ 5	 240
„ „ 3	 400,	„ „ 6	 200

Powyższe zatém zadanie przerobi się prościéj:

$$\begin{array}{rl} 467,35 & \\ \hline 3269 & \times 7 \\ \hline & : 240 \\ 13,62 \text{ rs.} & \end{array}$$

Najdogodniejszy z tych dzielników posiada stopa 6, a że zarazem od stopy téj, za pomocą prostych poprawek, łatwo przechodzić do stóp innych, zatem zyskamy istotne ułatwienie, sprowadzając obliczanie procentu przy jakiéjkolwiek stopie do obliczania procentu przy stopie 6 i ztąd przechodząc do stopy danéj. Tak np. rs. 467,35 przy 5% za 7 mies.

$$\begin{array}{lrl} & 467,35 & \\ \cline{2-2} & 3269 & \times 7 \\ \cline{2-2} 6\% \ldots\ldots & 16,34 & : 200 \\ \div 1\% \ (\frac{1}{6}.6\%) \ldots & 2,72 & \\ \cline{2-2} & 13,62 \text{ rs.} & \end{array}$$

Ponieważ zaś zamiast dzielić iloczyn przez daną liczbę, można dzielić przez tę liczbę którykolwiek czynnik, można tu dzielić przez 2 albo kapitał albo liczbę miesięcy, pamiętając odciąć 2 cyfry, z powodu dzielenia przez 100. Nadto, ponieważ czas i stopa, zachodząc jako czynniki we wzorach służących do obliczania procentów, są rachunkowo wielkościami zupełnie równoznacznemi, można tu przeto korzystać z przemiany mianowań (stopy na czas), — w tedy mianowicie, gdy liczba miesięcy w dogodniejszy do rachunku sposób związaną jest z 6 niż stopa.

Przykłady:

1) rs. 580 po $3\frac{5}{6}$% za 7 m. (rs. 580 po 7% za $3\frac{5}{6}$ m.)

580 : 2
290 × 4
1160
48 ÷ $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{6}$.290)
6% 11,12
1% 1,85
12,97

a tu nawet krócéj:

580 × 2 (4 : 2)
1160
48 ÷ $\frac{1}{2}$.580
6% . . . 11,12
+1% . . . 1,85
12,97

2) rs. 748,84 po $4\frac{1}{4}$% za $4\frac{1}{2}$ m. ($4\frac{1}{2}$% za $4\frac{1}{4}$ m.)

749 × 2
1498
94 + $\frac{1}{4}$ m. ($\frac{1}{8}$-749)
6% 15,92
÷ $1\frac{1}{4}$%($\frac{1}{4}$.6) . 3,98
11,94 rs.

3) £ 78.9 *s*. za $5\frac{1}{2}$ m. po $3\frac{1}{2}$%.

£ 78,45 : 2
39,22 × 5
196,1
19,6 $\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$.5
6% 2,157
3% 1,078
$\frac{1}{2}$% 0,180
1,258
5,16
2 £ 1.5.2 d.

Możemy też obliczanie procentu za pewną liczbę miesięcy sprowadzić do prostego obliczania odsetkowego, jeżeli daną stopę procentową sprowadzimy do stopy, odpowiadającéj danéj liczbie miesięcy. Tak np. procent za 3 m. przy 6% wynosi tyleż co procent za 1 m. przy $1\frac{1}{2}$%, potrzeba przeto danego kapitału obliczyć tylko $1\frac{1}{2}$%. Stopę taką wynajdujemy w ogólności, jak to wnieść łatwo, przez podzielenie przez 12 iloczynu z danéj stopy procentowéj przez liczbę miesięcy.

Przykłady:

1) Rs. 846 za 3 m. przy 6% ($1\frac{1}{2}$%)

	846
1%	8,46
$\frac{1}{2}$%	4,23
	12,69 rs.

2) Rs. 580 po $3\frac{5}{6}$% za 7 m. $\left(\dfrac{3\frac{5}{6} \times 7}{12} = 2\frac{17}{72}\%.\right)$

	580
2%	11,60
$\frac{12}{72} = \frac{1}{6}$%	0,97
$\frac{4}{72}$%	0,32
$\frac{1}{72}$%	0,08
	12,97 rs.

3) Rs 748,84 po $4\frac{1}{4}$% za $4\frac{1}{2}$ m. $\dfrac{4\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{2}}{12} = 1\frac{57}{96}\%$

1%	7,49
$\frac{48}{96}$%	3,75
$\frac{8}{96}$%	0,62
$\frac{1}{96}$%	0,08
	11,94 rs.

Nakoniec, możemy w każdym razie obliczyć najpierw procent za rok, a ztąd, postępowaniem podobném jak w § poprzedzającym, wyprowadzić procent za daną liczbę miesięcy.

Przykłady:

1) Rs. 580 po $3\frac{5}{6}$% za 7 m.

	580 rs.
4%	23,20
$\div 1/6$%	0.97
1 r.	22,23
6 m. . . .	11,12
1 ,, . . .	1,85
	12,97 rs.

2) Rs. 748,74 po $4\frac{1}{4}$% za $4\frac{1}{2}$ m.

	rs. 748,84
4%	29,95
$\frac{1}{4}$%	1,87
1 r.	31,82
4 m.	10,61
$\frac{1}{2}$,, ...	1,33
	11,94 rs.

Jeżeli obok miesięcy daną jest i pewna liczba dni, możemy ją albo wyrazić w ułamku miesiąca, albo też, obliczywszy procent za miesiące, wyprowadzamy ztąd przez rozkład na części procent za daną liczbę dni, albo wreszcie, miesiące zamieniamy na dnie i postępujemy według metod niżéj wyłożonych.

Zadania.

Obliczyć procenty od kapitałów:

1) Rs. 876,73 po $4, 4\frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}, 5, 5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}, 6\frac{3}{4}$ za miesięcy $7\frac{1}{2}$.

2) M 3086,45 po $3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7, 7\frac{1}{4}, 8\frac{1}{3}, 10, 11, 12, 12\frac{1}{2}$% za m. $9\frac{1}{2}$.

3) Fs. 5486 po $3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{4}, 5\frac{3}{8}, 5\frac{5}{6}, 6\frac{5}{6}$% za m, $4\frac{1}{3}$.

4) £ 107.16 sh. po $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}$% za miesięcy 8.

§ 81.

Dochodzenie procentu za pewną liczbę dni jest nietylko najważniejszym ustępem nauki o procentach, ale i najpospolitszém zadaniem rachunkowości handlowéj. Według wzoru (6) § 78 znajdujemy procent za daną liczbę dni, dzieląc iloczyn z kapitału, liczby dni i stopy procentowéj przez 36000. Uproszczenie tego postępowania przedewszystkiém możliwém jest wtedy, jeżeli iloraz z podzielenia 36000 przez stopę daje liczbę, będącą dzielnikiem dogodnym. Tak np. procent od 576 rs. po 6% za dni 87 jest $\frac{576.87.6}{36000}=\frac{576.87}{6000}$. Oznaczywszy w ogólności wartość $\frac{36000}{s}$ przez D, mamy $P=\frac{KC}{D}$; trzeba przeto dla znalezienia procentu podzielić iloczyn z kapitału i liczby dni przez *dzielnik stały* dla danéj stopy procentowéj. Iloczyn z kapitału przez liczbę dni zowie się *liczbą procentową* (*nombre*), a metoda ta obliczania procentów—*metodą liczb procentowych.*

Mniéj lub więcéj używane dzielniki stałe są:

dla stopy	1	dzielnik	36000	dla stopy	4	dzielnik	9000
„ „	$1\frac{1}{3}$	„	27000	„ „	$4\frac{1}{2}$	„	8000
„ „	$1\frac{1}{2}$	„	24000	„ „	5	„	7200
„ „	2	„	18000	„ „	6	„	6000
„ „	$2\frac{1}{4}$	„	16000	„ „	$7\frac{1}{2}$	„	4800
„ „	3	„	12000	„ „	8	„	4500
„ „	$3\frac{3}{5}$	„	10000	„ „	9	„	4000

Łatwo widzieć, że niektóre tylko z liczb powyższych stanowią dzielniki istotnie dogodne, jak 9000 (dla 4%), 8000 (dla $4\frac{1}{2}$%), 6000 (dla 6%), 4000 (dla 9%) i kilka innych; ze stóp jednak posiadających dzielniki dogodne korzystamy i dla obliczania procentów przy innych stopach.

Przykłady:

1) Rs. 475 po 6% za dni 95

$$\begin{array}{r l}
475 & \times 95\ (100-5) \\
2375 & \\
\hline
45125 & \text{liczba procentowa} \\
\hline
7,52 & :6000
\end{array}$$

Ponieważ tu idzie jedynie o setne części wyższéj jednostki monet, a dzielnik jest cztero-cyfrowy, można już w saméj liczbie procentowéj odrzucać dwie ostatnie cyfry, czyli mnożyć kapitał przez liczbę dni tak, aby otrzymywać jedynie liczbę procentową z przybliżeniem do setek i takową dzielić już tylko przez liczbę setek dzielnika stałego; w powyższém np. obliczeniu uproszczenie to polega na tém, że przyjmujemy $\frac{45125}{6000}=\frac{45100}{6000}=\frac{451}{60}$, t. j.

$$\begin{array}{r}475 \times 95 \\ 24 \\ \hline 451 \\ \hline 7{,}52 \text{ rs.}\end{array} : 60\ (6 \times 10)$$

Łatwo widzieć, że błąd, jaki z przybliżenia tego wypływa, będzie nader nieznacznym i rzadko przechodzić będzie kopiejkę, bylebyśmy tylko podwyższali o jedność liczbę setek, jeżeli odrzucona część liczby procentowéj przechodzi 50, co zresztą osiąga się wprost przez uwzględnianie poprawek przy mnożeniu. W ten sposób skrócone dzielniki stałe będą dla stopy 6% 60 (6), dla 5% 72, dla 4% 90 (9), dla 4½% 80 (8) i t. d. Przy monecie tylko angielskiéj, z powodu wysokiéj stosunkowo wartości najdrobniejszéj jednostki, należy wynajdywać całe liczby procentowe do jedności.

2) Rs. 872,73 po 4% za dni 136

$$\begin{array}{r}872{,}73 \times 136 \\ \hline 873 \\ 262 \\ 52 \\ \hline 1187 \\ \hline 13{,}19 \text{ rs.}\end{array} : 90\ (9 \times 10)$$

3) Fs. 2018,23 po 5% za dni 96

$$\begin{array}{r}2018{,}23 \times 96\ (100-4) \\ 80 \\ \hline 1938 \\ \hline 242{,}25 \\ \hline 26{,}92 \text{ fs.}\end{array} : 72\ (8 \times 9)$$

4) M 3768 po 4½ za dni 146

$$\begin{array}{r}3768 \times 146 \\ 1507 \\ 226 \\ \hline 5501 \\ \hline 68{,}76 \text{ M}\end{array} : 8$$

Mnożenie to zresztą ułatwić może uwaga, że liczba procentowa za 100 dni wyrażona w setkach równa się danemu kapitałowi; w ostatniém np. zadaniu liczba procentowa w setkach za 100 dni wynosi 3768, w przedostatniém za 100 dni byłaby 2018, za daną liczbę dni 96 musi przeto być mniejszą. Pamiętając o tém, nie trzeba się zastanawiać, od któréj cyfry kapitału należy rozpoczynać mnożenie przez każdą cyfrę liczby dni i łatwiéj unika się pomyłek.

Jeżeli zachodzą stopy nie posiadające dogodnych dzielników, obliczamy najpierw procent przy jednéj ze stóp dogodnych, a następnie przez stosowny rozkład stopy danéj dochodzimy do żądanego procentu.

5) Rs. 4286 po $3^3/_4$ za dni 84.

Stopa $3^3/_4$% nie ma dogodnego dzielnika, obliczymy przeto najpierw procent po 3%:

$$\begin{array}{lr}
 & 4286 \times 84 \\
\hline
 & 3429 \\
 & 171 \\
\hline
 & 3600 \; : 120 \\
\hline
3\% \; \ldots\ldots & 30{,}00 \\
{}^3/_4\% \; ({}^1/_4 . 3\%) \; \ldots & 7{,}50 \\
\hline
 & 37{,}50 \text{ rs.}
\end{array}$$

albo, przyjąwszy 4% za podstawę:

$$\begin{array}{lr}
 & 4286 \times 84 \\
\hline
 & 3600 \; : 90 \\
\hline
4\% \; \ldots & 40{,}00 \\
\div {}^1/_2\% \; \ldots\ldots & 2{,}50 \\
\hline
 & 37{,}50 \text{ rs.}
\end{array}$$

Przytoczyć tu jeszcze należy, że gdy kapitał i liczba dni zachodzą tu jako czynniki iloczynu, z którego przez dzielenie otrzymujemy szukany procent, można téż te poprawki dokonywać bądź na liczbie procentowéj, bądź na którymkolwiek z jéj czynników t. j. na kapitale lub na liczbie dni. Tak np. w pierwszém rozwiązaniu powyższego zadania, obliczając przy podstawie 3%, dodaliśmy do znalezionego procentu jego część czwartą, t. j. wzięliśmy $\frac{KC}{D} + {}^1/_4 \frac{KC}{D}$, ale to wyrażenie $= \frac{KC \quad {}^1/_4 KC}{D} = \frac{(K \quad {}^1/_4 K)\, C}{D} = \frac{K\,(C + {}^1/_4\, C)}{D}$, t. j. poprawkę taką samą, jakąśmy dokonywali na znalezionym procencie po 3%, dokonywać można na liczbie procentowéj, na kapitale lub na liczbie dni, mianowicie: *a*)

$$\begin{array}{lr}
 & 4286 \times 84 \\
\hline
 & 3429 \\
 & 171 \\
\hline
 & 3600 \\
+ {}^1/_4 & 900 \\
\hline
 & 4500 \; : 120 \\
\hline
 & 37{,}50 \text{ rs.}
\end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{rl}
 & 4286 \\
+\frac{1}{4} & 1071 \\
\hline
 & 5357 \times 84 \\
\hline
 & 4286 \\
 & 214 \\
\hline
 & 4500 \\
\hline
 & : 120 \\
 & 37{,}50 \text{ rs.}
\end{array}
$$

c) $4286 \times 105 \quad (105 = 84 \times \frac{1}{4}\ 84)$

$$
\begin{array}{r}
214 \\
\hline
4500 \\
\hline
: 120 \\
37{,}50 \text{ rs.}
\end{array}
$$

W drugiém rozwiązaniu przy podstawie 4% poprawka polegała na odjęciu od procentu po 4% jego części szesnastéj; podobnież możnaby odjąć od liczby procentowéj, kapitału lub liczby dni szesnastą część każdéj z tych liczb; gdyby np. należało obliczyć procent od rs. 4286 po $3^3/_4$% za dni 96, byłoby najdogodniéj dokonać poprawkę na liczbie dni:

$$4286 \times 90 \ (90 = 96 - \tfrac{1}{16}.96)$$

a że trzeba będzie iloczyn podzielić przez 90 (9000), przeto procent szukany jest rs. 42,86. W ogóle poprawka może być przeprowadzona tam, gdzie daje się najdogodniéj dokonać.

6) $\mathcal{M}$ 728,80 po $5^3/_4$ za dni 89.

$$
\begin{array}{rl}
 & 728{,}80 \times 89 \\
\hline
 & 583 \\
 & 65 \\
\hline
 & 648 \\
\hline
 & 81 \ : 72\ (8 \times 9) \\
\hline
5\% \ \ldots\ldots & 9 \text{ rs.} \\
^2/_4\% \ \ldots\ldots & 9{,}90 \\
^1/_4\% \ \ldots\ldots & 0{,}45 \\
\hline
 & 10{,}35 \text{ rs.}
\end{array}
$$

albo, biorąc stopę 6 za podstawę

$$
\begin{array}{rl}
728{,}80 \times 89 & \\
\hline
648 & \\
27 & \div \frac{1}{24} \text{ (poprawka na liczbie proc.)} \\
\hline
621 & \\
\hline
10{,}35 & : 6\ (60)
\end{array}
$$

W ogólności najdogodniejszą jest stopa 6, tak dla tego, że odpowiadający jéj dzielnik 60 jest nader prosty, jak i dla tego, że z liczby 6 przez rozkład łatwo przejść do największéj części stóp używanych.

7) Rs. 569 po 5% za dni 108

569 × 90 (108 — $1/6$.108 poprawka na liczbie dni)
512 : 6
8,53 rs.

8) £ 276 po $2\frac{1}{2}$% za 124 d.

276 × 124
552
1104
34224 : 6000
6% 5,704
2% 1,901
$\frac{1}{2}$% 0,475
2,376 × 20
7,52 × 12 £ 2.7.6 d.
6

9) Rs. 2618,50 po $7\frac{1}{4}$ za dni 43

2618,50 × 43
1047
78
1125 : 6
6% 18,75
1% 3,13
$\frac{1}{4}$% 1,56
23,44 rs.

10) Fs. 7216 po $1\frac{3}{4}$% za dni 145

7216 × 145
2886
361
10463 : 6
6% 174,38
2% 58,13
÷ $\frac{1}{4}$% 7,27
50,86 fs.

§ 82.

Ze wzoru $P=\frac{KC}{D}$, jeżeli $C=\frac{D}{100}$, wypływa $P=\frac{K}{100}$, t. j. jeżeli liczba procentowa jest setną częścią dzielnika stałego, procent jest setną częścią kapitału; tak np. procent od 756 rs. po 5% za dni 72 jest $\frac{756\times72}{7200}=\frac{756}{100}=7{,}56$; procent od fs. 4756,87 po 3% za dni 120 jest fs. 47,57. — Dla każdéj zatém stopy, posiadającéj dogodny dzielnik, istnieje liczba dni, za którą procent daje się bezpośrednio z kapitału oznaczyć, a ztąd przez stosowny rozkład można wyprowadzić procent za daną liczbę dni. Jeżeli dana stopa nie posiada dogodnego dzielnika obliczamy procent przy innéj stopie, a w sposób takiż sam jak w § poprzedzającym przechodzimy do procentu przy stopie danéj. Metoda ta obliczania procentów jest w ogóle bardzo przydatną.

Przykłady:

1) Rs. 475 po 6% za dni 95

za dni 60	. . .	4,75 rs.
„ „ 30	($^1/_2$.60)	2,38
„ „ 5	($^1/_6$.30)	0,39
		7,52 rs.

2) Rs 872,73 po 4% za dni 136

za dni 90	. . . .	8,73 rs.
„ „ 45	. . . .	4,37
„ „ 1	($^1/_{90}$-90)	0,09
		13,19 rs.

3) Fs. 2018,23 po 5% za dni 96

za dni 72	. . . .	20,18 fs.
„ „ 24	. . . .	6,73
		26,91 fs.

4) ℳ 3768 po 4$^1/_2$% za dni 146

za dni 80	. . .	37,68 ℳ
„ „ 40	. . .	18,84
„ „ 20	. . .	9,42
„ „ 4	($^1/_{10}$.40)	1,88
„ „ 2	($^1/_{10}$.20)	0,94
		68,76 ℳ

5) Rs. 4286 po $3^3/_4\%$ a za dni 84

za dni 60	42,86 (przy 6%)
,, ,, 20	14,29
,, ,, 4	2,86
6%	60,01
3%	30,00
$^3/_4$	7,50
	37,50 rs.

6) ℳ 728,80 po $5^3/_4$ za dni 89

za dni 72	7,29 rs.
,, ,, 12 . . .	1,21
,, ,, 4	0,40
,, ,, 1 . . .	0,10
5%	9,00
$^1/_2\%$	0,90
$^1/_4\%$	0,45
	10,35 ℳ

albo:

za dni 60	7,29 rs.
,, ,, 20 . . .	2,43
,, ,, 6 . . .	0,73
,, ,, 3 . . .	0,36
6%	10,81
$\div ^1/_4\%$	0,45
	10,36 ℳ

7) £ 276 po $2^1/_2\%$ za 124 d.

za dni 120	2,76 £
,, ,, 4	0,092
3%	2,852
$\div ^1/_2\%$	0,475
	2,377 × 20
	7,54 × 12
£ 2.7.6 d.	6

8) Fs. 7216 po $1^3/_4\%$ za dni 145

za d. 180	72,16 fs.
,, ,, 90	36,08
,, ,, 45	18,04
,, ,, 10	4,01
2%	58,13
$\div ^1/_4\%$	7,27
	50,86 fs.

§ 83.

Ze związku $P=\frac{KC}{D}$ wyprowadzić można inną jeszcze, podobną do poprzedniéj uwagę; jeżeli mianowicie $K=D$, jest $P=C$, t. j. jeżeli kapitał równy jest stałemu dzielnikowi, procent wyrażonym jest przez liczbę dni. Tak np. procent od 6000 rs. po 6% za dni 83 wynosi $\frac{6000 \times 83}{6000}=83$ rs.; procent od 7200 rs. po 5% za dni 117 będzie 117 rs.

Przez rozkład zatém kapitałów na stosowne części, można dogodnie obliczać procenty.

Przykłady:

1) 10000 rs. po 6% za dni 82

od 6000 rs.	82
„ 3000 „	41
„ 1000 „	20,50
	143,50

2) 12400 rs. po $4\frac{1}{2}$% za dni 96

od 8000 rs.	96 rs.
„ 4000 „	48 „
„ 400 „	4,80
	148,80 rs.

3) 15000 rs. po $3\frac{1}{2}$ za dni 67

od 12000 rs.	67
3000 „	16,75
3%	83,75
$\frac{1}{2}$% . . .	13,96
$3\frac{1}{2}$%	97,91

Rs. 12650 po 2% za dni 138

od 18000	138 rs.
„ 9000 rs. . . .	69 „
„ 3000	23
„ 600	4,60
„ 50 ($\frac{1}{60}$.3000)	0,38
	96,98 rs.

