XXIX.

SUR L'INSTABILITÉ DE CERTAINES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXX (1900), pp. 170-173

Soit un système canonique avec deux degrés de liberté

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

F ne dépendant pas du temps t.

Supposons que les équations (1) admettent une solution périodique de période T. Supposons, en outre, ce qui est toujours permis par un choix convenable de variables (¹), qu'on ait pour cette solution

$$p_1 = p_2 = q_2 = 0, \qquad q_1 = \chi(t), \tag{2}$$

q_1 étant censé varier toujours dans le même sens et augmentant de 2π, tandis que t augmente de T. Les trois dérivées $\partial F/\partial q_1$, $\partial F/\partial q_2$, $\partial F/\partial p_2$ s'annulent alors à la fois, lorsqu'on y fait $p_1 = p_2 = q_2 = 0$; au contraire $\partial F/\partial p_1$ ne s'annule pour aucune valeur de q_1.

La fonction F pourra être représentée sous la forme suivante

$$F = C + \left(\frac{2\pi}{T} + a\right) p_1 + \frac{1}{2}(a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_2q_2 + a_{22}q_2^2) + \dots, \tag{3}$$

où C est une constante, les a sont des fonctions périodiques (de période 2π) de la seule variable q_1 et les termes non écrits sont d'ordre supérieur par rapport aux trois variables p_1, p_2, q_2.

(¹) Voir POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. II, n. 208.

La solution périodique (2) possède deux exposants caractéristiques nuls et deux autres α et $-\alpha$. Si la partie réelle de α n'est pas nulle, la solution est instable, ainsi qu'il résulte des travaux bien connus de MM. POINCARÉ et LIAPOUNOFF. Pour α purement imaginaire, M. POINCARÉ convient, à l'exemple des Anglais, d'appeler *stable* la solution correspondante. Sera-t-elle au sens rigoureux du mot? Je crois infiniment peu probable qu'il en soit ainsi en général, mais à présent je ne puis confirmer cette présomption, sinon pour une sorte très particulière de solutions périodiques, celles pour qui le nombre $\alpha/\sqrt{-1}$ serait commensurable avec le moyen mouvement $2\pi/T$.

Envisageons les solutions de (1), pour qui $F = C$, C étant la constante de la formule (3). En résolvant par rapport à p_1 il vient

$$p_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}q_2^2}{2\pi/T + a} + H = K + H\,,$$

où H est au moins du troisième ordre en p_2, q_2. Les trajectoires de ces solutions (pour qui $F = C$) sont définies par les équations canoniques

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = -\frac{\partial(K+H)}{\partial q_2}\,, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{\partial(K+H)}{\partial p_2}\,.$$

Posons pour un moment $H = 0$ et intégrons par la méthode de JACOBI, en désignant par x, y un couple de constantes canoniques. On trouve

$$p_2 = c_{11}x + c_{21}y\,, \qquad q_2 = c_{21}x + c_{22}y\,.$$

Les fonctions c de la variable q_1 sont périodiques, d'après l'hypothèse que $2\pi/T$ et $\alpha/\sqrt{-1}$ sont commensurables entre eux. La période est $2k\pi$, ayant posé $\alpha T/2\pi\sqrt{-1} = h/k$, avec h et k entiers, premiers entre eux.

En remplaçant les variables p_2, q_2 par x, y, le système (4) devient

$$\frac{dx}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial y}\,, \qquad \frac{dy}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial x}\,, \tag{4'}$$

où H est une fonction périodique de q_1, dont le développement en série de puissances de x, y commence par un polynome du troisième degré H_3. Soit $f(x, y)/2k\pi$ le terme indépendant de q_1 dans le développement de

H_3 en série trigonométrique de l'argument q_1/k. *Si la forme cubique (à coefficients constants)* $f(x, y)$ *n'a pas de facteurs multiples, la solution* $x=0$, $y=0$ *de* (4) *et, par conséquent, la solution périodiques* (2) *du système proposé sont assurément instables.*

En effet, soient x_0, y_0 les valeurs de x, y pour $q_1=0$; x_1, y_1 leurs valeurs après la période $2k\pi$. Les intégrales x, y étant développables en séries de puissances de x_0, y_0 posons (en réunissant les termes de même degré)

$$x = P_1 + P_2 + \dots, \qquad y = Q_1 + Q_2 + \dots,$$

Portons ces expressions dans les (4′) et nous trouverons de suite

$$P_1 = x_0, \qquad Q_1 = y_0,$$

$$P_2 = -\int_0^{q_1} \frac{\partial H}{\partial y}\, dq_1, \qquad Q_2 = \int_0^{q_1} \frac{\partial H}{\partial x}\, dq_1 .$$

Il va sans dire che, dans $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial y$ les variables x, y doivent être remplacées par x_0, y_0. En faisant $q_1 = 2k\pi$, j'obtiens

$$x_1 = x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \dots, \qquad y_1 = y_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \dots .$$

C'est une substitution instable (voir ma Note du 9 juillet) (*), car f n'a pas de facteurs multiples et, par conséquent, les deux formes quadratiques $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ sont sans facteurs communs.

On en conclut immédiatement l'instabilité de la solution $x=0$, $y=0$, d'où, en revenant aux variables p_2, q_2 celle de la solution donnée.

Si l'Académie veut bien le permettre, je reviendrai prochainement sur ces remarques en les appliquant au problème des trois corps.

(*16 juillet 1900*).

(*) [In questo vol.: XXVIII, pp. 461-464].