Sposób ten nadaje się zwłaszcza do pamięciowego obliczania procentów od kapitałów okrągłych, jeżeli idzie np. o przybliżoną ocenę procentu.

§ 84.

Przy obliczaniu procentów nie mamy w ogólności danéj liczby dni, a tylko datę wypożyczenia i zwrotu kapitału. Ponieważ powyższy rachunek procentów opartym jest na podstawie 360 dni w roku, dla tego téż i miesiące liczą się w ogólności po dni 30. Według przyjętego zwyczaju z dwu danych dat, t. j. daty wypożyczania i zwrotu kapitału, jednę tylko włącza się do szukanéj liczby dni. Od 15 zatem marca do 7 lipca upływa dni:

w marcu	15	albo	w marcu . . .	16
kwiecień, maj, czerwiec . . .	90		kwiecień, maj, czerwiec . . .	90
w lipcu	7		w lipcu	6
	112			112

Przy pierwszém obliczaniu nie włączamy 15 marca, a natomiast włączamy 7 lipca, przy drugiém włączamy 15 marca, natomiast odrzucamy 7 lipca. Możemy zresztą liczyć i tak: od 15 marca (dnia tego nie licząc) do 15 czerwca włącznie dni 90, do tego 15 dni czerwca i 7 lipca,—razem dni 112.

W niektórych miejscowościach, jak we Frankfurcie i Hamburgu, w handlu wekslowym panuje zwyczaj liczenia roku po dni 360, a miesiąca po dni tyle, ile rzeczywiście zawiera. Zwyczaj ten jest niesłusznym, gdyż prowadzi do zanadto wielkich procentów; zachowując bowiem w ogólnym wzorze na procent mianownik 36000, wprowadza większe liczniki. Tak np. procent od ℳ 4500 po 6% od 18 sierpnia do 23 grudnia, uczyni *a*) przy pierwszym sposobie liczenia dni:

od 18 sierpnia do 18 grud. . . .	120 d.
od 18 grud. do 23 grud.	5
	125
za dni 60	45 ℳ
„ „ 60	45 „
„ „ 5	3,75
	93,75 ℳ

b) przy drugiém sposobie:

w sierpniu	13 d.
wrzesień	30
październik	31
listopad	30
w grudniu	23
	127 d.

za dni 125 (jak wyżéj)	93,75 ℳ
„ „ 2 ($^1/_{30}$.60)	1,50
	95.25 ℳ

Słuszniejszym jest zwyczaj liczenia roku po dni 365 a miesięcy po tyle, ile mają rzeczywiście, jak to ma miejsce w Anglii i Holandyi, co jednak prowadzi do nader niedogodnych rachunków. Zajmiemy się tém niżéj. W zadaniach następnych dni będą się liczyć wedle zwyczaju powszechnie przyjętego.

Zadania.

Obliczyć procent wszystkiemi sposobami od kapitałów:

1)	rs.	734,35	po 3%	za 213 dni	
2)	fs.	3085	„ $1^1/_2$%	„ 94 „	
3)	„	1966	„ 2%	„ 54 „	
4)	£	231	„ 1%	„ 137 „	
5)	ℳ	3726,80	„ 4%	„ 118 „	
6)	Rs.	2640	„ $6^1/_2$%	„ 97 „	
7)	„	13675	„ $5^1/_2$%	„ 45 „	
8)	ℳ	736	„ $2^2/_3$%	„ 74 „	
9)	Rs.	3845,75	„ 8%	„ 237 „	
10)	£	311.16.9	„ $1^3/_4$%	„ 109 „	
11)	Rs.	764	„ 5%	„ 60 „	
12)	ℳ	736	„ $1^1/_3$%	„ 81 „	
13)	öwfl.	3250	„ $6^1/_4$	od $^{26}/_1$	do $^1/_4$
14)	£	127.6 sh.	„ $2^1/_2$	„ $^{14}/_8$	„ $^2/_3$
15)	rs.	2600	„ $8^1/_4$%	„ $^{27}/_2$	„ $^{31}/_7$
16)	fs.	713,75	„ $2^1/_2$%	„ $^3/_{10}$	„ $^{27}/_{12}$
17)	£	73.8	„ $1^1/_2$%	„ $^3/_{12}$	„ $^{31}/_7$
18)	rs.	2086	„ $8^1/_3$%	„ $^5/_{10}$	„ $^{31}/_{12}$
19)	fl. aus.	1250	„ $3^1/_8$%	„ $^{24}/_{10}$	„ $^5/_4$
20)	rs.	1224	„ $7^1/_4$%	„ $^8/_5$	„ $^{23}/_9$
21)	„	768	„ $6^3/_4$%	„ $^{28}/_2$	„ $^1/_8$
22)	fs.	11736,60	„ $4^1/_4$%	„ $^{27}/_8$	„ $^5/_2$

23) ℳ 3983,75 „ $4\frac{1}{2}$% „ $^{3}/_{11}$ „ $^{1}/_{4}$
24) £ 126.14 „ $2\frac{1}{4}$% „ $^{14}/_{9}$ „ $^{2}/_{1}$

do rachunku pamięciowego:

25) rs. 8000 po 6% za dni 39
26) „ 1000 „ 5% „ „ 40
27) fs. 6000 „ 3% od $^{17}/_{3}$ do $^{15}/_{10}$
28) „ 10000 „ 6% „ $^{6}/_{1}$ „ $^{1}/_{4}$
29) rs. 6480 „ 5% za dni 108
30) „ 4750 „ 4% „ $^{4}/_{1}$ do $^{4}/_{5}$
31) ℳ 3600 „ $3\frac{1}{2}$% od $^{15}/_{2}$ do $^{5}/_{7}$
32) rs. 678 „ $4\frac{1}{2}$% „ $^{4}/_{7}$ „ $^{24}/_{9}$
33) £ 180 „ 2% „ $^{3}/_{5}$ „ $^{17}/_{7}$
34) fs. 900 „ 4% „ $^{3}/_{1}$ „ $^{14}/_{5}$

§ 85.

Obliczanie procentu od kilku kapitałów razem. Jeżeli mamy znaleźć procent od kilku kapitałów procentujących przez czas rozmaity po jednakowéj stopie, można obliczenia te połączyć w jedno.

Procent bowiem od kapitałów K, K', K'' za dni C, C', C'' przy stopie s%, któréj odpowiada dzielnik stały D, jest:

$$P=\frac{KC}{D}+\frac{K'C'}{D}+\frac{K''C''}{D}=\frac{KC+K'C'+K''C''}{D},$$

otrzymamy przeto szukany procent, jeżeli summę liczb procentowych podzielimy przez stały dzielnik.

Przykłady:

1) Procent od rs. 1246,27 za dni 38, rs. 2723 za dni 65, rs. 974 za dni 87 po 4%.

Kap.	l. dni	l. proc.
1246,27	38	473
2723	65	1770
974	87	847
		3090 : 9
		34;33 rs.

2) Kapitały 1386 rs., 2000 rs., 875,50 rs., 1500 rs., wypożyczone $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{7}$, $^{23}/_{8}$ i $^{11}/_{9}$ po $7\frac{1}{2}$% ile przynoszą procentu do 30 grudnia:

kapit.	l. dni	l. proc.
1386	267	3701
2000	175	3500
875,50	127	1112
1500	109	1635
		9948 : 6
	6%	165,80
	$1\frac{1}{2}$%	41,45
		207,25 rs.

Wspólne obliczenie procentu od kilku kapitałów przeprowadzić się daje i wtedy, jeżeli stopy są różne; bierzemy za podstawę pewną stopę procentową, np. 6%, i właściwe poprawki dokonywamy na każdéj z liczb procentowych,—tak np.

3) Ile procentu odbierzemy 1 lipca, od kapitałów:

728	rs. wypożyczonych	$\frac{7}{2}$	po $5\frac{1}{2}$%
2000	„ „	$\frac{17}{4}$	„ 6%
1560	„ „	$\frac{25}{4}$	„ 7%
1000	„ „	$\frac{16}{5}$	„ $6\frac{1}{2}$%
1000	„ „	$\frac{5}{6}$	„ $4\frac{1}{2}$%

Kapit.	dni	l. proc.	÷	+
728	143	1041	87	
2000	73	1460		
1560	65	1014		169
1000	44	440		37
1000	25	250	63	
		4205	150	206
	+	206		
		4411		
	÷	150		
		4261 : 6		
		71,02 rs.		

W obliczeniu tém przyjęliśmy stopę 6 za podstawę i według tego wprowadzaliśmy poprawki do liczb procentowych. Pierwsza stopa jest $5\frac{1}{2}$, różniąca się od 6 o $\frac{1}{12}.6$, dla tego od liczby procentowéj 1041 odejmujemy jéj $\frac{1}{12}$ część. Podobnież do l. pr. 1014 dodajemy jéj $\frac{1}{6}$, do l. pr. 440 jéj $\frac{1}{12}$, a od l. pr. 250 odejmujemy jéj $\frac{1}{4}$ część; poprawki do dodania zarówno jak i do odjęcia razem zbieramy i wprowadzamy do sumy liczb procentowych, a tak poprawiona ostatecznie ta suma po podzieleniu przez 60 daje żądany procent.

Obliczanie zresztą procentów od kilku kapitałów po różnych stopach rzadko się przytrafia, a wtedy dochodzenie procentu od każdego oddzielnie kapitału nie przedstawia zapewne więcéj pracy.

Zadania.

1) Ile wynosi suma procentów od kapitałów:

Rs. 345 za 45 d., rs. 1275 za 85 d.
„ 575 za 171 d., rs. 340 za 93 d.
„ 720 za 340 d., rs. 1550 za 151 d.

wszystkie po $6\frac{3}{4}$%.

2) Ile odbierzemy procentu 30 grudnia od kapitałów: rs. 1948,60 wypożyczonych 17 lutego, rs. 876,75—7 kwietnia, rs. 3000—14 kwietnia, rs. 1760—8 lipca, rs. 2068—19 października, rs. 5000—3 grudnia—po $5\frac{1}{4}$%.

3) Wypożyczamy kapitały: rs. 3450 d. 5 lipca po $4\frac{1}{2}$%, rs. 710 d. 8 września po 5%, rs. 450 d. 15 września po $6\frac{1}{2}$%, rs. 6000 d. 17 listopada po 4% i rs. 4500 d. 17 kwietnia roku następnego po $7\frac{1}{2}$%; ile odbierzemy procentu d. 1 lipca.

4) Ile odbierzemy procentu od: fs. 2365,86 za dni 43 po $3\frac{1}{2}$%, fs. 1943,27 za dni 61 po 2%, fs. 3716,80 za dni 74 po $3\frac{3}{4}$, fs. 1400 za dni 117 po 3%, fs. 2568,74 za dni 123 po $2\frac{1}{4}$%, fs. 2000 za dni 146 po $1\frac{1}{2}$% i fs. 945,50 za dni 187 po 4%?

5) Podobnie od kapitałów: rs. 633 za 5 miesięcy po 6%, rs. 2600 za $2\frac{1}{2}$ m. po 5%, rs. 4300 za $4\frac{1}{2}$ m. po 2%, rs. 1875 za $7\frac{1}{2}$ m. po $5\frac{1}{4}$%, rs. 1200 za 8 m. po $7\frac{1}{4}$%.

§ 86.

Obliczanie procentów za pewną liczbę dni, jeżeli rok liczy się po dni 365. W niektórych miejscach, jak np. w Anglii, zwłaszcza w stosunkach urzędowych, rok przyjmuje się za dni 365. Wzór zasadniczy na obliczanie procentów za pewną liczbę dni jest w tym razie $P = \frac{KCs}{36500}$; rozumie się, że miesiące liczą się tu po tyle dni, ile rzeczywiście mają. Obliczanie to jest zapewne słuszniejszém, aniżeli powszechnie przyjmowane uważanie roku za dni 360 a miesięcy po dni 30, prowadzi jednak do wypadków mało różnych. Tak np. procent od $\mathcal{M}$ 4500 po 6% od 18 sierpnia do 23 grudnia (dni 127 — § 84) uczyni $\frac{4500 \times 127 \times 6}{36500} = 93{,}95$ $\mathcal{M}$, który to procent jest tylko o 20 ₰ większym od procentu 93,75 $\mathcal{M}$, znalezionego powszechnie używanym sposobem dochodzenia procentów. Trudności natomiast rachunkowe są tu o wiele większe, bo nie ma tu dla żadnéj stopy dogodnego dzielnika stałego; najlepiéj jeszcze brać tu za podstawę stopę 5%, dla któréj dzielnik wynosi 7300. Powyższe zatém zadanie wykona się:

$$
\begin{array}{lr}
 & 4500 \times 127 \\
 & \overline{5715} \\
 & \overline{} : 73 \\
5\% \ \ldots\ldots & 78{,}29\ \mathcal{M} \\
1\% \ \ldots\ldots & 15{,}66 \\
 & \overline{93{,}95}\ \mathcal{M}
\end{array}
$$

W Anglii obliczają często procenty sposobem innym, który dla jego oryginalności tu przytoczymy: Do iloczynu powstałego z pomnożenia kapitału przez liczbę dni i podwojoną stopę procentową dodaje się część trzecią, trzydziestą (t. j. dziesiątą część trzeciéj) i trzechsetną (t. j. dziesiątą część trzydziestéj); w sumie téj odcina się 5 cyfr na dziesiętne i dwie ostatnie odrzuca, a nakoniec trzecią cyfrę dziesiętną zmniejsza się o tyle jedności, ile dziesiątków zawiera się w części całkowitéj (to ostatnie działanie wychodzi na odjęcie od liczby znalezionéj jéj dziesięciotysięcznéj części). Tak ostatecznie otrzymany wypadek daje nam procent szukany.

Postępowanie to objaśni się tym sposobem. $P = \frac{KCs}{36500} = \frac{KC.2s}{73000}$; oznaczywszy dla skrócenia $KC.2s = A$, mamy $P = \frac{1}{73000}$ czyli $P = 0{,}00001369863\ A$. Do tego zaś właśnie wypadku prowadzi nas wyżéj opowiedziane postępowanie; według tego bowiem otrzymujemy najpierw $A + {}^1/_3 A + {}^1/_{30} A + {}^1/_{300} A = 1\,{}^{111}/_{300}\ A = 1{,}37\ A$. W liczbie tak powstałéj odcinamy 5 ostatnich cyfr na dziesiętne, czyli innemi słowy, dzielimy ją przez 100000, mamy zatém $0{,}0000137\ A$, od téj zaś liczby odejmujemy jéj ${}^1/_{10000}$ część, — otrzymujemy więc: $(0{,}0000137 - 0{,}00000000137)\ A = 0{,}00001369863\ A$, a tyle właściwie wynosi procent, jakeśmy to wyżéj znaleźli. Tak np. £ 476.8.6 po $4\,{}^1/_2\%$ za dni 287.

£ 876.9.6 d.
9,5
876,475 × 287 × 9
1752950 2583
438238
70118
2629
A 2263935
$\frac{1}{3}A$ . . . 754645
$\frac{1}{30}A$ . . 75464
$\frac{1}{300}A$ . . 7546
31,01590
31,016
3
31,013 £
£ 31.3 d.

Ten sam procent obliczony sposobem wyżéj podanym:

£ 876.9.6
876,475 × 287
251548 : 73
5% . . . 34,459 £
$\frac{1}{2}$% . . . 3,446
4$\frac{1}{2}$% . . 31,013 £
£ 31.3 d.

Z a d a n i a.

Obliczyć procenty od kapitałów:

1) £ 468.5 sh. po $3\frac{1}{3}$% za dni 117
2) £ 1715 po $2\frac{1}{4}$% za dni 236
3) £ 243.8.9 d. po $4\frac{3}{4}$% od $^3/_2$ do $^{26}/_8$
4) £ 594.10 sh. po $1\frac{3}{4}$% od $^{27}/_9$ do $^3/_2$.

§ 87.

Obliczanie procentów przy stopie miesięcznéj. Niekiedy, lubo rzadko, oznacza się stopa procentowa nie odnośnie do roku ale do miesiąca (*pro mese*, *p. m.*); tak np. $\frac{1}{2}\%$ p. m. znaczy tyleż, co 6% w zwykłém rozumieniu. Można przeto stopę miesięczną zamieniać przy obliczeniach na zwykłą, albo też obliczać procent od danego kapitału za 1 miesiąc, a ztąd przechodzić do danéj liczby dni. Tak np. procent od rs. 728 po $\frac{1}{3}\%$ p. m. za dni 145.

	726 rs.
1 m. . . .	2,42 rs.
120 d. . .	9,68
15 „ . .	1,21
10 „ . .	81
	11,70 rs.

Zadania.

Obliczyć procenty od:

1) rs 468,53 po $\frac{1}{2}\%$ p. m. za $5\frac{1}{2}$ m.
2) ℳ 745,60 „ $\frac{5}{8}\%$ p. m. za 39 dni
3) fl. 476,72 po $\frac{3}{8}\%$ p. m. od $\frac{13}{7}$ do $\frac{11}{10}$
4) fs. 2086 po $\frac{5}{8}\%$ p. m. od $\frac{3}{11}$ do $\frac{1}{2}$.

§ 88

Dochodzenie kapitału. Kapitał wynajdujemy ze wzoru

$$K = \frac{100P}{Cs},$$

gdzie zamiast liczby 100 znajdować się będzie 1200 lub 36000, jeżeli C oznacza miesiące lub dnie. Wzór ten do żadnych ułatwień ogólnych nie prowadzi,—korzystném być przeto może użycie do znalezienia kapitału proporcyi, jako formy dogodniejszéj do przeprowadzenia uproszczeń.

Przykłady:

1) Jaki kapitał przyniósł procentu rs. 68,76 po $4\frac{1}{2}\%$ za 146 d.?

?	
146	68,76
	100
$4\frac{1}{2}$	360
	3767,67 rs.

2) Jaki kapitał wydał 525 rs. procentu od 2 stycznia do 15 kwietnia po $7\frac{1}{2}\%$?

Od $^{2}/_{1}$ do $^{15}/_{4}$ dni 103, 15 w 525 zawiera się 35 razy, zatem

$$35 . 2 . 36000 = 2520000$$

$$2520000 : 103$$

$$\text{rs. } 24466$$

Zadania.

Od jakich kapitałów otrzymujemy procenty:

1) rs. 126	po 6%	za $1\frac{1}{2}$ roku		
2) „ 76,73	„ $8\frac{1}{4}\%$	„ $3\frac{3}{5}$ „		
3) £ 12.13.7	„ $2\frac{1}{2}\%$	„ $^{5}/_{6}$ „		
4) rs. 720	„ $7\frac{1}{4}\%$	„ 3 miesiące		
5) fr. 21,85	„ $6\frac{1}{5}\%$	„ $7\frac{1}{2}$ „		
6) ℳ 1350	„ $4\frac{1}{5}\%$	„ $11\frac{3}{4}$ „		
7) fr. 37,50	„ $3\frac{3}{4}\%$	„ 84 dni		
8) ℳ 945,95	„ 7%	od $^{18}/_{9}$ do $^{23}/_{5}$		
9) rs. 842,42	„ $6\frac{3}{4}\%$	„ $^{28}/_{2}$ „ $^{31}/_{10}$		
10) rs. 42,30	„ $5\frac{3}{4}\%$	„ $^{3}/_{9}$ „ $^{26}/_{10}$		
11) £ 31.3 d.	„ $4\frac{1}{2}\%$	za dni 287	}	(rok=365 dni
12) £ 7.6.5	„ $2\frac{1}{4}\%$	od $^{13}/_{11}$ do $^{4}/_{3}$	}	

§ 89.

Dochodzenie stopy procentowéj oparte jest na wzorze $s = \frac{100K}{KC}$, do którego stosuje się toż samo, co wyżéj powiedziano,—a że tu nie trzeba będzie poszukiwać w ogólności więcéj nad 2 cyfry dziesiętne, będzie można przeto korzystać z dzielenia skróconego.

Przykłady:

1) Na ile % umieszczonym był kapitał 748,84 rs., jeżeli w ciągu $4\frac{1}{4}$ miesiąca przyniósł 11,94 rs. procentu?

$$\frac{11{,}94 \times 1200}{14328} \qquad \frac{748{,}84 \times {}^{17}/_{4}}{3182{,}57}$$

$$14328 : 318|2{,}58$$

$$159 \quad 4{,}5$$

$$4\tfrac{1}{2}\%$$

2) Przy jakiéj stopie kapitał 728,80 rs. przyniósł w ciągu 89 dni 10,35 rs. procentu?

$$\frac{36000 \times 10{,}35}{372600} \qquad \frac{728{,}80 \times 89\ (100-11)}{\begin{array}{r}801680 \\ \hline 64863{,}20\end{array}}$$

$$\begin{array}{rl} 3726 : & 648|6 \\ \cline{2-2} 483 & 5{,}74 \\ \cline{2-2} 29 & \\ 3 & 5^{3}/_{4}\% \end{array}$$

Zadania.

Przy jakiéj stopie otrzymano od kapitału:

1) rs. 425 w ciągu $1^{3}/_{4}$ lat rs. 37,19 procentu
2) rs. 5000 „ $3^{1}/_{2}$ „ „ 825,75 „
3) fr. 3425,20 „ 2 lat 5 mies. fs. 312,15 proc.
4) $\mathcal{M}$ 2436,12 „ 3 l. 5 m. 2 dni $\mathcal{M}$ 459,39 pr.
5) $\mathcal{M}$ 3256,48 „ 9 m. 24 dni $\mathcal{M}$ 126,20
6) £ 125.17.16 d. „ 2 l. 5 m. 21 dni £ 22.15.16.
7) rs. 546,75 od $^{15}/_{1}$ do $^{23}/_{3}$ rs. 4,86
8) rs. 632,50 „ $^{1}/_{7}$ do $^{26}/_{10}$ rs. 12,13
9) fr. 526,15 „ $^{26}/_{5}$ do $^{23}/_{8}$ fr. 4,85
10) $\mathcal{M}$ 1025 „ $^{13}/_{1}$ do $^{1}/_{3}$ $\mathcal{M}$ 27,68
11) £ 215.8 s. „ $^{2}/_{1}$ do $^{31}/_{3}$ £ 3.2 s. } rok=366
12) £ 105.10 s. „ $^{13}/_{6}$ do $^{26}/_{11}$ £ 2.8 s. } dni.

§ 90.

Dochodzenie czasu polega na wzorze $C = \frac{100P}{Ks}$. Ze związku tego otrzymywana wartość na C wyraża lata; przez przyjrzenie się liczbom danym łatwo ocenić, czy czas szukany stanowić będzie tylko pewną liczbę dni, wtedy, wprowadziwszy do licznika zamiast 100 liczbę 36000, otrzymujemy odpowiedź wprost w dniach, unikając ułamku roku.

Przykłady:

1) W ciągu ilu lat rs. 3450 przyniosło dochodu rs. 621 po 6%.

$$\frac{3450 \times 6}{20700} \qquad 62100 : \underline{20700} \atop 3 \text{ lata}$$

2) Za jaki czas odebrano rs. 8,53 procentu od kapitału 569 rs. wypożyczonego na 5%?

Ponieważ kapitał 569 rs. w ciągu roku przynosi przeszło 28 rs. procentu, szukać tu przeto będziemy liczby dni.

$$\frac{8{,}53 \times 36000}{306080} \qquad \frac{569 \times 5}{2845}$$

$$306080 : \underline{2845}$$
$$\underline{107{,}6}$$
$$108 \text{ dni}$$

3) Kapitał 3000 rs. wypożyczony 17 kwietnia na 7% przyniósł 150 rs. procentu; którego dnia był zwrócony?

$$\frac{3000 \times 7}{21000} \qquad \frac{150 \times 36000}{5400000}$$

$$\frac{5400 : 21}{257 \text{ dni} = 8 \text{ m. } 17 \text{ d.}}$$

termin przeto wypłaty przypadł w 8 m. 17 dni po 17 kwietnia, t. j. 4 stycznia roku następnego.

Zadania.

Za jaki czas otrzymujemy od

1) rs. 576,25	po $5\frac{1}{2}$%	rs. 25,50	procentu
2) rs. 1276,33	„ 6%	„ 230,50	„
3) fr. 6842,50	„ $6\frac{1}{2}$%	fr. 785,50	„
4) ℳ 1045,30	„ $4\frac{3}{4}$%	ℳ 110,45	„
5) rs. 450	„ 6%	rs. 52,45	„
6) „ 304,40	„ $6\frac{1}{4}$%	„ 5,25	„
7) fr. 3000	„ $3\frac{3}{4}$%	fr. 72	„
8) fl. 2600	„ $4\frac{1}{5}$%	fl. 374,75	„
9) £ 245,15 s.	„ $2\frac{1}{2}$%	£ 3.10 s.	„
10) £ 876.9.6 d.	„ $4\frac{1}{2}$%	£ 31.3 d.	„

§ 91.

Kapitał powiększony o procenty. Jeżeli z danego kapitału znaleźć mamy wartość, jaką on nabierze po pewnym czasie wraz z narosłemi procentami, otrzymujemy to wprost przez obliczenie procentów i dodanie ich do kapitału; można jednak znaleźć bezpośredni związek między kapitałem normalnym a powiększonym.—Oznaczmy kapitał powiększony o procenty przez W, t. j. $W=K+P$, C zaś niech oznacza lata, tak, że gdy czas dany jest w miesiącach lub dniach, wyrażać go będziemy w ułamku roku. Kapitał zatem 100 po czasie C nabiera wartości $100+Cs$, mamy więc

$$\begin{array}{c|c} W & K \\ 100 & 100+Cs \end{array}$$

zkąd (1) $W=\dfrac{K(100+Cs)}{100}$

Kapitał ten powiększony o procenty często być może punktem wyjścia rachunku: znając wartość kapitału wraz z procentami, dochodzić możemy kapitału pierwotnego czyli wypożyczonego albo procentów w tym kapitale danym zawartych.

Z proporcyi powyższéj otrzymujemy

(2) $K=\dfrac{100\,W}{100+Cs}$

Co do procentu, takowy otrzymać możemy z proporcyi:

$$\begin{array}{c|c} P & W \\ 100+Cs & Cs \end{array}$$

(3) $P=\dfrac{WCs}{100+Cs}$

Zkąd téż wypływający związek:

(4) $W=\dfrac{P(100+Cs)}{Cs}$

mógłby posłużyć do znalezienia kapitału wraz z procentami, — co w każdym razie otrzyma się łatwiéj, szukając kapitału normalnego i do takowego dodając procent dany.

Z powyższych wzorów, albo też łatwiéj ze znanych związków

$$C=\frac{100P}{Ks},\; s=\frac{100P}{KC},$$

pamiętając, że $K=W-P$, $P=W-K$, wypada:

(5) $C=\dfrac{100\,(W-K)}{Ks}$ (7) $s=\dfrac{100\,(W-K)}{KC}$

(6) $C=\dfrac{100\,P}{(W-P)\,s}$ (8) $s=\dfrac{100\,P}{(W-P)\,C}$

Wzory te służą do wynajdywania czasu i stopy procentowéj z danego kapitału powiększonego i normalnego, lub z kapitału powiększonego i procentu.

Nie należy zapominać, że we wzorach tych miesiące lub dnie dane są w ułamku roku; jeżeli zaś C oznaczać ma rzeczywiście miesiące lub dnie, to, jak łatwo znaleźć, liczba 100 winna być zastąpioną przez 1200 lub 36000. W ogólności wszakże korzystniéj będzie do obliczań użyć w każdym razie proyorcyi.

§ 92.

Dochodzenie kapitału pierwotnego i procentu z kapitału powiększonego zachodzi w ogóle wtedy, gdy idzie o znalezienie obecnéj wartości kapitału, przypadającego do zapłaty po pewnym czasie. Rozumie się, że kapitał spłacany przed terminem wypłaty ma wartość mniejszą o procent za cały czas, jaki ma jeszcze upłynąć do terminu wypłaty; procent ten nazywa się *eskontem* czyli *dyskontem*, a operacye handlowe, mające na celu spłatę kapitału przed terminem—*eskontowaniem*, *dyskontowaniem* t. j. *potrącaniem procentu*. Ustępujący czyli przedający kapitał płatny po pewnym dopiero czasie przez dyskontowanie otrzymuje wcześniéj potrzebną mu gotówkę, nabywający zaś kapitał taki otrzymuje przez to możność zyskiwania procentu od kapitału, którym w danéj chwili rozporządza.

Rozwiązanie zadania tego polega na użyciu wzorów (2) i (3) § poprzedzającego, dogodniéj jednak odbywa się przez użycie proporcyi.

Przykłady:

1) Jaką jest obecna wartość kapitału 1500 rs. przypadającego do zapłaty po upływie $1\frac{1}{2}$ roku, a dyskontowanego po 7%?

Skoro 100 rs. przynosi 7 rs. przez rok, zatém przez $1\frac{1}{2}$ roku przynosi 10,5; mamy przeto

$$\begin{array}{r|l} ? & 1500 \\ 110{,}5 & 100 \\ \hline & 1357{,}47 \text{ rs.} \end{array}$$

Do tegoż samego rezultatu moglibyśmy dojść, szukając procentu i odejmując go od kapitału danego.

$$\begin{array}{r|l} ? & 1500 \\ 110{,}5 & 10{,}5 \\ \hline & 142{,}53 \text{ rs.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1500 \quad \text{rs.} \\ 142{,}53 \\ \hline 1357{,}47 \text{ rs.} \end{array}$$

Dla sprawdzenia obliczmy wartość kapitału 1357,47 rs. po upływie $1\frac{1}{2}$ roku.

	1357,47
7% za 1 r.	95,02
„ „ $^1/_2$ r.	47,51
	1500,00

2) Dyskontując 3 marca kapitał 11000 rs. płatny 26 czerwca po 5%, ile otrzymamy?

Od $^3/_3$ do $^{26}/_6$ dni 113; stopa procentowa zredukowana do dni 113 daje

?	113
360	5
	$1^{41}/_{72}$

zatem

?	11000
$101^{41}/_{72}$	100
	10830,03 rs.

Sprawdzenie:

	10830,03 rs.
proc. 5% za dni 72	108,30 „
„ „ „ 36	54,15 „
„ „ „ 4	6,02 „
„ „ „ 1	1,50 „
	11000,00 rs.

Dyskontowanie takie jest istotnie słusznem, prowadzi jednak do rachunków zawiłych. W zwykłych stosunkach handlowych postępuje się nie według powyższych ścisłych zasad, ale wprost procent do potrącania oblicza się od danego kapitału. W pierwszym zatém z powyższych przykładów szukana wartość kapitału dyskontowego będzie:

	1500 rs.
÷ {7% za 1 rok	105
„ „ $^1/_2$ „	52,50
	1342,50 rs.

W drugim:

	11000 rs.
÷ {5% za dni 72	110
„ „ „ 36	55
„ „ „ 4	6,11
„ „ „ 1	1,53
	10827,36 rs.

Przy takiém przeto dyskontowaniu wartość kapitału płatnego przed terminem wypada mniejszą niż istotnie wynosić powinna, ale że w stosunkach handlowych dyskontowanie kapitałów za czas dłuższy nad cztery miesiące przytrafia się rzadko, różnica przeto nie jest znaczna, przy istotném ułatwieniu rachunkowém. Pierwszy sposób dyskontowania zowie się *dyskontowaniem na sto* lub *matematyczném*, drugi *od stu* lub *kupieckiém*.

Zadania.

Ile otrzymuje się za następne kapitały dyskontowane:

1) rs. 7000	po 8%	za $3\frac{3}{4}$ lata		
2) ℳ 3800	„ $4\frac{1}{2}$%	„ 17 miesięcy		
3) fr. 8500	„ $7\frac{3}{4}$%	„ $1\frac{2}{5}$ roku		
4) rs. 3000	„ 5%	„ 56 dni		
5) fr. 1300	„ $4\frac{1}{4}$%	„ 23 dni		
6) rs. 450	„ 5%	od $^{26}/_{1}$	do $^{19}/_{5}$	
7) fl. 780	„ $3\frac{1}{2}$%	„ $^{23}/_{5}$	„ $^{31}/_{10}$	
8) ℳ 1200	„ $2\frac{3}{4}$%	„ $^{1}/_{10}$	„ $^{28}/_{2}$	
9) rs. 600	„ $8\frac{1}{2}$%	„ $^{15}/_{12}$	„ $^{1}/_{3}$	
10) rs. 4000	„ 7%	„ $^{3}/_{7}$	„ $^{15}/_{9}$	
11) £ 125 15 s.	„ 3%	„ $^{17}/_{4}$	„ $^{15}/_{8}$	rok = 365 dni
12) £ 200	„ $2\frac{1}{4}$%	„ $^{3}/_{12}$	„ $^{1}/_{4}$	

§ 93.

Dochodzenie stopy procentowéj i czasu opiera się na wzorach (5), (6), (7) i (8) § 91, dogodniéj wszakże radzić sobie proporcyą; w ogólności w zadaniach tych trzeba będzie rozwiązywać dwie proporcye: jedna da nam poznać procent od stu za cały czas wypożyczenia kapitału, druga doprowadzi nas do stopy procentowéj lub liczby dni.

Przykłady:

1) Za 624 rs. płatne po 6 miesiącach zapłacono 600 rs., po jakiéj stopie dyskontowano?

$$\begin{array}{r} 624 \\ -\ 600 \\ \hline 24 \end{array}\ \text{rs. procentu} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 100 \\ 600 & 24 \\ \hline & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 12 \\ 6 & 4 \\ \hline & 8\% \end{array}$$

2) Za 11000 rs. płatne 26 czerwca wypłacono 3 marca 10830,03 rs., po jakiéj stopie dyskontowano.

Od 3 marca do 26 czerwca dni 113.

11000	?	100	?	360
÷10830,03	10830,03	169,97	113	1,57
169,97 rs. pr.		1,57		5%

3) Za 11000 rs. zdyskontowane po 5% zapłacono 3 marca 10830,03 rs., którego dnia kapitał ten był płatny?

11000	?	1000	?	1,57
÷10830,03	10830,03	169,97	5	360
169,97 rs. proc.		1,57		113 d.

Kapitał był przeto płatny w 113 d. po 13 marca, t. j. 26 czerwca.

4) 23 lutego 1878 r. zapłacono 400 rs. za wypożyczone 350 rs. po 5%,—kiedy kapitał ten był wypożyczony?

400	?	100	?	$14^2/_7$
÷350	350	50	5	1
50 rs. proc.		$14^2/_7$		$2^6/_7$ roku

$2^6/_7$ lat = 2 lat. 10 m. 9 d., — kapitał zatém wypożyczony został 14 kwietnia 1875 r.

Zadania.

1) Na ile od sta wypożyczono 2000 rs., jeżeli po 8 miesiącach odebrano 2200 rs?

2) Po jakim czasie odebrano 150 rs. za 125 rs. wypożyczone po 8%?

3) 17 kwietnia zapłacono 2000 fr. za 1950 fr. wypożyczone po 6%; kiedy takowe były wypożyczone?

4) 1 października 1876 roku pożyczono ₤ 2450 po $4^1/_2$%; kiedy kapitał ten wraz z procentami wzrósł do ₤ 2494.2s? (1 rok=365 d).

5) Po jakiéj stopie procentowéj wypożyczone były 1 listopada 2000 rs., jeżeli 2 stycznia roku następnego odebrano za nie 2021 rs. 67 kop?

6) Pożyczono ℳ 3960 na 5%; 23 czerwca oddano ℳ 4000; kiedy kapitał ten był wypożyczony?

Rozdział VIII.

Reguła spółki.

§ 94.

Reguła spółki ma na celu podzielenie liczby danéj na części proporcyonalne do innych liczb danych. Podzielić liczbę A w stosunku liczb $m:n:p$ znaczy, znaleźć takie trzy liczby x, y, z, którychby suma czyniła A, i któreby czyniły zadosyć warunkowi: $m:n:p=x:y:z$, czyli, co na jedno wychodzi, warunkowi: $m:x=n:y=p:z$.

Rozwiązanie osiągamy na téj zasadzie, że w szeregu stosunków równych suma poprzedników tak się ma do sumy następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika [1])

[1]) Zasada ta jest rozwinięciem własności proporcyi, przypomnianéj w § 62.

Uważmy szereg stosunków równych:

$$a:b=c:d=f:g=h:k$$

Z dwu pierwszych stosunków

$$a:b=c:d$$

otrzymujemy

$$a+c:b+d=c:d$$

A że $c:d=f:g$, zatém $a+c:b+d=f:g$

Zkąd znów wypływa: $a+c+f:b+d+g=f:g$,

W podobny sposób daléj:

$$a+c+f+g:b+d+g+k=a:b=c:d=\ldots$$

Według tego bowiem mamy, pamiętając, że $x+y+z=A$:

$$\begin{aligned} m+n+p : A &= m : x \\ &= n : y \\ &= p : z, \end{aligned}$$

z którychto proporcyj łatwo wyprowadzić ogólny sposób wynajdywania liczb szukanych; dogodniéj jednak używać w każdym razie proporcyj, na których łatwiéj dokonywać się dają możliwe uproszczenia.

Reguła spółki znajduje główne zastosowanie przy podziale zysków pomiędzy spólników, należących do spółki z rozmaitemi wkładami. W zadaniach takich liczby m, n, p przedstawiają oddzielne wkłady, A zaś ogólny zysk; możemy wtedy powiedzieć, że wkład ogólny tak się ma do ogólnego zysku, jak wkłady szczególne do odpowiednich zysków.

Zresztą reguła spółki znajduje zastosowanie i w wielu innych przypadkach,—przy podziale spadków, konkursach (t. j. podziale mas upadłości), przy ubezpieczeniach, rozkładzie podatków, w rachunkach towarowych, gdy idzie o proporcyonalne rozłożenie kosztów na różne artykuły i t. d.

Niekiedy zachodzi potrzeba rozkładania liczby danéj na części proporcyonalne, zależne od dwu lub więcéj warunków; w najprostszym np. przypadku będzie to miało miejsce, gdy wkłady spólników użyte są do wspólnego przedsiębierstwa przez czas różny. Ztąd zwykło się uważać *regułę spółki pojedyńczą* i *złożoną*.

§ 95.

Reguła spółki pojedyńcza. Ogólny sposób rozwiązywania odnoszących się tu zadań polega na powyższych wyjaśnieniach. Dodać tu tylko należy, że niekiedy stosunki, według których podział ma być dokonanym, nie są dane wyraźnie i muszą być wyprowadzane z warunków zadania.

Przykłady:

1) 1800 rs. podzielić między trzy osoby w stosunku $1 : 3 : 5$.

Suma liczb $1+3+5=9$; zatém 9 tak się ma do 1800, jak 1, 3 i 5 do liczb szukanych, t. j.

$$\begin{array}{r|l} ? & 1 \\ 9 & \underline{1800} \\ \hline & 200 \text{ rs.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 3 \\ 9 & \underline{1800} \\ \hline & 600 \text{ rs.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 5 \\ 9 & \underline{1800} \\ \hline & 1000 \text{ rs.} \end{array}$$

Suma $200+600+800$ rs. $=1800$ rs.

Albo téż, ponieważ liczby 1, 3 i 5 stanowią $^1/_9$, $^3/_9$ i $^5/_9$ swéj sumy, przeto można znaleźć szukane części 1800 rs., biorąc kapitału tego $^1/_9$, $^1/_3$ i $^5/_9$, t. j.

$^1/_9 . 1800$ rs.$=200$ rs., $^1/_3 . 1800$ rs.$=600$ rs. i $^5/_9 . 1800$sr.$=$ 1000 rs.

2) Trzéj kupcy przedsięwzięli na wspólny rachunek pewnę operacyę handlową, do któréj przystąpili z wkładami: *A* rs. 1500, *B* rs. 2254, *C*. rs. 2560; zarobili na tém 1200 rs. i zyskiem tym dzielą się w stosunku swych wkładów; ile każdy otrzyma?

$$\begin{array}{lrr} A & 1500 & ? \\ B & 2254 & 6314 \\ C & \underline{2560} & \\ & 6314 & \end{array} \quad \begin{array}{|lr} 1500 & ? \\ \underline{1200} & 6314 \\ 285{,}08 \text{ rs.} & \end{array} \quad \begin{array}{|lr} 2254 & ? \\ \underline{1200} & 6314 \\ 428{,}38 \text{ rs.} & \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2560 \\ \underline{1200} \\ 486{,}54 \text{ rs.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A-285{,}08 \text{ rs.} \\ B-428{,}38 \text{ ,,} \\ C-\underline{486{,}54 \text{ ,,}} \\ \quad 1200{,}00 \text{ rs.} \end{array}$$

3) Spółka komandytowa składa się z trzech uczestników, z których A wniósł rs. 3000, B rs. 4000, C rs. 5000 na kapitał spółki. Po zamknięciu bilansu rocznego okazuje się czysty zysk rs. 3600;— ile otrzymuje każdy spólnik?

$$\begin{array}{llr} A & 3000 \text{ czyli po uproszczeniu} & 3 \\ B & 4000 & 4 \\ C & \underline{5000} & \underline{5} \\ & 12000 & 12 \end{array}$$

Zatem A otrzymuje $^3/_{12}$, B $^4/_{12}$, C $^5/_{12}$ zysku:

$$\begin{array}{lll} A & ^1/_4 . 3600 \text{ rs.} = & 900 \text{ rs.} \\ B & ^1/_3 . 3600 \text{ ,,} = & 1200 \text{ ,,} \\ C & ^5/_{12} . 3600 \text{ ,,} = & \underline{1500 \text{ ,,}} \\ & & 3600 \text{ rs.} \end{array}$$

4) Liczbę 980 podzielić w stosunku $^1/_2 : {}^3/_5 : {}^3/_7$.

Zamiast wprost do zadania stosować ogólne sposoby rozwiązania, dogodniéj będzie stosunki dane wyrazić w liczbach całkowitych:

$^1/_2 : {}^3/_5 : {}^3/_7 = {}^{35}/_{70} : {}^{42}/_{70} : {}^{30}/_{70} = 35 : 42 : 30$

$$\begin{array}{l|l} ^1/_2 & 35 \\ ^3/_5 & 42 \\ ^3/_7 & 32 \\ \hline & 107 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 35 \\ 107 & 980 \\ \hline & 320^{60}/_{107} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 42 \\ 107 & 980 \\ \hline & 384^{72}/_{107} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 30 \\ 107 & 980 \\ \hline & 274^{32}/_{107} \end{array}$$

5) Spadek 13000 rs. ma być według rozporządzenia testatora tak rozdzielonym między trzech spadkobierców, aby pierwszy otrzymał $^1/_2$, drugi $^1/_3$, trzeci $^1/_4$ spadku.

Gdyby suma ułamków $^1/_2+^1/_3+^1/_4$ czyniła 1, warunki testamentu łatwo byłoby spełnić, ale suma ta czyni $1^1/_{12}$; rozumieć przeto należy, że wolą testatora było podzielić majątek w stosunku ułamków $^1/_2 : ^1/_3 : ^1/_4$.

$$\begin{array}{l|l} & 12 \\ \hline ^1/_2 & 6 \\ ^1/_3 & 4 \\ ^1/_4 & 3 \\ \hline & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{Udział} & \text{1 go } ^6/_{13}.1300 = & 600 \text{ rs.} \\ \quad ,, & \text{2-go } ^4/_{13}.1300 = & 400\ ,, \\ \quad ,, & \text{3 go } ^3/_{13}.1300 = & 300\ ,, \\ \hline & & 1300 \text{ rs.} \end{array}$$

6) Podzielić liczbę 100 na takie trzy części, aby pierwsza miała się do drugiéj, jak 2 : 3, druga do trzeciéj jak 2 : 5.

Aby stosunki te złączyć w jeden ciąg, dosyć sprowadzić następnik stosunku drugiego do równości z poprzednikiem pierwszego, co osiągamy, pomnożywszy wyrazy stosunku pierwszego przez 2, wyrazu drugiego przez 3; pierwszy wtedy stosunek wychodzi na 4 : 6, drugi na 6 : 15; zadanie zatém sprowadza się do podzielenia 100 na trzy części w stosunku 4 : 6 : 15. A że 4+6+15=25, zatém:

$$\begin{array}{ll} \text{część 1-a} \ldots & ^4/_{25}.100=16 \\ \quad ,,\ \text{2-a} \ldots & ^6/_{25}.100=24 \\ \quad ,,\ \text{3-a} \ldots & ^3/_5\ .100=60 \\ \hline & \qquad 100 \end{array}$$

7) Spadek 24000 rs. ma być tak podzielonym między trzy osoby, aby B otrzymała połowę tego co A więcéj 1000 rs., C tyle co A i B razem, mniéj 1800 rs. Ile każda otrzymuje?

Tu należy najpierw oznaczyć sumę przypadającą do podziału, t. j. ze spadku strącić wszystkie naddatki każdego spadkobierca, a dodać zawarunkowane strącenia.

$$\begin{array}{r} 24000 \\ -\ 1000 \\ \hline 23000 \\ +\ 1800 \\ \hline 24800 \end{array} \qquad \begin{array}{ll|l} A \ldots & 1 & 2 \\ B \ldots & ^1/_2 & 1 \\ C \ldots & ^3/_2 & 3 \\ \hline & & 6 \end{array}$$

zatém

A . . .	$^1/_3$ 24800 rs.			8266,67 rs.
B . . .	$^1/_6$ 24800 ,,	4133,33 + 1000	. .	5133,33 ,,
C . . .	$^1/_2$ 24800 ,,	12400 — 1800	.	10600 ,,
				24000,00 rs.

8) Trzem swoim synowcom, z których najstarszy ma lat 21, drugi 15, trzeci 12, zapisuje stryj 9600 rs. tak, aby podział nastąpił w stosunku odwrotnym wieku; ile na każdego wypada?

Podział zatém ma być dokonany w stosunku odwrotnym liczb 21 : 15 : 12, czyli w stosunku prostym liczb 12 : 15 : 21:

12	4	najstarszy	$^1/_4$.9600 rs.	= 2400 rs.
15	5	drugi	$^5/_{16}$.9600 ,,	= 3000 ,,
21	7	trzeci	$^7/_{16}$.9600 ,,	= 4200 ,,
	16			9600 rs.

Zadania.

1) Rs. 4800 tak podzielić na cztery części, aby te miały się między sobą w stosunku 2 : $2^1/_2$: 3 : 4?

2) Towar zakupiony na wspólny rachunek przez trzy osoby za 6000 rs. sprzedanym został z zyskiem 1260 rs., jaki udział otrzyma każda z nich w zysku, jeżeli pierwsza złożyła 3000 rs. druga 2000, trzecia 1000 rs?

3) Cztery osoby mają się tak podzielić kapitałem 5692,50 rs., aby pierwsza otrzymała $^1/_5$, druga $^2/_9$, trzecia $^3/_{11}$, a czwarta resztę. Ile na każdą przypada?

4) Czterech spólników zyskuje na pewném przedsiębierstwie 1550 rs. A. miał w niém udział 4500 rs., B. 2700 rs., C. 1800 rs., D. 2160 rs.; ile każdy z zysku otrzyma?

5) Trzy osoby mają się podzielić sumą 117,50 rs. w stosunku liczb $^2/_3$, $^3/_8$ i $^5/_6$, ile każda otrzyma?

6) Kupiec upadły winien jest trzem wierzycielom 5400 rs., 6300 rs. i 7200 rs. Jeżeli po strąceniu kosztów sądowych massa upadłości wynosi 2100 rs. ile każdy wierzyciel otrzymuje i ile % każdy traci?

7) Kupiec sprowadza pięć różnych towarów, za *a*) 2476,80 fr. *b*) za 1876,50 fr. *c*) 846 fr. *d*) 3184,75 fr. *e*) 1251,92 fr. Koszta kupna i sprowadzenia wynoszą 476,38 fr. i są proporcyonalne do wartości

towarów; jak rozłożyć te koszta na wszystkie powyższe towary? (Najlepiéj użyć obliczenia procentowego).

8) Po ukończeniu przedsiębierstwa handlowego, na którém stracono 3020 rs., otrzymali zwrotu czteréj wspólnicy: A. 5900 rs., B. 7800 rs., C. 8000 rs., D. 8500 rs.; ile każdy stracił i ile każdy złożył na kapitał przedsiębierstwa?

9) Do pewnego przedsiębierstwa przystępuje A z kapitałem 10000 rs., B 38000 rs., C zaś chce tyle złożyć, aby miał $^5/_8$ udziału; ile ma wynosić wkład jego?

10) Trzech właścicieli otrzymuje po pożarze wsparcie 875 rs. Jak mają się niém podzielić, jeżeli A poniósł 400 rs., B 900 rs. straty, C zaś stracił wszystko; własność A oszacowaną była na 3600 rs., B na 2700 rs., C na 1750 rs.? (Podział winien być dokonanym nie w stosunku strat istotnych a względnych, t. j. za podstawę podziału wziąć należy część, którą każdy z majątku swego utracił).

4) Cztery gminy pragną wspólnym nakładem wystawić most, którego koszt obliczonym jest na 1200 rs.; koszta te rozłożone być mają na gminy w stosunku odwrotnym ich odległości od mostu; ile więc każda ma zapłacić, jeżeli odległości te wynoszą $^1/_2$, 1, 2 i 2$^1/_2$ mili?

12) Czterech uczestników trzyma wspólnie ćwiartkę losu loteryi Królestwa Polskiego, na numer ich pada wygrana 8000 rs.; jeżeli pierwszy opłacał 50 kop. drugi 60 kop. trzeci tyle, co obaj poprzedni razem a czwarty resztę, jak mają się podzielić wygraną, jeżeli od wygranych potrąca się na rzecz skarbu i kollektora w Warszawie 15% a na prowincyi 16%, ćwiartka zaś losu kosztuje 3 rs. 06 kop.

13) Czterech spólników, których wkłady do pewnego przedsiębierstwa pozostawały w stosunku 3 : 5 : 9 : 13 rozwiązuje spółkę w chwili, gdy stan kasy po odliczeniu wkładów okazuje zysku 12860 rs. Pierwszemu jednak należy się z kassy oprócz jego wkładu rs. 380, drugiemu 1867 rs. a czwarty winien jest kasie 796 rs.; ile każdy otrzymuje?

14) Suma pewna ma być między trzy osoby tak podzieloną, aby A otrzymał 20 rs. więcéj nad jéj część czwartą, B piątą część reszty, a C pozostałe 120 rs.—ile każdy otrzymuje?

15) Na kapitał zakładowy i obrotowy pewnego przedsiębierstwa potrzeba 60000 rs.; do utworzonéj w tym celu spółki przystępuje czterech uczestników, z których pierwszy wnosi 10000 rs., drugi 12500 rs.

w listach zastawnych miasta Warszawy, przyjętych po kursie 91,10 rs. (za 100 rs.), trzeci 15000 rs. w listach likwidacyjnych Królestwa Polskiego przyjętych po kursie 85,40 rs., a czwarty część pozostałą. Prowadzenie tego przedsiębierstwa powierzono dyrektorowi, któremu jako wynagrodzenie zapewniono 12% tantyemy. Po zamknięciu bilansu dyrektor otrzymuje 1600 rs. Jaki był zysk ogólny i zysk każdego uczestnika, oraz ile % wynosi po odliczeniu wynagrodzenia dyrektora?

16) Przedsiębierstwo akcyjne z kapitałem zakładowym 4500000 rs. miało w ciągu roku 325000 rs. zysku, z czego 3% obraca się na tantyemę dla zarządu, 10% reszty na kapitał rezerwowy. Ile % wynosi dywidenda przypadająca do podziału; ile dywidendy otrzymuje akcyonaryusz mający akcyj tego towarzystwa w nominalnéj wartości 35000 rs. i jak się procentuje kapitał jego w tych akcyach umieszczony, jeżeli takowe kupowane były po kursie $82\frac{1}{2}$ za sto?

17) Na założenie fabryki daje A. 9000 rs., B. 15000 rs., C. 20000 rs.; dyrektor otrzymuje 1000 rs. pensyi rocznéj i piątą część czystego zysku. Jeżeli więc całkowity zysk roczny wynosi $1\frac{1}{4}\%$, ile otrzymuje dyrektor, a ile % i ile rs. traci każdy ze spólników?

18) Trzy gminy wnieść mają opłatę 1200 rs. w stosunku swéj ludności; ile ma każda zapłacić, jeżeli stosunek ludności gminy pierwszéj do drugiéj jest jak 11 : 8, a pierwszéj do trzeciéj jak 9 : 7?

19) Podzielić liczbę 579 na cztery części takie, aby pierwsza miała się do drugiéj jak 2 : 3, druga do trzeciéj jak $1 : \frac{4}{5}$, a pierwsza do czwartéj jak $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$.

20) Cztery osoby mają się spadkiem podzielić tak, aby pierwsza otrzymała $\frac{1}{5}$ i £ 50; druga $\frac{1}{6}$ i £ 100, trzecia $\frac{1}{7}$ i £ 200; dla czwartéj pozostało £ 700; jaki był spadek i ile każda otrzymała?

§ 96.

Reguła spółki złożona zachodzi, gdy liczby szukane zależą od dwu lub więcéj warunków; połączenie takich warunków w jeden jest rzeczą łatwą i polega na tychże zasadach, co w regule trzech złożonéj; 700 rs. na 3 miesiące mają tu znaczenie takież, jak 2100 rs. na 1 miesiąc, lub 1 rs. na 2100 miesięcy; 5 ludzi pracujących przez 4 dni zastąpić tu można 20 ludźmi pracującymi przez 1 dzień, lub 1 robotnikiem pracującym przez 20 dni; jeżeli w ciągu 5 dni wykonanych być może 20 sążni pewnéj roboty, to przez 1 dzień wyrobi się 4 sążnie i t. d. Jeżeli w taki sposób warunki dane połączymy w jeden, zadanie rozwiąże się według postępowania, wskazanego w § poprzedzającym.

Przykłady:

1) Do pewnego przedsiębierstwa daje A. 15000 rs. na 7 miesięcy, B. 7000 rs. na 6 miesięcy, C. 3000 rs. na 10 miesięcy; jak podzielić się mają zyskiem osiągniętym 5900 rs.?

			3
A.	15000 rs. na 7 m. . .	$15\times 7=105$	35
B.	7000 „ na 6 „ . . .	$7\times 6=42$	14
C.	3000 „ „ 10 „ . . .	$3\times 1=42$	10
			59

zatém

A . . . . $\frac{35}{59}.5900=3500$ rs.
B . . . . $\frac{11}{59}.5900=1400$ „
C . . . . $\frac{10}{59}.5900=1000$ „
5900 rs.

2) Fabryka przedaje dwa postawy sukna jednakowego gatunku za 918 *M*; postaw pierwszy zawiera 60 łokci sukna szerokiego na $2\frac{1}{4}$ ł., drugi 48 ł. sukna szerokiego na $2\frac{1}{2}$ ł.; ile wypada za każdy postaw?

	15
$60\times \frac{9}{4}=135$	9
$48\times \frac{5}{2}=120$	8
	17

$$\frac{9.918}{17}=486\ M$$
$$\frac{8.918}{17}=\frac{432}{918\ M}$$

3) 1757 korcy zboża oddaje się trzem młynom do zmielenia. Jeżeli pierwszy zemleć może 4 korce w ciągu trzech godzin, drugi 5 korcy w ciągu 4 godzin, a trzeci 8 korcy w ciągu 5 godzin, ile korcy należy dostawić do każdego młyna, aby robota ukończoną była jednocześnie, i w jakim czasie zboże zostanie zmieloném?

W zadaniu tém rozdział zboża między młyny winien być dokonanym w stosunku szybkości ich pracy, t. j. w stosunku ilości zboża, jaką zemleć mogą w ciągu godziny; zatém:

		60	
1) 4 kor. w ciągu 3 g., na 1 g.	$\frac{4}{3}$	80	$\frac{80}{251}\times 1757=560$ kor.
2) 5 „ „ 4 „ „ „	$\frac{5}{4}$	75	$\frac{75}{251}\times 1757=525$ „
3) 8 „ „ 5 „ „ „	$\frac{8}{5}$	96	$\frac{96}{251}\times 1757=672$ „
		251	1757 „

Dla znalezienia czasu potzebnego na zmielenie zboża we wszystkich trzech młynach dosyć zauważyć, że w ciągu godziny zemleć mogą $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{8}{5}=\frac{251}{60}$ korcy, całą zatém ilość 1757 k. w ciągu $1757:\frac{251}{60}=420$ godzin.

Zadania.

1) 1 stycznia zakłada A przedsiębierstwo z kapitałem 25000 rs. 1 marca przybiera spólnika B, który wnosi 14000 rs., 1 czerwca A odbiera z kassy 6000 rs., 1 sierpnia wstępuje nowy wspólnik z kapitałem 8000 rs., 1 września B wnosi dodatkowo 4000 rs. Przy zamknięciu obrachunków rocznych i po wypłaceniu uczestnikom 6% od ich wkładów okazuje się czysty zysk rs. 9690. Ile wynosił zysk całkowity i ile każdy ze spólników otrzymuje?

2) Trzech spólników straciło 780 rs. na przedsiębierstwie, na które A dał 640 rs. przez $9\frac{1}{3}$ miesiąca, B 1020 rs. przez $8\frac{1}{2}$ miesiąca, C 1000 rs. przez 4 m.; ile wynosi strata każdego?

3) Na wystawienie mostu, którego kosztorys oznaczonym jest na 9580 rs., złożyć się ma 5 gmin, — w stosunku liczby domów i w stosunku odwrotnym odległości ich od zamierzonego mostu. Pierwsza z tych gmin położona w odległości $\frac{1}{2}$ mili ma 750 domów, druga w odległości 1 mili ma 2700 domów, trzecia—$1\frac{1}{2}$ mili—1800 domów; czwarta—2 mile—500 domów, piąta—$2\frac{1}{2}$ mili— 3000 domów; ile winna każda gmina zapłacić?

4) Za przewóz 5600 Kgr. zapłacono 768 fs. Z tego jedna partya towaru—1684 Kgr. przewiezioną została mil 64; druga — 1960 Kgr. — 48 mil, a część pozostała 56 mil; ile wynosi zapłata za każdą z tych partyj?

5) Przy pewnéj robocie fortyfikacyjnéj pracowało w jedném miejscu 240 robotników przez 18 dni, w drugiém 150 robotników przez 12 dni, w trzeciém 180 rob. przez 11 dni, w czwartém 90 rob. przez 15 dni, w inném jeszcze 60 rob. przez dni 14. Zapłata wynosiła

rs. 6945,75; ile otrzymał każdy oddział robotników i ile wynosił zarobek dzienny każdego?

6) Dla armii potrzeba w czasie jak najkrótszym 5400 łokci sukna; dostawy téj podejmują się trzy fabryki. Pierwsza przyrzeka w ciągu 4 dni dostarczyć 400 ł., druga w ciągu 4 dni 240 ł., a trzecia w ciągu 8 dni 320 łokci. Ile łokci należy zamówić w każdéj fabryce i w ciągu ilu dni cała dostawa będzie ukończoną?

Rozdział IV.

Reguła mieszaniny.

(*Rachunek aligacyjny*).

---

§ 97.

Reguła mieszaniny znajduje zastosowanie w zadaniach odnoszących się do mieszania materyałów rozmaitéj wartości lub dobroci, w celu otrzymania materyału wartości lub dobroci pośredniéj. Rozwiązywanie tych zadań polega zawsze na przypuszczeniu, że wartość produktu przez zmięszanie otrzymanego równa się wartości materyałów, z których utworzonym został.

Przy mieszaniu niektórych cieczy, jak np. alkoholu z wodą, następuje zawsze pewne zagęszczenie; jeżeli zatém wódka jest mierzoną na objętość, a nie na wagę, to przy rozcieńczaniu jéj wodą następuje pewna strata na mierze; zagęszczenie to jest nawet dosyć znacznem, bo 50 litrów czystego alkoholu z 50 litrami wody dają nie 100, a tylko 96,377 litrów wódki, tak że w 100 litrach takiéj wódki znajduje się nie 50 a 51,88 litrów alkoholu. Przy dokładniejszych zatém obliczeniach okoliczność tę uwzględniać należy.

Zadania stanowiące przedmiot reguły mieszaniny dają się podzielić na trzy kategorye: 1) Utworzenie mieszaniny wedle danego przepisu; 2) oznaczenie wartości mieszaniny utworzonéj z danych ilości materyałów znanéj wartości, i 3) oznaczenie ilości danych materyałów, potrzebnych na utworzenie mieszaniny oznaczonéj wartości.

Pierwszy dział tych zadań nie wymaga zresztą żadnych objaśnień, idzie tu bowiem jedynie o podział liczby danéj w stosunku innych liczb danych, co podchodzi pod zasady reguły spółki.

Tak np. metal najłatwiéj topliwy (topiący się już przy 70°) otrzymuje się przez stopienie 3 części kadmu, 4 cz. cyny, 15 części bizmutu i 8 cz. ołowiu; ile należy użyć każdego z tych metali do utworzenia 6 funtów tego stopu?

3 kadmu	....	$\frac{1}{10}.6=\frac{3}{5}$	funtów kadmu
4 cyny	....	$\frac{2}{15}.6=\frac{4}{5}$	„ cyny
15 bizmutu	......	$\frac{1}{2}.6=3$	„ bizmutu
8 ołowiu	......	$\frac{4}{15}.6=1\frac{3}{5}$	„ ołowiu
30		6	funtów stopu.

§ 98.

Oznaczenie wartości mieszaniny utworzonéj z danych materyałów trudności także żadnych nie przedstawia; postępowanie objaśnią przykłady:

1) Kupiec miesza 11 garncy wina po 3 rs., 8 g. po 2 rs. 50 kop., 20 g. po 2 rs. 25 k.; po czemu wypada garniec wina tak utworzonego?

10 g.	po 3 rs.	30 rs.
8 „	„ 2,50 rs. ...	20 „
20 „	„ 2,25 „ ..	45 „
38 g.		95 rs.

38 garncy kosztują 95 rs., 1 przeto garniec $\frac{95}{38}=2{,}50$ rs.

Szukana zatém wartość jednostki mieszaniny otrzymuje się, znajdując sumę iloczynów z ilości zużytych materyałów przez ich ceny i dzieląc ją przez sumę ilości tychże materyałów.

2) Jakiéj próby otrzymamy srebro przez stopienie 8 funtów srebra próby 81 z 1 funtem miedzi?

Próbą metali drogich nazywamy stosunek czystego srebra lub złota, zawartego w danym stopie, do ogólnéj wagi tego stopu (alijażu); złoto bowiem i srebro na wyroby (i monety) nie używają się nigdy czyste, a w połączeniu z miedzią.—Dla ułatwienia w oznaczaniu próby przyjmuje się za jedność pewną stałą liczbę, do któréj się ilość drogiego metalu odnosi. W większéj części Europy aż do ostatnich czasów przyjmowano za jedność grzywnę kolońską = 233,855 grama i dzielącą się—dla złota na 24 karaty po 12 granów, dla srebra zaś na 16 łutów po 18 granów. W obu więc razach grzywna dzieli się na 288 granów. Według tego, stop np. złota zawierający $^3/_4$ złota a $^1/_4$ miedzi, jest złotem 18 próby czyli złotem 18 karatowém, a stop srebra i miedzi, zawierający także $^3/_4$ srebra jest srebrem 12 próby czyli 12 łutowém. Sposób ten oznaczania próby przetrwał u nas do czasu wprowadzenia jednostki obowiązującéj w Rossyi, t. j. funta rosyjskiego z jego podziałem na 96 zołotników po 96 doli. Ponieważ $16 = {}^1/_6 . 96$, a $24 = {}^1/_4 . 96$, przejście przeto od próby dawnéj do rosyjskiéj polega dla srebra na pomnożeniu przez 6, dla złota przez 4; srebro np. próby 12 będzie według oznaczenia rosyjskiego próby 72, złoto próby 14 będzie próby ros. 56.

W Niemczech za jednostkę przyjętym jest obecnie funt 500 gramowy, noszący tu nazwę f. monetarnego (*Münzpfund*) i dzielący się na 1000 części; stosunek zatém metalu drogiego w stopie podaje się w częściach tysiącznych,—srebro np. próby 72 wyrazi się przez próbę 750. W tysiącznych również częściach wyraża się próba we Francyi, Włoszech, Belgii, Holandyi i w Austryi, gdzie za jednostkę przyjętym jest kilogram. W Wielkiéj Brytanii jednostką jest troy-funt, który dla złota dzieli się na 24 karaty po 4 grany, dla srebra zaś na 12 uncyj (*ounces, oz.*) po 20 *pennyweight* (*dwts*), próba jednak oznacza się przez odniesienie do metalu, z którego bije się monety angielskie a zwanego *standard*. Takowy dla złota ma próbę 22 karatów czyli $^{11}/_{12}$, dla srebra 222 dwts. czyli $^{37}/_{40}$. Próba wyższa oznacza się głoskami B (*better* lepsze) lub M (*more* więcéj), niższa przez W (*worse* gorsze), dla złota mianowicie w karatach i granach, dla srebra w oz. i dwts. Tak np. złoto W2 gr. jest o 2 gr. gorszém, złoto M3 gr. jest o 3 grany lepszém od złota standard, pierwsze jest zatém $21^1/_2$, drugie $22^3/_4$ karatowém; srebro B 12 dwts jest o 12 dwts lepszem, srebro W $1^1/_2$ dwts o $1^1/_2$ dwts gorszém od srebra standard, pierwsze jest zatém próby 234 dwts, drugie $220^1/_2$ dwts.

Miedź stanowi metal próby 0, dany tu przeto przykład rozwiąże się, jak poprzedni, uważając próbę srebra za jego wartość:

8 funtów srebra próby	81	. . .	648
1 „ „ „	0	. . .	0
9 „			648

próba więc szukana$=\frac{648}{9}=72$, która odpowiada dawniejszéj próbie 12 i była dawniéj obowiązującą dla wyrobów srebrnych; obecnie wyroby te u nas winny posiadać próbę 84.

3) Przyrządzamy mieszaninę 4 wiader wódki 60%, 5 wiader wódki 50% i 1 wiadra wody, — iloprocentową będzie wódka otrzymana?

Wartość wódki zależy od ilości zawartego w niéj alkoholu; zawartość ta oznacza się obecnie procentowo, rozumiejąc przez wódkę 100% alkohol czysty; woda zatem w zadaniu powyższém uważaną być winna za wódkę 0%. Do oznaczenia ilości alkoholu w wódce służą areometry, zwane w szczególności alkoholometrami.

4	wiadra wódki 60% . . .	240
5	„ „ 50% . . .	250
1	„ „ 0% . . .	0
10		490 : 10
		49%

Właściwie jednak, z powodu zagęszczenia następującego przy mieszaniu, objętość nowo utworzonéj wódki będzie mniejszą niż 10 wiader, procentowość jéj zatém wyższa nad 49%.

Zadania.

1) Argentan (nowe srebro) składa się z 53,4 części miedzi, 29,1 cynku i 17,5 niklu; ile każdego z tych metali użyć należy dla otrzymania 10 funtów nowego srebra?

2) Iloprocentową wódkę otrzymujemy przez mieszanie w równych ilościach wódki 70%, 60%, 50% i wody?

4) Stapiamy $2\frac{1}{2}$ łuta złota 18 karatowego z 3 łutami złota 21 karatowego i 1 łutem miedzi; jakiéj próby wypada ztąd złoto?

5) Jakiéj próby otrzymamy srebro przez stopienie 3 funtów srebra próby 84, 2 funtów próby 69 i 3 funtów próby 72?

6) Kupiec miesza 65 funtów herbaty po 2 rs. z 48 funtami po 1,20 rs.; po czemu ma przedawać funt tak zmieszanéj herbaty, aby zarobił 10%?

7) Stopiono następne gatunki srebra: 17,5 Kgr. próby 0,7, 5,23 Kgr. 0,75, 3,25 Kgr. 0,875, 23,5 Kgr. 0,545. Ile srebra czystego zawiera stop?

8) Złotnik stapia następne złote monety: 72 sztuki karolinów bawarskich ważące po 9,744 grama próby 916$^2/_3$ tys., 40 sztuk eagle'ów amerykańskich po 16,718 gr. pr. 0,9, 121 sztuk 10-skudowych po 17,336 gr. pr. 0,9; ile Kgr. czystego złota zawierać będzie stop i jakiéj będzie próby?

§ 99.

Dochodzenie ilości materyałów potrzebnych do utworzenia oznaczonéj mieszaniny stanowi zadanie, które drogą czysto arytmetycznych rozumowań wyjaśnić się nie da; znajomość jednak początków algebry wystarcza do zrozumienia następnych wywodów.

Zadania o których tu mowa, dają się ująć w następne ogólne zadanie: Z dwu materyałów, których cena jednostki wynosi a i b, utworzyć chcemy trzeci, któregoby cena jednostki była c; jakich ilości obu tych materyałów użyć należy?

Niech x oznacza szukaną ilość materyału pierwszego, y materyału drugiego; cena przeto użytéj ilości materyału pierwszego będzie ax, drugiego by; ilość materyału otrzymanego przez zmieszanie będzie $x+y$, a cena jego $c\,(x+y)$; ponieważ zaś wartośę tak otrzymanego materyału jest sumą wartości obu materyałów użytych, przeto:

(1) $ax+by=c\,(x+y)$.

Cena c koniecznie być musi pośrednią między cenami a i b; tak że jeżeli $a>b$ musi być $a>c$, a $c>b$.

Z równania (1) otrzymujemy

(2) $(a-c)\,x=(c-b)\,y$.

Równanie to zawiera dwie niewiadome, zadanie zatém, które do niego doprowadziło, jest niewyznaczoném, to jest może być rozwiązaném przez nieskończoną liczbę odpowiedzi. W istocie, obrawszy jakąkolwiek wartość na x, zawsze znaleźć możemy odpowiadającą wartość na y, tak że dwie te wartości uczynią równaniu zadosyć.

Aby znaleźć jednę taką odpowiedź, uważmy, że równaniu (2) uczynimy zadosyć, jeżeli położymy

(3) $x=c-b,\ y=a-c,$

wtedy bowiem równanie (2) daje:

$$(a-c)\,(c-b)=(c-b)\,(a-c),$$

gdzie widocznie strona pierwsza równą jest drugiéj.

Wyrażenia (3) wskazują przeto jedno rozwiązanie danego zadania: Jeżeli z materyału wyższego i niższego utworzyć mamy materyał pośredni, należy materyału wyższego wziąć ilość równą różnicy między ceną materyału pośredniego a niższego, materyału zaś niższego ilość równą różnicy między ceną materyału wyższego a pośredniego.

Dajmy np., że mamy dwa gatunki tytuniu, po 66 kop. i po 24 kop. za funt; chcemy utworzyć gatunek, któregoby funt wypadał po 54 kop., ile użyć należy każdego z gatunków danych?

66		30
	54	
24		12

Należy przeto gatunku pierwszego użyć 30 funtów t. j. 54—24, drugiego 12 funtów t. j. 66—54. Że powstała ztąd mieszanina rzeczywiście wypadać będzie po 54 kop., łatwo się przekonać:

30 funt.	po 66 kop.	1980 kop.
12 „	„ 24 „	288 „
42 „		2268 „
cena 1 funta	. . $^{2268}/_{42}=54$ kop.	

Zadanie to nazwaliśmy niewyznaczoném, bo rzeczywiście prowadzi ono do nieskończonéj liczby odpowiedzi, zamiast bowiem 30 funtów i 12 funtów, wziąć możemy 60 funtów i 24 funty, 90 funtów i 36 funtów, 15 funtów i 6 funtów, $7\frac{1}{2}$ funta i 3 funty i t. d. Niewyznaczoność ta jednak jest tylko pozorną, oba materyały bowiem mieszać możemy w jednym tylko stosunku 30 : 12 czyli 5 : 2, a tu właśnie o ten tylko stosunek idzie.

W takiém rozumieniu równanie (2) jest w istocie wyznaczoném, t. j. daje jednę tylko odpowiedź, co się pokaże, jeżeli je napiszemy w kształcie

$$\frac{x}{y}=\frac{c-b}{a-c}.$$

Jeżeli zatém idzie o mieszanie dwu tylko materyałów dla utworzenia trzeciego oznaczonéj wartości, mieszać je można w jednym tylko stosunku. Poznamy niżéj, że mieszanie więcéj niż dwu materyałów jest zadaniem istotnie niewyznaczoném.

Przykłady:

1) Z dwu gatunków pszenicy po rs. 8 i po rs. 9,75 za korzec utworzyć chcemy gatunek po rs. 9.

8		0,75	$^3/_4$	3
	9			
9,75		1	1	4

Mieszać przeto należy oba gatunki pszenicy w stosunku 3 : 4.

2) Ile miedzi dodać należy do srebra próby 84, aby otrzymać srebro próby 72

$$\begin{array}{ccc|c} 84 & & 72 & 6 \\ & 72 & & \\ 0 & & 12 & 1 \end{array}$$

Miedź dodawać przeto trzeba do danego srebra w stosunku 1:6.

Jeżeli idzie o otrzymanie oznaczonéj ilości nowego materyału, albo o znalezienie ilości materyału potzebnego do dodania do oznaczonéj ilości materyału drugiego dla otrzymania pewnéj mieszaniny, używamy w pomoc proporcyi:

3) Ze srebra 750 tysiącznego ($^{750}/_{1000}$) i 842 tys. chcemy wytopić 10 kilogramów srebra 800 tys., ile kilogramów każdéj z prób użyć należy.

$$\begin{array}{ccc|c} 750 & & 42 & 21 \\ & 800 & & \\ 842 & & 50 & 25 \\ \hline & & & 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ? & 10 \\ 46 & 21 \\ \hline & 4{,}565 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ? & 10 \\ 46 & 25 \\ \hline & 5{,}435 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}565 \\ 5{,}435 \\ \hline 10 \text{ Kg.} \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{array}{lccr} 4{,}565 \text{ Kgr.} & \times 750 & \ldots & 3424 \\ 5{,}435 \;\;,, & \times 842 & \ldots & 4576 \\ \hline 10 \text{ Kgr.} & & & 8000 \end{array}$$

$$\frac{8000}{10} = 800.$$

4) Ile wody dolać należy do 15 wiader wódki 78%, aby otrzymać wódkę 60%?

Przedewszystkiém szukamy, w jakim stosunku w ogólności mieszać należy wódkę 78% z wodą dla otrzymania wódki 60%.

$$\begin{array}{ccc|c} 78 & & 60 & 30 \\ & 60 & & \\ 0 & & 18 & 9 \end{array}$$

Na 30 więc wiader wódki potrzeba 9 wiader wody, na 15 zatém $4\frac{1}{2}$, co wypada z proporcyi

$$\begin{array}{r|l} ? & 15 \\ 30 & 9 \\ \hline & 4\frac{1}{2} \text{ wiader.} \end{array}$$

Zadania.

1) Kupiec potrzebuje dostarczyć wina po rs. 2 kop. 75 garniec, a że gatunku takiego nie posiada, w jakim stosunku winien zmieszać wino po rs. 3 kop. 60 z winem po 2 rs.?

2) Ze srebra 875 tys. i 760 tys. potrzeba otrzymać srebro 800 tys., ile trzeba wziąć każdego z nich?

3) Złotnik potrzebuje wyrobić przedmiot ze złota próby 88 i w tym celu stapia dukaty $23^2/_3$ karatowe z frydrychsdorami pruskiemi, które są $21^2/_3$ karatowe; w jakim stosunku będzie je stapiał?

3) W jakim stosunku dodać należy miedzi do srebra 14 łutowego, aby otrzymać srebro próby 12?

4) Ze złota czystego otrzymać chce złotnik wyrób próby 56; ile potrzeba złota i miedzi na puhar ważący 25 łutów?

5) Okowitę rozcieńczono tak wodą, że garniec téj wódki wypada po 1 rs. 80 kop.; w jakim stosunku mieszano okowitę z wodą, jeżeli garniec pierwszéj kosztował 2 rs. 26 kop?

6) W jakim stosunku dodawać należy miedź do srebra $13^1/_3$ łutowego, aby otrzymać srebro próby 72?

7) Srebro stare próby 72 potrzeba przerobić na srebro obowiązującéj obecnie próby 84; ile trzeba srebra czystego i srebra starego na wyrób ważący 10 funtów?

8) W jakim stosunku mieszać należy okowitę 90% z 60%, aby otrzymać 78%? A jeżeli z téj okowity otrzymać znów chcemy wódkę 50%, ile trzeba dolać wody dla otrzymania 6 garncy téj wódki?

9) Fabrykant posiada 16 ℔ srebra próby 12; ile potrzebuje dodać srebra czystego, aby otrzymał srebro próby 84?

10) Ile wody dolać trzeba do $4^1/_2$ wiader okowity 78%, aby otrzymać wódkę 56%?

11) Do naczynia zawierającego wódkę 70% dolano przez pomyłkę wody, tak że wódka probowana alkoholometrem okazuje się tylko 50%; ile wody dolano, jeżeli téj wódki jest 37 kwart?

12) Z 12 ℔ złota 937 tys. potrzeba otrzymać złoto 780 tys. Ile funtów trzeba tego złota pozostawić, a natomiast dodać miedzi, aby otrzymać znów 12 funtów złota 780 tys.? 2) Ile miedzi dodać należy do

całéj danéj ilości złota, aby otrzymać żądaną próbę, i ile ważyć będzie nowy stop?

13) Zmieszano dwa gatunki herbaty po 3 rs. i po 1,80 rs. funt, tak że otrzymano 32 funty po 2,75 rs. ile użyto każdego gatunku?

14) Kupiec otrzymał dwie baryłki wódki francuzkiéj, każda po 120 butelek; jedna kosztowała o 125 franków więcéj niż druga, a obie razem 500 fr. 180 butelek wódki utworzonéj przez mieszanie obu otrzymanych gatunków sprzedaje natychmiast po 3 franki; ile powinien był użyć do powyższéj mieszaniny butelek każdego gatunku, aby na każdéj butelce zarobił 75 centymów.

15) Kupiono 322 sztuki towaru za rs. 3582,25; sztuki te były po 12,50 rs. i po 8 rs., ile było jednych i drugich?

§ 100.

Jeżeli idzie o otrzymanie mieszaniny z większéj liczby gatunków danych, zadanie łatwo sprowadzić możemy do poprzedniego, mieszając zawsze po dwa gatunki, z którychby jeden był droższym, drugi tańszym od gatunku żądanego. Każda tak otrzymana mieszanina będzie żądanéj wartości, taką samą przeto wartość posiadać będzie i połączanie wszystkich tych mieszanin cząstkowych. Łatwo widzieć, że mieszanie to dokonywaném być może w sposób rozmaity, że zatém zadanie to mieć może znaczną liczbę rozwiązań, że jest istotnie niewyznaczoném.

Przykłady:

1) Z pięciu gatunków pewnego towaru, *a*) po 23 kop., *b*) 21 k., *c*) 12 kop., *d*) 9 kop., *e*) 5 kop. za 1 funt otrzymać chcemy gatunek po 16 kop. za 1 funt,—w jakim stosunku materyały te mieszać należy?

Mieszamy gatunek *a* z *c*, *b* z *d*, *b* z *f*:

a	23 4		4
b	21 . . . . 7+11		18
	. . . 16		
c	12 7		7
d	9 5		5
f	5 5		5

Mieszając gatunek *a* z *c*, winniśmy pierwszego wziąć 16—12=4 ℔, drugiego 23 — 16 = 7 ℔; podobnież żądana mieszanina *b* z *d* zawierać winna pierwszego 16—9=7, drugiego 21 — 16 = 5 ℔ a nakoniec mieszanina *b* z *f* składać się musi z 16—5 = 11 ℔ pierwszego i 21—16=5 ℔ drugiego. Łącząc zaś wszystkie te częściowe mieszaniny, widzimy, że należy użyć 4 funty gatunku *a*, 18 funtów *b*, 7 funtów *c*, 5 funtów *d*, 5 funtów *f*.

Sprawdzenie:

4 funty	po 23 kop.	92 kop.
18 „	„ 21 „	378 „
7 „	„ 12 „	84 „
5 „	„ 9 „	45 „
5 „	„ 5 „	25 „
39 „	. . . .	624

$$1 \text{ funt} \;.\;.\; \frac{624}{39}=16 \text{ kop.}$$

Albo też—mieszamy gatunek *a* z *c* i *d*, *b* z *f*:

a) 23	4+7	11
b) 21	11	11
. . . 16		
c) 12	7	7
d) 9	7	7
f 5	5	5

Sprawdzenie:

11 funtów	po 23 kop.	253 kop.
11 „	„ 21 „	231 „
7 „	„ 12 „	84 „
7 „	„ 9 „	63 „
5 „	„ 5 „	25 „
41 „	. . . .	656

$$1 \text{ funt} \;.\;.\;.\; \frac{656}{41}=16 \text{ kop.}$$

Albo—mieszamy gatunek *a* z *c*, *d* i *f*, *b* z *d* i *f*:

a) 23	4+7+11	22
b) 21	7+11	18
. . . 16		7
c) 12	7	
d) 9	7+5	12
f) 5	7+5	12

Sprawdzenie:

22	funtów po	23 kop. . . .	506 kop.
18	„ „	21 „ . . .	378 „
7	„ „	12 „ . . .	84 „
12	„ „	9 „ . . .	108 „
12	„ „	5 „ . . .	60 „
71	„		1136 kop.

$$1 \text{ funt} \ . \ . \ \frac{1136}{71} = 16 \text{ kop.}$$

Podobnież można tę mieszaninę żądaną i innemi jeszcze sposobami otrzymywać.

2) Otrzymać mamy 60 kilogramów srebra 750 tys. W tym celu użyć chcemy srebra *a*) 900 tys., *b*) 845 tys., *c*) 825 tys., *d*) 700 tys. i miedzi. Ile wziąć należy kilogramów każdego gatunku?

Łączymy *a* z *d*, *b* z miedzią, *c* z miedzią:

a) 900	50	50	5
b) 845	750	750	75
c) 825	750	750	75
750			
d) 700	150	150	15
miedź 0	95+75	170	17
			187

Zatém na 60 Kgr.:

a) $^{5}/_{187}.60 = 1^{113}/_{187}$

b) $^{75}/_{187}.60 = 24^{12}/_{187}$

c) $^{75}/_{187}.60 = 24^{12}/_{187}$

d) $^{15}/_{187}.60 = 4^{152}/_{187}$

miedzi $^{17}/_{187}.60 = 5^{85}/_{187}$

60 Kgr.

Sprawdzenie

$1^{113}/_{187}$	Kgr. próby	900 . .	$1443^{159}/_{187}$
$24^{12}/_{187}$	„ „	845 . .	$20334^{42}/_{187}$
$24^{12}/_{187}$	„ „	825 . .	$19852^{176}/_{187}$
$4^{152}/_{187}$	„ „	700 . .	$3368^{184}/_{187}$
$5^{85}/_{187}$	„ „	0 . . .	0
60			45000

$$\frac{45000}{60} = 750.$$

Albo też łączymy *a* z *d* i miedzią, *b* z *d*, *c* z *d* i miedzią:

a) 900	. . . . 50+750	800	160
b) 845	 50	50	10
c) 825	. . . . 50+750	800	160
750			
d) 700	. . . . 150+95+75	320	64
miedź 0	. . . . 150+75	225	45

Należy przeto dane gatunki srebra łączyć w stosunku 160 : 10 : 160 : 64 : 45, zkąd, jak wyżéj, otrzymać można ilości potrzebne do utworzenia 60 Kgr. srebra 750 tys.

§ 101.

Możemy też wskazać inny, dogodniejszy nieco sposób rozwiązywania tych zadań:

Dajmy, że z pięciu gatunków towaru, których ceny jednostki są a, b, c, d, f, utworzyć mamy gatunek, któregoby cena jednostki była g; szukamy ilości x, y, z, t, u każdego z danych gatunków, potrzebnych do utworzenia gatunku żądanego. Łatwo widzieć, że ilości te związane będą równaniem:

(1) $ax+by+cz+dt+fu=(x+y+z+t+u)\, g.$

Przyjmijmy, że ceny a i b są wyższe od g, ta zaś wyższa od c, d i f, i napiszmy równanie (1) w kształcie:

(2) $(a-g)\, x+(b-g)\, y=(g-c)\, z+ (g-d)\, t+ (g-f)\, u.$

Równanie to jest niewyznaczoném; aby znaleźć jedno rozwiązanie, połóżmy:

(3) $x=\dfrac{m}{a-g},\ y=\dfrac{n}{b-g},\ z=\dfrac{p}{g-c},\ t=\dfrac{b}{g-d},\ u=\dfrac{r}{g-f}.$

Wprowadziwszy tak obrane wartości (3) w równanie (2), poznamy łatwo, że uczynią one mu zadosyć, jeżeli ilości dowolne m, n, p, q, r wypełniają warunek

(4) $m+n=p+q+r.$

Ilości przeto szukane dają się wyrazić przez ułamki, których mianownikami są różnice między cenami danych materyałów a ceną materyału szukanego, licznikami zaś mogą być liczby jakiekolwiek, byleby czyniły zadosyć temu warunkowi, iżby suma liczników ilości materyałów wyższych była równą sumie liczników ilości materyałów niższych.

Przykład (1) z poprzedniego paragrafu tym sposobem rozwiązany daje:

23	7	$^{7}/_{7}$	1
21	5	$^{15}/_{5}$	3
16			
12	4	$^{4}/_{4}$	1
9	7	$^{7}/_{7}$	1
5	11	$^{11}/_{11}$	1

Liczby 7, 5, 4, 7, 11 są różnicami 23—16, 21—16, 16—12, 16—9, 16—5; liczby te przyjęliśmy za mianowniki, liczniki można było napisać dowolnie, byleby suma liczników przy materyałach wyższych była równą sumie liczników przy materyałach niższych, czemu właśnie czynią zadosyć liczby przez nas obrane, bo $7+15=4+7+11$. Materyały przeto dane można połączyć w stosunku $1:3:1:1:1$; rzeczywiście:

1 funt.	po 23 kop.	23 kop.
3 „	„ 21 „	63 „
1 „	„ 12 „	12 „
1 „	„ 9 „	9 „
1 „	„ 5 „	5 „
7 funt.		112 kop.

$$1 \text{ funt } \ldots \frac{112}{7}=16 \text{ kop.}$$

Aby mieć stosunki jak najprostsze, nadaliśmy ilościom materyałów niższych, których suma mianowników (różnic) jest większa, liczniki równe mianownikom, a sumę ich rozrzuciliśmy w sposób najdogodniejszy między materyały wyższe. Gdybyśmy tęż samą sumę 22 podzielili dla materyałów wyższych na liczby 21 i 1, stosunki materyałów użytych byłyby w stosunku $3:{}^{1}/_{5}:1:1:1$, czyli $15:1:5:5:5$.

Ten sposób rozwiązywania więcéj niż poprzedni ułatwia wprowadzanie różnych warunków, którym może ulegać żądana mieszanina. Tak np. gdyby w powyższém zadaniu dodano, że kupiec posiada tylko 3 funty po 23 kop. i 5 funtów po 12 kop. i takowe chce wszystkie użyć do mieszaniny; dosyć po temu dobrać by było takie liczniki dla obu wskazanych gatunków, aby ilości ich wynosiły 3 funty i 5 funtów.

23	7 . . . $^{21}/_{7}$	3
21	5 . . . $^{17}/_{5}$	$3^{2}/_{5}$
16		
12	4 . . . $^{20}/_{4}$	5
9	1 . . . $^{7}/_{7}$	1
5	11 . . . $^{11}/_{11}$	1

Wedle warunków zadania należało na liczniki gatunku 1-go i 3-go przyjąć liczby 21 i 20; ponieważ inne ilości nie ulegały warunkom, nadaliśmy gatunkowi 4-mu i 5-mu liczniki 7 i 11, przez co dla gatunku 2-go wypadł licznik 17, bo trzeba, aby $21+17=20+7+11$.

Rozwiążmy jeszcze tym sposobem drugie zadanie § poprzedzającego.

900	 150	$^{150}/_{150}$ . .	1
845	 95	$^{95}/_{95}$ . . .	1
825	 75	$^{75}/_{75}$ . . .	1
750			
700	 50	$^{50}/_{50}$ . .	1
0	 750	$^{270}/_{750}$	$^{9}/_{25}$

Można przeto dla otrzymania próby 750 tys. łączyć dane gatunki srebra w ilościach równych, dodając do tego stopu na każde 100 funtów użytego srebra 9 funtów miedzi.

Ponieważ przy mieszaniu dwu tylko gatunków możliwém jest jedno tylko rozwiązanie, przeto sposób ten prowadzić winien do tegoż samego wypadku, co sposób pierwszy.—W istocie, dajmy, że z gatunków po 17 i 9 kopiejek utworzyć chcemy gatunek po 14 kop.—w jakim stosunku gatunki te mieszać?

17	3 . . .	$^{10}/_{3}$ . . .	50	5
14				
9	5 . . .	$^{10}/_{5}$ . . .	30	3

Ponieważ tu jest jeden tylko gatunek wyższy i jeden niższy, należy liczniki przyjąć dla obu jednakowe, co zawsze prowadzi do stosunku 5 : 3, który też wypływa z pierwszego sposobu rozwiązania.

§ 102.

Nieco odmienniéj przedstawiają się zadania, w których idzie o *przymieszkę* pewnego materyału do danych ilości innych materyałów, jak w następnych przykładach.

1) Złotnik posiada 4 łuty złota 18 karatowego, 2 łuty 16 karatowego i 1 łut 8 karatowego; przez stopienie wszystkich tych gatunków z miedzią pragnie otrzymać złoto 14 karatowe; ile ma dodać miedzi?

Przedewszystkiém dochodzimy, jakiéj próby wypada złoto powstałe przez stopienie trzech danych gatunków, a następnie wynajdujemy ilość miedzi do dodania potrzebną.

4 łuty złota 18 kar	72
2 „ „ 16 „	32
1 „ „ 8 „	8
7 łutów	112

$$\frac{112}{7}=16$$

Przez stopienie zatém wypada złoto 16 karatowe.

16		12	3
	12		
0		4	1

Miedzi zatém dodać należy w stosunku 3 : 1, czyli na 7 łutów $^7/_3=2^1/_3$ łuta.

Sprawdzenie:

7 łutów złota 16 kar	112
$2^1/_3$ „ miedzi	0
$9^1/_3$	112

$$112 : 9^1/_3=12.$$

2) Fabrykant wyrobów srebrnych potrzebuje 12 ℔ srebra próby 75; jeżeli posiada $2^1/_2$ ℔ srebra próby 84, 5 ℔ próby 78 i 3 funty próby 60, jakiéj próby winno być srebro, które ma uzupełnić powyższą ilość srebra do żądanych 12 funtów?

$2^1/_2$ ℔ srebra próby 84	210
5 „ „ „ 78	390
3 „ „ „ 60	180
$10^1/_2$ ℔	780 części srebra

Potrzebuje 12 ℔ srebra próby 75 900
posiada $10^1/_2$ ℔ zawierających srebra części 780
winien przeto w $1^1/_2$ ℔ dodać srebra części . . 120; srebro to przeto jest próby $120 : 1^1/_2=80$.

Sprawdzenie:

$10^1/_2$ ℔ jak wyżéj	780
$1^1/_2$ „ próby 80	120
12 ℔	900

$$900 : 12=75.$$

Zadania.

1) Kupiec ma wino po fs. 50, fs. 60, fs. 70, fs. 80, fs. 100, fs. 200 za hektolitr; na sprzedaż potrzebuje wina po fr. 1,12 c. za litr; jak powinien wina te mieszać, jeżeli z każdego gatunku pragnie wziąć pewną ilość?

2) Złotnik potrzebuje złota 72 próby (rossyjskiéj); posiada zaś złoto 22, 20, 19 i 17 karatowe, a chce dla otrzymania żądanego stopu dodać i miedzi, ile z każdego gatunku użyje?

3) Ile złota 15, 17 i 22 karatowego stopić należy z 5 kilogramami złota 18 karatowego dla otrzymania złota 20 karatowego?

4) Ile pudów po 28, 24, 22, 21 i 20 rs. użyć potrzeba dla otrzymania przez zmieszanie 100 pudów po 25 rs.?

5) Mennica potrzebuje wytopić 200 kilogramów srebra próby $^9/_{10}$; ile Kgr. użyć winna ze srebra 759 tys., 780 tys., 800 tys., 825 tys., 920 tys. i 975 tys., jeżeli ilości pierwszych trzech gatunków mają się mieć między sobą w stosunku 3 : 4 : 5, ilości zaś drugich trzech mają być jednakowe?

6) Kupiono 42 tuziny trzech rozmaitych towarów; tuzin pierwszego kosztował rs. 4,45, drugiego rs. 3,30 a trzeciego rs. 1,30; jeżeli za wszystko zapłacono rs. 115,30, ile było tuzinów każdego towaru?

7) Ze srebra 14, 12, 8 i 7—łutowego otrzymać potrzeba srebro 10 łutowe; srebra 12 łutowego posiadamy $2^1/_2$ funta i ta cała ilość ma być do stopu użytą, ile dodać należy innych gatunków?

8) Z czterech gatunków towaru po 26 kop., 21 kop., 18 kop. i 10 kop. utworzyć mamy mieszaninę po 15 kop., trzy pierwsze towary mają być wzięte w stosunku 1 : 3 : 4, jakich ilości użyć każdego?

9) Z czterech gatunków towaru po rs. 10,50, rs. 9,50, rs. 6,75, rs. 5,25 za pud utworzyć mamy gatunek pośredni po rs. 8 za pud; użyte ilości towaru pierwszego i trzeciego mają być w stosunku 2 : 5; jakich ilości użyć potrzeba?

10) Złotnik posiada 3 grzywny złota $12^1/_2$ karatowego, 5 grzywien 13 karatowego i 2 grzywny $8^1/_2$ karatowego; ile zołotników miedzi winien dodać dla otrzymania złota 10 karatowego? (1 grzywna = 233,855 gramów).

11) Fabrykant wyrobów srebrnych potrzebuje $5^1/_2$ ℔ srebra

800 tys.; posiada on $1\frac{1}{2}$ funta srebra 720 tys., $\frac{3}{4}$ funta 640 tys., $\frac{1}{2}$ funta 600 tys. i $\frac{1}{4}$ funta srebra czystego, i tych wszystkich ilości używa do stopu; ile potrzebuje jeszcze dodać srebra 976 tys. i 756 tys., aby otrzymał powyższe $5\frac{1}{2}$ funta żądanéj próby?

12) Inny znów potrzebuje do 2 funtów srebra próby 72, 4 funtów próby 78 i 1 funta próby 48 dodać czystego srebra dla otrzymania srebra próby 84; ile tego srebra dodać winien?

13) Kupiec otrzymuje polecenie dostarczenia towaru po 30 kop. za 1 funt; w zapasie posiada tylko 30 funtów po 28 kop. i 15 funtów po 40 kop. Ile dodać musi funtów z następnych gatunków: po 28, 27, 20, 16, 14 i 8 kop. za 1 funt, jeżeli ilości tych towarów mają się mieć między sobą w stosunku 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6?

14) Do okowity 90% i 78% ile dolać wody, aby otrzymać wódkę 60%, ilości zaś obu użytych gatunków mają być w stosunku 1 : 2?

15) Do garnca okowity 78% dolewamy kwartę wódki 50%; ile dolać należy jeszcze wody, aby otrzymać wódkę 60%?

Rozdział X.

Średnia stopa procentowa i wspólny termin wypłaty.

§ 103.

Średnia stopa procentowa. Jeżeli wielkość jaka nie jest stałą a zmienną, t. j. ulega rozmaitym wartościom, mówić możemy o wartości średniéj czyli przeciętnéj. Wartość tę średnią znajdujemy, dzieląc sumę tych różnych wartości przez ich liczbę. Tak np. kupiono cztery gatunki pszenicy po rs. $8{,}02\frac{1}{2}$, rs. 8,70, rs. $9{,}82\frac{1}{2}$, rs. 10,15, to średnią wartość korca kupionéj przez nas pszenicy jest

$$\frac{8{,}02\frac{1}{2}+8{,}70+9{,}82\frac{1}{2}+10{,}15}{4}=\frac{36{,}70}{4}=9{,}17\frac{1}{2} \text{ rs.}$$

Wartość tę średnią obliczyliśmy jednak w przypuszczeniu, że kupiono jednakie ilości wszystkich tych gatunków. Jeżeli kupiono różne ilości takowych, rozumie się, że należy i na nie mieć wzgląd przy dochodzeniu wartości przeciętnéj korca. Dajmy np., że kupiono 6 korcy po $8{,}02\frac{1}{2}$ rs., 5 kor. po 8,70, 10 korcy po $9{,}82\frac{1}{2}$ rs. i 7 korcy po 10,15 rs.; to wtedy średnią wartość korca kupionéj przez nas pszenicy wynajdujemy, dzieląc cenę wszystkiéj pszenicy przez liczbę zakupionych korcy:

$$\frac{6\times 8{,}02\frac{1}{2}+5\times 8{,}70+10\times 9{,}82\frac{1}{2}+7\times 10{,}15}{6+5+10+7}=9{,}32 \text{ rs. (prawie).}$$

Oznaczanie wartości średniéj potrzebném jest w wielu okolicznościach; dochodzenie np. ceny jednostki mieszaniny (§ 98) jest właściwie tylko wynajdywaniem ceny średniéj.

Dochodzenie stopy średniéj nie wymaga bliższych objaśnień; rozróżnić zresztą możemy przypadki, gdy są równe kapitały lub czasy, lub téż gdy i wypożyczone kapitały i czasy są różne.

Przykłady:

1) Wypożyczył ktoś pięć równych kapitałów do końca roku po 4%, 5%, $5\frac{1}{2}$%, 6% i 7%; jaka jest średnia stopa procentowa?

$$\frac{4+5+5\frac{1}{2}+6+7\frac{1}{2}}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}\%?$$

To znaczy innemi słowy, że z wypożyczenia całego kapitału na $5\frac{3}{5}$% dochód jest takiż sam, jak z wypożyczenia pięciu jego równych części po oznaczonych stopach.

2) Wypożyczono rs. 1350 po $4\frac{1}{2}$%, rs. 2000 po 5%, rs. 1600 po 6%, rs. 600 po $7\frac{1}{2}$%,—wszystkie na czas jednakowy; jaka jest średnia stopa procentu?

rs.	1350	po $4\frac{1}{2}$%	6075
„	2000	„ 5%	10000
„	1600	„ 6%	9600
„	600	„ $7\frac{1}{2}$%	4500
	5550		30175

30175 : 5550=5,44% (prawie)

3) Kapitał 10000 rs. wypożyczono w równych częściach na 7 miesięcy po 6%, na $4\frac{1}{2}$ m. po 5%, na 8 mies. po $5\frac{1}{2}$% i na $6\frac{1}{2}$ m. po 7%; jaka jest średnia stopa procentu?

7	mies. . . .	6% . . .	42
$4\frac{1}{2}$	„ . . .	5% . .	$22\frac{1}{2}$
8	„ . . .	$5\frac{1}{2}$% . .	44
$6\frac{1}{2}$	„ . .	7% . . .	$45\frac{1}{2}$
26			134

4) Wypożycza ktoś 3 kwietnia 1760 rs. na 3 mies. po 4%, 2000 rs. do 18 lipca po 6%, 1500 rs. do 23 sierpnia po $5\frac{1}{2}$%,—jaka jest średnia stopa procentu?

				C	Cs
1760	na dni	90	po 4%	158400 . . .	623600
2000	„ „	105	„ 6%	210000 . .	1260000
1500	„ „	140	„ $5\frac{1}{2}$% . .	210000 . .	1155000
				578400 . . .	3038600

$$\frac{3038600}{578400}=5\frac{1}{4}\% \text{ (prawie).}$$

Łatwo wnieść, że ostatnie to zadanie nie ma istotnego znaczenia; nabiera ono większéj wartości praktycznéj, gdy zarazem oznaczyć należy średni termin wypłaty, o czém niżéj.

Bliższe uzasadnienie powyższego postępowania otrzymać możemy przez rozwiązanie zadania ogólnego: Kapitały K, K', K''... wypożyczone są na czasy C, C', C''.. po $s\%$, $s'\%$; $s''\%$: znaléźć średnią stopę procentową x, t. j. stopę, przy któréj procent od wszystkich powyższych kapitałów będzie takiż sam, jak przy stopie danéj.

Procenty przy stopach s, s', s'', są:

$$\frac{KCs}{100}, \quad \frac{K'C's'}{100}, \quad \frac{K''C''s''}{100}$$

przy stopie x:

$$\frac{KCx}{100}, \quad \frac{K'C'x}{100}, \quad \frac{''C''x}{100}\ldots$$

zatém:

$$KCS+K'C'S+K''C''s''=(KC+K'C'+K''C'')x$$

zkąd
$$x=\frac{KCs+K'C's'+K''C''s}{K+K'C'+K''C''}$$

W tym wzorze ogólnym, jeżeli położymy $K=K'=K''$.., albo $C=C'=C''$.., albo jedno i drugie zarazem, otrzymamy rozwiązanie przypadków szczególnych, danych w zadaniach powyższych 3), 2) i 1).

Zadania.

1) Pięć równych kapitałów po £ 850 wypożyczono na $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{8}\%$, jaka jest średnia stopa procentowa?

2) Jaka jest średnia stopa procentowa od kapitałów: *a*) rs. 525, *b*) rs. 245, *c*) rs. 150, *d*) rs. 1575, *e*) rs. 600 i *f*) rs. 500, wypożyczonych na *a*) 6%, *b*) $8\frac{1}{4}\%$, *c*) $6\frac{1}{2}\%$, *d*) $7\frac{1}{2}\%$ *e*) $8\frac{1}{2}\%$, *f*) $6\frac{3}{4}\%$?

3) Jaką będzie średnia stopa procentowa, jeżeli 6 równych kapitałów wypożyczono:

a) na 7 m. po 5%, $1\frac{1}{2}$ m. $6\frac{1}{2}\%$, 11 m. $4\frac{3}{4}\%$, 6 m. $4\frac{1}{2}\%$, $2\frac{1}{2}$ m. $6\frac{3}{4}\%$, 1 m. 7%?

b) na 16 d. po $8\frac{1}{2}\%$, 87 d. $5\frac{1}{4}\%$, 115 d. $5\frac{3}{8}\%$, 90 d. $4\frac{1}{5}\%$, 124 d. 6%, 240 d. $7\frac{1}{2}\%$?

c) na 1 m. 15 d. po $5\frac{3}{4}\%$, 5 m. 28 d. po $6\frac{1}{4}\%$, 15 d. $5\frac{1}{2}\%$, 31 d. $7\frac{1}{2}\%$, 5 m. 8 d. 6%, 3 m. 17 d. $4\frac{3}{4}\%$?

§ 104.

Wspólnym czyli *średnim terminem wypłaty* nazywa się czas, w którym różne kapitały, przypadające w równych czasach do zapłaty, mogą być wypłacone w jednym czasie, tak aby przez to ani wierzyciel, ani dłużnik nie ponieśli uszczerbku na procentach.

Wynajdywanie wspólnego terminu wypłaty opiera się także na dochodzeniu ilości średniéj; za punkt wyjścia przy obliczaniu dni lub miesięcy, czyli za epokę, bierze się pospolicie najwcześniejszy termin wypłaty, można jednak obrać za epokę albo ostatni termin wypłaty, albo zresztą jakikolwiek inny dowolnie obrany czas.

Miesiąc liczy się w ogólności po dni 30, dzień 15-ty miesiąca nazywa się *medio*, dzień ostatni *ultimo*; dnia epoki nie liczymy, natomiast liczy się termin wypłaty.

Należy też rozróżnić, czy kapitały dane procentują po jednakowych czy po różnych stopach; z przypadkiem pierwszym łączy się przypadek najpospolitszy, gdy o procentach nie ma wyraźnie mowy, czyli raczéj, gdy procent, jak np. przy wekslach, zawartym już jest w kapitale do zapłaty przypadającym.

W tym razie dla znalezienia wspólnego terminu wypłaty dzielimy sumę iloczynów z kapitałów i czasów przez sumę kapitałów.

Dajmy, dla uzasadnienia tego postępowania, że kapitały K, K', K''... przypadają do zapłaty po czasach C, C', C''...; mamy znaleść czas x, po którym wszystkie te kapitały odebrane być mogą razem bez straty na procentach.

Procenty od kapitałów K, K', K''... za czasy C, C', C''... są $\frac{KCs}{100}$, $\frac{K'C's}{100}$, $\frac{K''C''s}{100}$...; procent od kapitału $K+K'+K''$ za czas x jest $\frac{(K+K'+K'')\,xs}{100}$; aby nie było straty na procentach, winno być

$$KCs+K'C's+K''C''s=(K+K'+K'')\,sx$$

$$\text{zkąd } x=\frac{KC+K'C'+K''C''}{K+K'+K''}$$

Przykłady:

1) Mamy do odebrania następne kapitały: 365 rs. 8 wrześ., 729,50 rs. 22 września, 450 rs. 30 września, 187,40 rs. 15 października i 436

rs. 3 listopada; w jakim czasie moglibyśmy wszystkie te kapitały razem zainkasować?

Obierzmy za epokę najwcześniejszy termin wypłaty:

		liczba dni	
8/9	365 rs.	0	0
22/9	729,50 „	14	10213
30/9	450 „	22	9900
15/10	187,40 „	37	6934
3/11	436 „	55	23980
	2167,90		51027

$$51027 : 2167{,}90 = 23{,}6$$

Wspólny termin wypłaty przypada więc we 24 dni po epoce t. j. 2 października.

Iloraz 23,6 przyjęliśmy za 24 d., gdyż 0,6 są większe od $1/2$; pospolicie jednak ułamków nie uwzględnia się tak ściśle; jeżeli kapitały mamy do zapłacenia, liczy się ułamki za 1, czy to są od $1/2$ większe czy mniejsze, jeżeli mamy je do odebrania, ułamki się odrzuca.

Odbierając kapitały wypożyczone 2 października, zyskujemy procent od 365 rs. za dni 24, od 729,50 rs. za dni 10 i od 450 rs. za dni 2, natomiast tracimy procent od 187,40 rs. za dni 13 i od 436 rs. za dni 31. Procenty zyskane i stracone są jednakowéj wysokości, jak o tém łatwo się przekonać. (Mała różnica zawsze pozostanie ztąd, że tu właściwie wypada ułamkowa liczba dni).

Przeróbmy toż samo zadanie, biorąc za epokę ostatni termin wypłaty

		liczba dni	
8/9	365 rs.	55	20075
22/9	729,50 „	41	29910
30/9	450 „	33	14850
15/10	187,40 „	18	3373
3/11	436 „	0	0
	2167,90 rs.		68208

$$68208 : 2167{,}90 = 31{,}4$$

Wspólny termin wypłaty przypada przeto na dni 31 przed 3 listopada, t. j. 2 października.

Obliczmy teraz wspólny termin wypłaty od epoki wcześniejszéj od pierwszego terminu wypłaty, np. od 1 września.

		liczba dni	
$^{8}/_{9}$	365 rs.	7	2555
$^{22}/_{9}$	729,50 „	21	15320
$^{30}/_{9}$	450 „	29	13050
$^{15}/_{10}$	187,40 „	44	8246
$^{3}/_{11}$	436 „	62	27032
	2167,90		66203

$$\frac{66203 : 2167{,}9}{30{,}5}$$

Termin wypłaty przypada w 31 dni po 1 września t. j. 2 października.

Nakoniec za epokę posłużyć nam może jakakolwiek data pośrednia, np. 10 października:

		liczba dni		
$^{8}/_{9}$	365 rs.	32	11680	
$^{22}/_{9}$	729,50 „	18	13131	
$^{30}/_{9}$	450 „	10	4500	
$^{15}/_{10}$	187,40 „	5		937
$^{3}/_{11}$	436 „	23		10028
	2167,90		29311	10965

$$\begin{array}{r} 29311 \\ \div 10965 \\ \hline 18346 : 2167{,}9 \\ \hline 8{,}4 \end{array}$$

Ponieważ suma liczb procentowych odpowiadających datom wcześniejszym od epoki jest większą, przeto wspólny termin wypłaty przypada przed 10 października na 8 dni, zatém 2 października.

2) Mamy do zapłacenia 5 równych rat po 1500 rs. po 2, 4, 6, 8, i 10 miesiącach; w jakim terminie moglibyśmy je razem wypłacić.

Ponieważ kapitały są tu równe, trzeba wziąć tylko ilość średnią danych czasów (co zresztą wypada z powyższego ogólnego wzoru, kładąc $K = K' = K''$).

$$\frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ m.}$$

Możemy przeto całą należność uiścić po 6 miesiącach; rzeczywiście, co tracimy na procencie, płacąc dwie ostatnie raty o 2 i 4 miesiące wcześniéj, tyleż zyskujemy na dwu pierwszych, płacąc je o tyleż późniéj.

3) Płacić mamy 120 £ 23 lipca, 245 £ 6 s. 1 września i 360 £ 1 listopada; w jakim terminie możemy wypłaty te naraz uskutecznić?

Liczba dni miesięcy kalendarzowa; za epokę bierzemy środkowy termin wypłaty:

			liczba dni	
$^{23}/_{7}$	120	£	. . . 40	4800
$^{1}/_{9}$	245,5	„	. . . 0	0
$^{1}/_{11}$	360	„	. . . 61	21960
	725,5 £			17160

$$\begin{array}{r} 17160 : 725,5 \\ \hline 23,6 \end{array}$$

Zatém w 24 dni po 1 września, czyli 25 września.

4) Ma ktoś do zapłacenia rs. 200 po 2 miesiącach, rs. 375 po $3^1/_3$ m., rs. 150 po 5 m. i rs. 700 po 8 m. Płaci jednak rs. 100 natychmiast, rs. 100 po 1 m. i rs. 320 po $1^1/_2$ m.; kiedy ma uiścić resztę?

rs. 200	po 2 m.	. . . 400		rs. 100	. . . 0 m.	. . . 0
375	„ $3^1/_3$ „	. . . 1250		100	. . . 1	. . . 100
150	„ 5 „	. . . 750		330	. . . $1^1/_2$	. . . 480
700	„ 8 „	. . . 5600		520		580
1425		8000				
÷ 520		÷580				
905		7420				

Kapitały dane przynoszą aż do uiszczenia długu procent od liczby procentowéj 8000, procent zaś od kapitałów już upłaconych odpowiada liczbie procentowéj 580, nie będzie przeto straty na procentach ani dla wierzyciela ani dla dłużnika, jeżeli wypłata pozostałych 905 rs. nastąpi w terminie takim, aby liczba procentowa od tego kapitału wynosiła 8000—580=7420, zatém:

$$\begin{array}{r} 7420 : 905 \\ \hline 8\,^{180}/_{955} = 8\,\text{m.}\ 6\,\text{dni.} \end{array}$$

t. j. resztę długu zapłacić należy po 8 miesiącach i 6 dniach.

Z a d a n i a.

1) Ktoś winien zapłacić 10000 rs. w pięciu równych ratach co 84 dni; kiedy może dług ten naraz uiścić?

2) Ktoś ma do zapłacenia rs. 6300 po 3 miesiącach, rs. 3600 po po 6 m., rs. 4200 po 8 m. i rs. 7200 po 10 m.; jeżeli należność tę chce naraz zapłacić, kiedy może to zrobić?

3) Kupiec ma zapłacić 2050 rs. natychmiast, 1500 rs. po 9 miesiącach i 1300 rs. po roku; wierzyciel pozwala mu pozycye te zatrzymać do wspólnego terminu wypłaty, kiedy to nastąpi?

4) Bankier warszawski otrzymuje 28 sierpnia następne weksle do zainkasowania: na rs. 2400 płatny za okazaniem, rs. 1274,44 płatny 17 września, rs. 3225 pł. 1 października, rs. 1357,75 pł. 14 października, rs. 2448 pł. 31 października, rs. 782,28 pł. 5 listopada; pod jaką datą może zakredytować swego komitenta (t. j. dającego zlecenie) na całą powyższą sumę?

5) Do kupna domu zgłasza się trzech nabywców, przedstawiających następne warunki: A. zobowiązuje się zapłacić 10000 rs. natychmiast, 4000 rs. po 8 miesiącach, 4500 rs. po 12 m., 3000 rs. po 24 m.; B. 12000 rs. natychmiast, 6000 rs. po 10 m., 4000 rs. po 12 m. i 2000 rs. po 30 m.; C. — 12000 rs. natychmiast, 4000 rs. po 5 m., 5000 rs. po 13 m. i 4000 rs. po $27\frac{1}{2}$ m., który z tych trzech pretendentów przedstawia najkorzystniejsze warunki?

6) Zobowiązano się 10 stycznia zapłacić rs. 16520 w 5 równych ratach; pierwszą za miesiąc, 2-ą 10 marca, 3-cią 10 lipca, 4-tą 10 października, 5-tą 15 grudnia. Jaki byłby wspólny termin wypłaty całéj téj należności? (miesiące kalendarzowe).

7) Pod jakim wspólnym terminem wypłaty zaksięgowane być mogą razem następne weksle: na rs. 78,40 płatny 4 marca, rs. 93,60 pł. 18 marca, rs. 114,80 pł. 2 kwietnia, rs. 216,25 pł. 25 kwietnia i rs. 311,17 pł. 7 maja?

8) Podobnież weksle na: rs. 149,50 pł. 7 marca, rs. 128,76 pł. 28 marca, rs. 274,25 pł. 12 kwietnia, rs. 155,72 pł. 20 kwietnia, rs. 270,67 pł. 3 maja i rs. 850,20 pł. 10 czerwca?

9) Znaleźć wspólny termin wypłaty następnych należności, przypadających do zapłaty w r. 1878: fr. 812,60 pł. 3 sierpnia, fr. 914.33 pł. 26 września, fr. 1154,18 pł. 17 kwietnia, fr. 4613,80 pł. 10 czerwca, fr. 750 pł. 11 października, fr. 836,27 pł. 26 sierpnia, fr. 79,52 pł. 5 listopada, fr. 115,20 pł. 25 lipca, fr: 333,55 pł. 3 lutego i fr. 555,92 pł. 6 maja.

10) Rs. 12000 przypada do zapłaty po 18 miesiącach; dłużnik jednak płaci po 3 miesiącach $\frac{1}{4}$ długu, w 4 miesiące później $\frac{1}{4}$ reszty, i znów w 3 m. później $\frac{1}{2}$ pozostałéj należności. — Jaka część cał-

kowitego długu pozostaje jeszcze do zapłaty i kiedy winna być uiszczoną?

11) Dobra sprzedane zostały za 60000 rs. pod warunkiem zapłacenia 40000 rs. po 2 latach, a reszty po 5 latach; jeżeli nabywca pierwszą ratę zapłacił dopiero po $2\frac{1}{2}$ latach, kiedy winien uiścić resztę szacunku?

12) Dług miał być uiszczonym w trzech ratach: rs. 5000 po 4 miesiącach, rs. 7000 po 10 m., a reszta po 16 miesiącach. Cała zaś ta należność mogła być uiszczoną po 10 miesiącach; ile wynosiła trzecia rata?

13) Józef winien jest Janowi rs. 536,25 natychmiast, rs. 780 pł. za 1 m., rs. 978,55 pł. za $1\frac{1}{2}$ m., rs. 1350,75 pł. za 3 m.; natomiast Józefowi należy się od Jana rs. 824,30 za $\frac{1}{2}$ m., rs. 750 za 2 m., i rs. 1516,45 za 4 m. Jeżeli się obaj między sobą obliczają kiedy ma być uiszczoną różnica?

14) Józefowi należy się od Jana rs. 758,25 pł. za dni 12, rs. 3246,55 za dni 28, rs. 1097,30 za dni 32, i rs. 4500 za dni 45; natomiast winien jest Janowi rs. 1534,60 pod datą bieżącą, rs. 597,10 za dni 10, rs. 1325,80 za dni 20, rs. 5308,36 za dni 36 i rs. 4215,25 za dni 54. Kiedy winno nastąpić wyrównanie rachunku.

15) Ktoś zobowiązanym jest zapłacić rs. 4800,—mianowicie rs. 900 po 3 miesiącach, rs. 1100 po 6 m., rs. 1300 po 9 m. i rs. 1500 po $11\frac{3}{5}$ m. Wierzyciel jednak pragnie otrzymać należność w dwu równych ratach, z których druga ma być uiszczoną w miesiąc po pierwszéj; po ilu miesiącach ma być każda wypłaconą?

§ 105.

Wspólny termin wypłaty kapitałów procentujących po rozmaitych stopach otrzymuje się dzieląc sumę iloczynów z kapitałów, czasów i stóp procentowych przez sumę iloczynów z kapitałów i stóp procentowych.

Uzasadnienie tego znajdujemy, jak w § poprzedzających. Kapitały K, K' K''... płatne po czasach C, C', C''... procentują przy stopach s, s', s''..., przynoszą zatém aż do terminów wypłat procent $\frac{KCs + K'C's' + K''C''s'' + \ldots}{100}$
Jeżeli kapitały te wypłacone być mają razem po czasie x, przyniosą procentu

$\frac{K(s+K's'+K''s'')x}{100}$. Aby zatém nie było straty na procencie, winno być:

$$KCs+K'C's'+K''C''s''+...=(Ks+K's'+K''s''...)x$$

zkąd $$x=\frac{KCs+K'C's'+K''C''s''}{Ks+K's'+K''s''}$$

Zadanie to zresztą w praktyce rzadko się napotyka, jeżeli zaś przytrafi się istotnie, trzeba będzie zarazem wyszukać i średnią stopę procentową według § 103.

Przykłady:

1) Mamy do odebrania—rs. 504 płatne za 5 m. procentujące po $4\frac{1}{2}\%$, rs. 840 pł. za 9 m. po 5% i rs. 336 pł. za 11 m. po $3\frac{1}{4}\%$; kiedy moglibyśmy cały dług naraz odebrać i po jakiéj stopie należałoby liczyć procent?

		Ks	KCs
$504-4\frac{1}{2}\%-$	5 m.	2268 . . .	11340
$840-5\%$ $-$	9 „	4200	37800
$336-3\frac{1}{4}\%-$	11 „	1092	12012
1680		7560	61152

$7560 : 1680 = 4\frac{1}{2}\%$ $\qquad$ $61152 : 7560 = 8{,}088...$ — 3 d.

Odebrać przeto można 1680 rs. za 8 m. i 3 d. z procentem po $4\frac{1}{2}\%$.—W istocie procenty od trzech danych kapitałów wynoszą rs. 50,97 kop., procent od 1680 rs. za 8 m. 3 d. 51,03 rs.

W zadaniu tém można było dane kapitały uprościć przez 84, podobnie jak w zadaniach reguły spółki.

2) Ma ktoś do odebrania 3 równe kapitały przypadające do zapłaty 9 marca, 17 kwietnia i 23 czerwca, a procentujące po 6%, 5% i $4\frac{1}{2}\%$; pod jaką datą mogłyby trzy te kapitały być razem odebrane i po jakiéj stopie należy liczyć procent.

Za epokę obierzmy najwcześniejszy termin wypłaty:

	liczba dni		
$^{9}/_{3}$	0	6%	0
$^{17}/_{4}$ . .	38	5%	190
$^{23}/_{6}$ . . .	104 . . .	$4\frac{1}{2}\%$ . . .	468
		$15\frac{1}{2}$	658

$15\frac{1}{2} : 3 = 5\frac{1}{6}\%$ $\qquad$ $658 : 15\frac{1}{2} = 42\frac{14}{31}$

Kapitały zatém razem odebrane być mogą w 24 dni po 9 marca t. j. 21 kwietnia, z procentem $5\frac{1}{6}\%$.

Zadania.

1) Cztery kapitały równe są do odebrania po 3 miesiącach, po 5 m., po 9 m. i po $1\frac{1}{2}$ roku, procentując się—pierwszy po $5\frac{1}{2}\%$, drugi po 5%, trzeci po 4%, czwarty po $3\frac{1}{2}\%$; kiedy i z jakim procentem możnaby je razem odebrać?

Znaleźć średnią stopę procentową i wspólny termin wypłaty następnych kapitałów:

2) Rs. 200 procentujących po $3\frac{1}{2}\%$ płatnych za $1\frac{1}{2}$ miesiąca rs. 1480 po 7% pł. za 2 m., rs. 600 po 6% pł. za $3\frac{2}{3}$ m., rs. 720 po $8\frac{1}{2}\%$ za 6 m., i rs. 7000 po 7% za $7\frac{1}{2}$ m.

3) £ 150 po $2\frac{1}{2}\%$ pł. za 24 d., £ 25 po 4% pł. za 30 d., £ 142.15 s. po $2\frac{3}{4}\%$ pł. za 42 d., £ 183 po $4\frac{1}{2}\%$ za 90 d. i £ 200 po $5\frac{3}{4}\%$ za 105 d.

4) ℳ 1008 po 5% pł. 26 czerwca, ℳ 1944 po 3% pł. 9 lipca, ℳ 2592 po $4\frac{1}{2}\%$ pł. 1 sierpnia, ℳ 648 po $4\frac{1}{2}\%$ pł. 14 sierpnia i ℳ 1720 po $5\frac{1}{2}\%$ pł. 2 września.

5) fl. 1225 po $4\frac{1}{2}\%$ pł. 25 lutego, fl. 2045 po 4% pł. 29 kwietnia i fl. 875 po 5% pł. 1 czerwca. (Liczba dni kalendarzowa).

6) A winien jest rs. 2000 po 3% pł. za 6 m., rs. 3500 po 4% pł. za 1 rok i rs. 1500 po 5% pł. za 1 r. 4 m. Jeżeli więc całą tę należność chce naraz uiścić, kiedy może to zrobić, i ile wyniosłyby procenty, gdyby ją zapłacił dopiero po $1\frac{1}{2}$ roku?

MIARY I WAGI

RÓŻNYCH KRAJÓW.

Skrócenia. **M. d.** miary długości. **M. p.** miary powierzchni (gruntu). **M. o.** miary objętości: **s.** dla ciał sypkich, **c.** dla ciał ciekłych. **W.** wagi. **M.** monety. **m.** metr. **l.** litr, **gr.** gram. **Kg.** kilogram. **s. p.** stosunek przybliżony.

Cesarstwo rosyjskie.

M. d. 1 arszyn = 16 werszkom (28 cali) = 0,7111936 m.

1 stopa (футъ, angielskie *foot*) = 12 calom po 10 linij =0,3047973 m.

1 sażeń = 3 arsz. = 7 stopom = 2,1336 m.

1 wiorsta = 500 sażeni = 1066,79 m. Na 1 stopień południka ziemskiego idzie 104,3297 werst, czyli 1 mila geograficzna = 6,9437 werstom.

s. p. 7 arsz. = 5 m.

1 sażeń sześcienny = 343 stóp sześć. = 9,712417 sterów.

M. p. 1 diesiatyna=2400 sażeni kwadr.=109,252 (109¼) ara.

M. o. s. 1 czetwiert' = 8 czetwieryków po 8 garncy = 209,9076 l.

1 łaszt (ластъ) = 16 czetwierti.

M. o. c. 1 wiadro (ведро) = 10 krużek czyli sztofów po 10 czarek = 12,99276 l.

1 beczka = 40 wiader.

64 wiader = 30 czetwieryków.

W. 1 funt (℔) = 96 zolotników po 96 doli.
1 pud = 40 ℔, 1 berkowiec = 10 pudów.
1 funt = 409,51156 gr.
s. p. 1 pud = $16\frac{1}{2}$ Kgr. (nieco mniéj).
1 funt aptekarski = $\frac{7}{8}$ funta handlowego (=84 zoł.)=12 uncyjom po 8 drachm po 3 skrupuły po 20 granów.—Gran = 62,32 miligrama.

M. 1 rubel srebrem (rs.) = 100 kopiejek.
Z 1 ℔ czystego srebra bije się $22\frac{34}{45}$ sztuk rubli czyli z 1 Kgr. 55,5676 sztuk.
Monetą złotą jest półimperyał = 5 rs.
$68\frac{4}{15}$ sztuk półimperyałów z 1 ℔ czystego złota, czyli 162,702 z 1 Kgr. cz. zł.
W Gruzyi: abaz = 20 kop.
szaur = 5 kop.

Wielkie księstwo Finlandzkie.

M. d. 1 łokieć (szwedzki) = 0.835 ar.
W. 1 funt. „ = 1,038 f. ross.
M. 1 marka = 100 penni = 25 kop.

Miary dawniejsze Królestwa Polskiego.

Obecnie w Król. Polskiém obowiązującemi są miary rosyjskie; poprzednio używane, od r. 1818, zwane nowopolskiemi w różnicy od danych miar polskich, są:

M. d. 1 łokieć, = 2 stopom po 12 cali po 12 linij po 2 millimetry.
1 sążeń = 3 łokciom.
1 łok. = 0,576 m. = 0,809906 arszyna.
1 arszyn = 1,235 łok.
s. p. 7 łokci = 4 m. (właściwie 4,032 m.)
5 „ = 4 arsz. („ 4 ar. 0,8 wer.)
Do mierzenia gruntów: 1 sznur mierniczy = 10 prętów po 10 pręcików po 10 ławek.

1 pręt = $7\frac{1}{2}$ łokcia = 15 stopom.
1 mila = 7 wiorstom ross. Na 1 stopień południka idzie mil 14,879.

M. p. 1 włóka = 30 morgom po 300 prętów kwadratowych.
1 morg 55,9872 ara = 0,512459 desiatyn.
1 desiatyna = 1,9508 morga.
s. p. 1 desiatyna = 2 morgom.

M. o. 1 korzec = 4 ćwierciom po 8 garncy po 4 kwarty po 4 kwaterki.
1 kwarta = 1 l.
1 łaszt polski = 30 korcom.
1 korzec = 0,609762 czetwieryka = 10,406 wiader ross.
1 beczka (do cieczy) = 25 garncy = 100 kwart.
1 konew = 5 garncom, 1 stągiew = 50 garncom, 1 okseft = 60 garncom.
s. p. 5 czetwierti = 8 korcy (nieco więcéj).
100 wiader = $307\frac{1}{4}$ garncy.

W. 1 funt = 16 uncyjom po 2 łuty po 4 drachmy (kwinc ik) po 3 skrupuły po 24 grany po $5\frac{1}{2}$ graników po 8 miligramów.
1 cetnar = 4 kamieniom po 25 ℔.
1 ℔ = 405,504 gramów.
1 gran = 44 miligramom.
s. p. 100 ℔ ross. = 101 ℔ nowopol.

M. 1 złoty polski = 30 groszom.
1 złop. = 15 kop. (właściwie 14,99 kop.).
1 rs. = 6 złp. 20 gr.
3 rs. = 20 złp.

A u s t r y a.

Od 1 stycznia 1876 r. obowiązują miary dziesiętne (metryczne czyli francuzkie).

1 cetnar metryczny = 100 Kgr. 1 tonna = 1000 Kgr.

Miary dawniejsze:

M. d. 1 łokieć = 0,7775586 m.
s. p. 32 łok. wiedeńskich = 25 m.

1 sążeń = 6 stóp po 12 cali po 12 linij = 1,896484 m.
1 mila = 7585,937 m. = 7,11099 wiorst ross.
M. p. 1 morg = 57,54644 ara.
M. o. s. 1 muth = 30 metzen.
1 metzen = 61,48685 l.
M. o. c. 1 eimer = 40 maass = 56,5890 l.
W. 1 cetnar = 100 ℔ po 32 łuty po 4 kwinciki (Quentchen).
1 ℔ = 560,060 gr.
s. p. 25 ℔ wied. = 14 Kgr.
73 ℔ wied. = 100 ℔ ross. = 101 ℔ warsz.
M. 1 gulden austr. (złoty austr., *öWfl.*) = 100 nowych krajcarów (*Nxr*).
90 sztuk gul. z 1 Kgr. czystego srebra.
Dukaty po 4,80 fl.; 290,518 sztuk dukatów z 1 Kgr. cz. złota.
Monety 8-fl. (czyli 20 frankowe) wartości fl. 8,10 w srebrze; $172^2/_9$ sztuk z 1 Kgr. cz. złota.
1 fl. austr. = 61,742 kop.

Poprzednio, do końca października 1858 r., liczono na złote (guldeny) po 60 krajcarów po 4 fenigi, stanowiące tak zwany kurant konwencyjny. 100 zł. austr. dawnych = 105 zł. austr. nowym, czyli 1 złoty dawny = 1 zł. 5 krajcarom nowym.

Belgija.

Miary, wagi i monety jak we Francyi.

Brazylija.

Miary i wagi metryczne od 1874 r., poprzednio używane były portugalskie,—z wyjątkiem: 1 alqueire = 40 l.
1 medida (canada) = 2,77 l.
1 almuda = 12 medidas.
M. 1 milréis ($) = 1000 réisom.
1 $ (nowy) = 70,77 kop. (505,4888 rejsów portugalskich, t. j. nieco więcéj nad pół $ portugalskiego).

Danija.

M. d. 1 łokieć (alen) = 0,627707 m.

M. o. s. 1 tonna (toende) = 8 szefli (skjaepper) po 4 ćwierci (fjerdingkar) po 2 ósemki (ottingkar).
1 tonna = 139,1213 l.

M. o. c. 1 pott = 0,96612 l.
2 pott = 1 kande.
1 anker = 39 pott.

W. 1 cetnar = 100 ℔ po 100 quintin.
1 ℔ = 500 gr.
1 łaszt = 5200 ℔.

M. Dawne: 1 Rigsdaler (Rigsmynt) = 6 markom po 16 szylingów (skilling).
79,108 Rdlr z 1 Kgr. czystego srebra.
1 Rdlr = 70,242 kop.
Nowe, według konwencyi monetarnéj skandynawskiéj 1872:
1 korona = 100 oere.—2480 koron z 1 Kgr. cz. złota.
1 korona = 34,730 kop.

Egipt.

M. d. 1 pik czyli draa (łokieć)—dla sukna i wyrobów jedwabnych europejskich = 0,677 m., dla wyrobów jedwabnych syryjskich i tkanin krajowych = 0,5775 m., dla tkanin bawełnianych i lnianych = 0,6384 m.

M. o. 1 ardeb w Aleksandryi=271 l., w Kairze=174 do 179 l.
2 ardeb = 1 daribba.

W. 1 derhem (drachma) = 3,0884 gr.
1 oka najczęściéj = 400 derhem = 1,23536 Kgr.
1 rottolo najczęściéj = 144 derhem (także = 105 d).
1 kantar (cetnar) ma wartosć zmienną, najczęściéj 36 lub 44 ok. Wielki kantar 72 do 100 ok.
Od r. 1871 urzędowo obowiązuje układ miar i wag metryczny.

M. 1 piaster (po arabsku giersz) = 40 para po 3 aspry.
1 worek = 500 piastrom.

Wartość monet uregulowano przed kilku laty przez zrównanie piastra z czwartą częścią franka. Zatém:
1 piaster = $6\frac{1}{4}$ kop.
10 piastrów egip. = 11 (właściwie $11\frac{1}{4}$) p. tureckim.

Francya.

Układ miar i wag metryczny. (Ob. § 1 i 2).
M. 1 frank (franc, fr.) = 100 centymom (centimes, cs.).
$222\frac{2}{9}$ fr. z 1 Kgr. cz. sr.
$3444\frac{4}{9}$ fr. z 1 Kgr. cz. zł.
1 fr. = 25,005 kop.

Grecya.

Układ metryczny z nazwami greckiemi:
M. d. 1 piki (metr) = 10 palmom po 10 cali po 10 linij.
1 stadion = 1 kilometrowi.
M. o. 1 litr = 10 kotylos po 10 mystron po 10 kubur.
W. 1 tonna = 10 talentów = 1500 Kgr.
1 mina (królewska) = $1\frac{1}{2}$ Kgr. = 1500 drachm (gramów).
1 oka (nowa) = 1,25 Kgr.
dawniejsze: 1 oka (dawna) = 1,28 Kgr.
1 kantar = 44 oki po 400 drachm.
M. 1 drachma (frank) = 100 lepta.

Hiszpanija.

Układ metryczny.
Miary dawniejsze.
M. d. 1 vara = 0,843 m., w Kastylii = 0,8359 m.
M. o. s. 1 fanega = 55,34 l., w Kastylii = 55,501 l.
M. o. c. 1 arroba = 16,3 l., w Kastylii arroba do wina (czyli cantara) = 16,133 l., arroba do oliwy = 12,563 l.
W. 1 Quintal = 4 arrobas po 25 libras po 4 cuarterones po 4 onzas po 8 ochavas.
1 libra = 460,093 gr.
M. nowe: 1 peseta (frank) = 100 centimos. 5 pezetas = 1 duro.

dawniejsze: 1 real po 34 maravedis; 20 realów = peso duro (piastr).

1 real = 0,5027652 pesety (franka).

Holandya.

Układ metryczny z nazwami holenderskiemi.

M. d. 1 el (metr) = 10 palm po 10 duim po 10 streep.

M. o. s. 1 zak lub mud (hektolitr) = 10 schepel po 10 kop po 10 maatje.

1 łaszt = 30 hektolitrów.

M. o. c. 1 vat (hektolitr) = 100 kan po 10 maatje.

W. 1 pond (Kgr.) = 10 ons po 10 lood po 10 wigtje po 10 korrel.—1 steen = 3 pond.

M. 1 gulden (floren, *hfl*) = 100 centom; 105,82 hfl z 1 Kgr. cz. sr.

dukaty = 291,154 z 1 Kgr. cz. zł.

1 *hfl* = 52,511 kop.

Niemcy.

Od r. 1875 układ miar i wag metryczny, z niektóremi dodatkowemi podziałami.

M. d. 1 metr czyli pręt (Stab) = 100 centymetrom (Neuzoll) po 10 millimetrów (Strich).

M. o. 1 Hektolitr (Fass) = 100 litrów (Kanne) po 2 Schoppen.

1 Scheffel = 50 litrów.

W. 1 Kgr. = 2 *℔*.

1 *℔* (=500 gr.) = 50 łutów po 10 gramów.

1 cetnar = 100 *℔* = 50 Kgr.

1 tonna = 1000 Kgr. = 2000 *℔*

1 łaszt okrętowy = 2 tonnom.

M. 1 marka (Reichsmarke *ℳ*, *R℘*) = 100 fenigów (*ϑ*).

2790 *ℳ* z 1 Kgr. cz. zł.

1 *ℳ* (w złocie) = 30,871 kop.

Miary dawniejsze niemieckie.

Prussy.

M. d. 1 stopa (Fuss), dawna stopa reńska = 12 cali po 12 linij = 0,3238535 m.

1 łokieć (Elle) = $25 \frac{1}{8}$ cali = $2 \frac{1}{8}$ stopy = 0,66694 m. *s. p.* 3 łokcie = 2 m.

M. p. 1 morg = 25,53225 ara.

M. o. s. 1 szeffel (Scheffel) = 16 metzen = 54,9615 l.

1 łaszt = 60 szeffli, 1 wispel = 2 malterom po 12 szeffli.

1 szeffel = 1,10 nowych szefli.

M. o. c. 1 eimer = 2 anker = 60 kwart = 68,7019 l.

W. 1 ℔ (= 500 gr.) = 30 łutów po 10 kwincików (Quentchen).

M. 1 talar (Rβ) = 30 srebrników (Silber-groschen, *sgr.*) po 12 fenigów (₰).

1 Rβ = 3 ℳ = 92,613 kop.

W. ks. Badeńskie.

M. d. 1 stopa = 0,3 m.

1 łokieć = 2 stopom.

10 łokci = 6 m.

M. o. s. 1 Zuber = 10 malter po 10 sester po 10 messlein po 10 becher. — 1 malter = 150 l.

M. o. c. 1 Fuder = 10 ohm po 10 stützen po 10 maass po 10 glas.

1 Ohm = 150 l.

W. 1 ℔ = 500 gr.

M. 1 gulden (floren), floren południowo-niemiecki (*SWfl*, *rhfl*, *Gulden süddeutscher Währung*) po 60 krajcarów (*xr*) po 4 fenigi po 2 szelągi (Heller).

105 *flSW* z 1 Kgr. cz. srebra.

1 *rhfl* = 52,921 kop. (1)

---

(1) Z 1 ℔ monetarnego niemieckiego (500 gr.) bije się fl. austr. 45, fl. płd. niem. zaś $52 \frac{1}{2}$, dla tego często pierwsze oznaczają się przez 45 fl., drugie przez $52 \frac{1}{2}$ fl.

Bawarya.

M. d. 1 stopa = 12 cali po 12 linij = 0,291859 m.
1 łokieć = 2 stopom i 10½ calom = 0,833015 m.
s. p. 6 łokci = 5 m.
M. o. s. 1 szeffel = 6 metzen po 2 viertel po 4 massel=222,357 l.
M. o. c. 1 eimer = 64 maasskannen. 1 maaskanne = 1,06903 l.
W. 1 cetnar = 100 ℔ po 32 łuty.
1 ℔ = 560 gr.
M. ob. Baden.

Brema.

M. d. 1 stopa = 12 calom = 0,28935 m.
1 łokieć brabancki = $2^2/_5$ stopy = 0,69444 m.
M. o. s. 1 łaszt = 40 szeffli = 160 viertel = 640 spind.
1 szeffel = 74,10837 l.
M. o. c. 1 ohm = 4 anker albo=45 stübchen=180 kwart (Quartier)= 144,9648 l.
W. 1 ℔ (=500 gr.) = 10 nowych łutów po 10 quint po 10 półgramów (Halbgramme).
M. 1 złoty talar (Louisd'orthaler)=72 groten po 5 schwaren.
840 tal. z 1 Kgr. cz. zł
1 *Ldorß* = 1,025 rs.

Brunświk.

M. d. 1 stopa = 12 calom po 12 linij = 0,28536 m.
M. o. s. 1 wispel=40 himten po 4 vierfass po 4 metzen=1245,79 l.
M. o. c. 1 okseft (oxhoft) = 1½ ohm = 6 anker = 240 quartier
1 quartier = 0,93684 l.
W. jak w Bremie.
M. 1 talar = 30 groszom po 10 fenigów (talar = talarowi pruskiemu).

Frankfurt nad Menem.

M. d. 1 stopa = 12 calom po 12 l. = 0,28461 m.
M. o. 1 malter = 4 simmer po 4 sechter po 4 gescheid po 4. viertelgescheid = 114,729 l.
W. 1 ℔ ($^1/_2$ Kgr.) = 32 łuty po 4 quent po 4 richtpfennige.
M. południowo niemieckie (ob. Baden).

H a m b u r g.

M. d. 1 stopa = 12 calom po 8 części (Theile) = 0,28657 m.
1 łokieć = 2 stopom.
43 łokci = 23 m.
M. o. s. 1 beczka (Fass) = 2 himten po 4 spint po 4 miary (grosses Maass) = 54,9615 l. = szeflowi pruskiemu.
1 łaszt = 60 beczek.
M. o. c. 1 fuder = 6 ohm po 4 anker albo po 5 eimer po 4 viertel.
1 ohm = 144,91 l.
W. Jak w Bremie.
M. 1 bankomarka (*B⁰ ℳ*) = 16 szylingów (schilling, ß) po 12 fenigów (₰).
118$^2/_3$ *B⁰ℳ* z 1 Kgr. cz. sr.
1 marka obiegowa (Kurantmark *Cℳ*) z podziałem takim samym.
1 *B⁰ℳ* = 46,83 kop.
1 *Cℳ* = 37,05 kop.

L u b e k a.

M. d. 1 stopa = 12 calom po 8 części lub 12 linij = 0,2876 m.
M. o. s. 1 łaszt = 8 drömt po 3 tonny po 4 szefle po 4 beczki (fass)
1 szeffel = 34,694 l.
M. o. c. 1 fuder = 6 ohm lub 4 okseftom po 6 anker po 5 viertel po 4 kannen po 2 quartier.
1 quartier = 0,90938 l.

W. 1 cetnar = 8 liespfund po 14 ℔ po 32 łuty.
1 ℔ = 486,474 gr.

M. Jak w Hamburgu.

Meklemburg.

M. d. Jak w Hamburgu.

M. o. s. w Szwerynie: 1 łaszt = 8 drömt po 12 szeffli po 4 beczki (fass).
1 szeffel = 38,889 l.
w Strelitz: 1 łaszt = 4 wispel po 2 drömt, albo = 100 szeffli po 16 metzen.
1 szeffel = 54,728 l.
s. p. 5 szefli strelickich = 7 szeflom szweryńskim.

M. o. c. Jak w Hamburgu.

W. Jak w Prusiech.

M. 1 talar (waluty pruskiéj) = 48 szylingów po 12 fenigów.

Saksonija.

M. d. 1 stopa = 12 calom = 0,28319 m.

M. o. s. 1 wispel = 24 szeffli po 16 metzen po 4 mässchen.
1 szeffel = 103,8286 l.

M. o. c. 1 eimer = 72 kannen.
1 kanne = 0,93559 l.

W. Jak w Prusiech.

M. 1 talar (waluty pruskiéj) = 30 nowych groszy (Neugroschen, *ngr*) po 10 fenigów.

Wirtembergija.

M. d. 1 stopa = 10 calom po 10 linij = 0,28649 l.
1 łokieć = 2,144 stopy = 0,614235 m.

M. o. s. 1 szeffel=8 simri po 4 vierling po 4 mässlein=177,2263 l.

M. o. c. 1 eimer = 16 imi po 10 mass po 4 schoppen=293,927 l.

W. 1 ℔ (500 gr.) = 32 łutom po 4 qt.

M. południowo niemieckie (ob. Baden).

Stosunki dawnych monet niemieckich do nowych.

1 talar płn. niemiecki = 3 ℳ.

7 guldenów płd. niemieckich = 12 ℳ.

5 marek obiegowych (Cℳ) = 6 ℳ.

28 talarów złotych (*Ld'or*β) = 93 ℳ

5 franków = 4 ℳ.

P e r s y a.

M. d. 1 zer, gess czyli arszyn—różny w różnych miejscach; głównie jednak zer-szahi = 1,12 m. i zer-mokeser=1,025 m.

M. o. c. 1 artaba = 8 kollotun = 65,24 l. Ciecze przedają się na wagę.

W. 1 maund czyli man (mały czyli zwykły) = 640 miskalów = 2,9376 Kg.

1 tabris maund = 1000 miskalów = 4,59 Kgr.

1 szyraz maund = 1280 „ = 5,875 „

1 toman czyli dukat = 10 keranów po 20 szahi.

1 toman = 2 rs. 84,64 kop.

327,12 tomanów z 1 Kgr. cz. zł.

P o r t u g a l i j a.

Miary metryczne.

Dawniejsze :

M. d. 1 vara (łokieć) = 5 palmos de Craveiro = 1,1 m.

M. o. s. 1 moyo=15 fangas po 4 alqueiras.—1 alqueira=13,84 l.

M. o. c. 1 almuda = 12 canadas.

1 almuda w Lizbonie = 16,74 l., w Oporto = 25,36 l.

1 pipa wina = 30 almudas.

W. 1 Quintal = 4 arrobas po 32 arrateis (℔).

1 arratel = 459 gr.

M. 1 Conto (:) = 1000 milreisów ($) po 1000 reisów (*r*).

436,3636 sztuk 100 reisowych (tostoes) z 1 Kgr. cz. sr.
Cruzados (moneta rachunkowa)=400 reisów.
Korona (Coroa)=10 milreisów.— 61,518 z 1 Kg. cz. zł.
1 milreis = 1 rs. 40,02 kop.

Rumunija.

M. d. 1 kalebi w Mołdawii = 0,6713 m.
1 kot „ = 0,6314 „
1 kalebi na Wołoszczyźnie = 0,683 m.
1 endasz „ = 0,6411 m.
M. o. s. 1 kilo w Mołdawii = 2 mierzas = 435 l.
3 kilo mołdawskie (właściwie 3,1316) = 2 kilo wołoskim.
1 mierza przyjmuje się za $1^3/_4$ korca polskiego.
M. o. c. 1 wiadra = 10 ok = 12,813 l.
W. 1 kantar = 44 ok albo 100 rottoli po 4 libra.
1 kantar = 56,1110 Kg.
M. według stopy francuzkiéj:
1 lei (frank) = 100 bani.

Serbija.

M. d. 1 arszyn (pik turecki) = 8 rup = 0,683 m.
1 łokieć (wiedeński) = 0,777558 m.
M. o. 1 oka = 1,7684 l.
W. 1 oka = 1,28 Kg.
M. 1 piastr obiegowy = 40 para.
1 „ podatkowy = 80 para.
1 piastr obiegowy = 5,4 kop., jednak rubel srebrem płaci się po 20 piastrów.
moneta zamierzona: 1 serbljak (frank) = 100 novcić.

Stany Zjednoczone Ameryki północnéj.

Miary i wagi angielskie (ob. Wielka Brytanija). W niektórych miejscach jednak Hundredweight czyli cetnar ma tylko 100 ℔.
M. 1 dollar ($)=100 centom.

eagle, moneta złota 10 dolarowa; 66,42 sztuk z 1 Kgr. cz. złota.

1 $=1 rs. 28,801 kop.

Szwajcarya.

Miary i monety francuzkie.

Szwecya i Norwegija.

M. d. 1 aln (łokieć) = 2 stopom = 0,594 m. (Szw.).
„ „ = 0,6275 m. (Norw.).

M. o. 1 tonna = 146,5699 l. (Szwecya).
1 kanna=2,617 l. „
1 pott = 0,96529 l. (Norwegija).
1 tönde = 139 l.

W. 1 cetnar = 100 skalpund po 100 ort po 100 korn =42,506 Kg. (Szwecya).
1 cetnar = 100 ℔ = 49,84 Kgr. (Norw.).

M. 1 korona = 100 oere (Szwecya) według konwencyi skandynawskiéj (ob. Danija).
1 Riksdaler dawniejszy=35,431 kop. 156,832 Rdlr. z 1 Kgr. czystego srebra.
1 Spieziesdaler = 120 szylingów (Norwegija) =620 *Sp*ß z 1 Kg. czystego złota.
1 *Sp*ß = 1 rs. 38,919 kop.
Norwegija nie przystąpiła do konwencyi monetarnéj skandynawskiéj.

T u r c y a.

Miary dawniejsze:

M. d. 1 pik (łokieć) czyli arszyn bazarowy =0,6858 m.
M. o. s. 1 kilo = 35,266 l., bywa i nieco większy.
M. o. c. 1 almud = 5,205 l.
W. 1 kantar = 44 ok po 400 drachm, 1 oka = 1,27525 Kg.

W handlu drobiazgowym oka była nieco większą, =1,281036 Kgr.

Miary metryczne wprowadzone od r. 1874 z nazwami tureckiemi:

M. d. 1 Zirai (metr) po 10 euchry.

M. o. 1 kilei (hektolitr) = 10 onliuk po 10 eulczek (litr) po 10 zarf (decilitr).

W. 1 kantar aszary=100 wekiei (Kg.), dirhem (gram) = 10 eszry-dirhem (dg) po 10 aszary dirhem (cg) po 10 miszary dirhem (mg).

M. medszydie złota = 100 piastrów; 151,236 sztuk z 1 Kg. cz. zł.

medszydie srebrna = 20 piastrów; 50,08 sztuk z 1 Kgr. cz. sr.

1 piaster=40 para po 3 aspry, obecnie także=100 centom.

1 piastr = 5,547 kop., wartość obiegowa piastra jest jednak nieco niższa.

1 kiesa srebra (kis) = 500 piastrów.

1 kiesa złota (keser) = 30000 piastrów.

Wielka Brytanija.

M. d. 1 Yard = 3 stopom (foot) po 12 cali (inches) = 0,91439179 m.

s. p. 11y = 10 m.

1 mila (british mile, 1760 y.) = 1609,3295 m.

1 mila morska = 1854,965 m.

M. o. 1 imperial=gallon = 4 quarts po 2 pints = 4,54358 l.

1 quarter=8 bushels po 8 gallons po 8 pints=290,78924 l.

1 okseft (hogshead) = 63 gallonów.

1 łaszt = 10 quarterów.

W. *handlowe*: 1 ℔ avoir du poids = 16 ounces (oz) po 16 drams=453,59265 gr.

1 hundredweight (*Cwt*) = 4 Quarters po 28 ℔.

monetarne : 1 troy ℔ = 12 ounces po 20 pennyweights (*dwts*) po 24 granów = 373,24195 gr.

1 ℔ avoir du poids = 7000 troygranów.

175 tr. ℔ = 144 ℔ avdp.

M. 1 funt szterling (livre sterling £) = 20 szylingów (shilling, *sh*) po 12 pensów (pence, w liczbie pojedynczéj penny, *d*).

Sovereign = 1 £ w złocie; 136,568 sowerenów z 1 Kgr. cz. zł.

1 £ = 6 rs. 26,817 kop.

Włochy.

Układ miar metryczny.

M. 1 lira nuova (₤, frank) = 100 centesimi.

Spis rzeczy.

ROZDZIAŁ WSTĘPNY.

stron.
Układ miar dziesiętnych (§ 1—2) 5

ROZDZIAŁ I.

Ułatwienia i skrócenia w czterech działaniach arytmetycznych . . 13
Dodawanie i odejmowanie (§ 3—4) 13
Mnożenie (§ 5—18) 17
Dzielenie (§ 19—26) 33
Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne (§ 27—29) . . . 43

ROZDZIAŁ II.

Mnożenie i dzielenie przybliżone 53
Uwagi ogólne (§ 30) 53
Mnożenie przybliżone (§ 31—33) 55
Dzielenie przybliżone (§ 34—36) 64
Uwagi tyczące się działań na liczbach przybliżonych (§ 37—39) 71

ROZDZIAŁ III.

Rachunek liczb mianowanych 77
Wiadomości ogólne (§ 40—42) 77
Mnożenie (§ 43—45) 81
Dzielenie (§ 46—48) 86
Sposób rozbiorowy czyli metoda włoska (§ 49—51) 91

ROZDZIAŁ IV.

stron.
Reguła trzech 99
Reguła trzech pojedyńcza (§ 52) 99
Reguła trzech złożona (§ 53) 104

ROZDZIAŁ V.

Reguła łańcuchowa (§ 54—55) 115

ROZDZIAŁ VI.

Obliczenia odsetkowe 125
Odsetki od stu (§ 56—61) 125
Kapitał zwiększony i zmniejszony (§ 62—64) 134
Odsetki na sto (65—70) 141
Odsetki w stu (§ 71—75) 149
Zamiana stopy procentowéj (§ 76) 154
Różne przykłady (§ 77) 157

ROZDZIAŁ VII.

Rachunek procentów 169
Wiadomości ogólne (§ 78) 169
Dochodzenie procentu za pewną liczbę lat (§ 79) 170
Dochoczenie procentu za pewną liczbę miesięcy (§ 80) 173
Dochodzenie procentu za pewną liczbę dni (§81—84) 177
Obliczanie procentu od kilku kapitałów razem (§ 85) 188
Obliczanie procentów, jeżeli rok liczy się po dni 365 (§ 86) . . 190
Obliczanie procentów przy stopie miesięcznéj (§ 87) 192
Dochodzenie kapitału (§ 88) 193
Dochodzenie stopy procentowéj (§ 89) 194
Dochodzenie czasu (§ 90) 195
Potrącanie procentu (§ 91—93) 196

ROZDZIAŁ VIII.

Reguła spółki (§ 94—96) 204

ROZDZIAŁ IX.

Reguła mieszaniny 213
Wiadomości ogólne (§ 97) 213
Oznaczanie wartości mieszaniny (§ 98) 214

stron.

Dochodzenie ilości materyałów potrzebnych do utworzenia oznaczonéj mieszaniny (§ 99—102) 217

ROZDZIAŁ X.

Średnia stopa procentowa i wspólny termin wypłaty 231

Średnia stopa procentowa (§ 103) 231

Wspólny termin wypłaty (§ 104—105) 234

Miary i wagi różnych krajów 241

RAMSZTYK

WYKŁAD
ARYTME-
TYKI
HANDLO-
WEJ