NOTA II (*).

« Rend. Acc. Lincei », serie 5ª, vol. IX, 1° sem. 1900,

pp. 237-245

3. – Essendo $[C]$ e $[C']$ due congruenze non-normali, cerchiamo se si può determinarne una terza $[\Gamma]$ congiunta ad entrambe per rifrazione.

Dicasi σ la superficie di passaggio fra $[C]$ e $[\Gamma]$, $1/n$ l'indice di rifrazione per questo passaggio; σ' la superficie, che lega $[\Gamma]$ a $[C']$, n' il relativo indice di rifrazione; x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto qualunque P di σ.

Il raggio di $[\Gamma]$, che passa per P, taglia σ' in un certo punto P', le cui coordinate designeremo con y_1, y_2, y_3.

Posto

$$\overline{PP'} = r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}\,,$$

dovrà aversi sopra σ

$$\sum_1^3{}_i \left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) dx_i = 0\,, \tag{7}$$

e sopra σ'

$$\sum_1^3{}_i \left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right) dy_i = 0\,, \tag{8}$$

intendendosi le X_i funzioni di x_1, x_2, x_3, le Y_i funzioni di y_1, y_2, y_3.

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 1° aprile 1900.

Reciprocamente se si possono determinare sei funzioni x_i, y_i di due parametri u, v, per cui sieno verificate le (7), (8) e non si annullino nè l'uno, nè l'altro dei determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial y_3}{\partial u} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial y_2}{\partial v} & \frac{\partial y_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

si ha mezzo di passare con una duplice rifrazione da $[C]$ a $[C']$.

In primo luogo, l'insieme dei punti $x_i(u, v)$ costituisce realmente una superficie (non una curva), perchè non tutti i minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{Vmatrix},$$

possono insieme annullarsi, in causa di $\Delta \gtrless 0$. Per la stessa ragione, la superficie σ taglia effettivamente la congruenza $[C]$. Analogamente per σ' e $[C']$.

Sulle due superficie rimangono in tal modo accoppiati i punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P'(x_1, x_2, x_3)$, cui competono eguali valori dei parametri u, v.

Scelto un generico raggio di $[C]$, sia appunto P la sua intersezione con σ; in virtù della (7), sarà PP' il raggio rifratto; questo si rifrange a sua volta, attraversando σ' e, per la (8), la sua continuazione è data dal raggio di $[C']$, che passa per P'. E ciò prova l'asserto.

Si tratta dunque di stabilire che si può soddisfare al sistema simultaneo (7), (8) con funzioni di due parametri u, v, per cui non si annullano Δ nè Δ'.

Il sistema (7), (8) equivale alle seguenti quattro equazioni a derivate parziali

$$(9)\qquad \begin{cases} H_1 \equiv \sum_i^{3}{}_{1} \left(nX_i - \dfrac{\partial r}{\partial x_i} \right) \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = 0 \,, \\[2ex] K_1 \equiv \sum_i^{3}{}_{1} \left(n'Y_i - \dfrac{\partial r}{\partial y_i} \right) \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = 0 \,, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} H_2 \equiv \sum_i^{3}{}_{1} \left(nX_i - \dfrac{\partial r}{\partial x_i} \right) \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = 0 \,, \\[2ex] K_2 \equiv \sum_i^{3}{}_{1} \left(n'Y_i - \dfrac{\partial r}{\partial y_i} \right) \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = 0 \,, \end{cases}$$

cui bisogna aggiungere le condizioni di integrabilità

$$H_3 \equiv \frac{\partial H_1}{\partial v} - \frac{\partial H_2}{\partial u} = 0 \,,$$

$$K_3 \equiv \frac{\partial K_1}{\partial v} - \frac{\partial K_2}{\partial u} = 0 \,.$$

Usando la notazione $\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ u & v \end{pmatrix}$ per designare il determinante jacobiano di due generiche funzioni φ, ψ rapporto alle variabili u, v e avendo riguardo alle (3), si ha subito

$$(11)\qquad \begin{cases} H_3 \equiv nA\Delta - \sum_{ij}^{3}{}_{1} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i \, \partial y_j} \begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v \end{pmatrix} = 0 \,, \\[2ex] K_3 \equiv n'A'\Delta' - \sum_{ij}^{3}{}_{1} \dfrac{\partial^2 r}{\partial y_i \, \partial x_j} \begin{pmatrix} y_i & x_j \\ u & v \end{pmatrix} = 0 \,, \end{cases}$$

che sommate ci danno

$$nA\Delta + n'A'\Delta' = 0 \,.$$

Questo sistema di equazioni rimane evidentemente invariato per un cambiamento qualunque delle due variabili indipendenti u, v. Esse si possono fissare, sia identificandole con due delle incognite x_i, y_i, sia più generalmente, aggiungendo al sistema due altre equazioni:

$$(12)\qquad H_4 = 0 \,, \qquad K_4 = 0 \,;$$

(non invarianti di fronte alle trasformazioni $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$).

Comunque, supponiamo di partirci da sei funzioni x_i, y_i *della sola variabile* u, che verifichino le due equazioni (9). Sarà in generale possibile soddisfare alle rimanenti equazioni del sistema, cioè le (10), (11), (12), in numero di sei, con altrettante funzioni delle due variabili u, v, le quali, per un certo valore $v = v_0$, si riducono alle dette funzioni della sola u. Ce ne accerteremo più innanzi in modo rigoroso. Per il momento ammettiamolo, e notiamo che il nostro sistema (9), (10), (11), (12) rimane completamente integrato, poichè anche le (9) (verificate per costruzione, solo quando v ha il valore v_0), sussistono per qualunque valore di v.

Infatti le (11), tenuto conto delle (10), equivalgono a

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0\,, \qquad \frac{\partial K_1}{\partial v} = 0\,;$$

siccome H_1 e K_1 si annullano per $v = v_0$, lo stesso avviene per ogni altro valore di v.

Le sei funzioni $x_i(u)$, $y_i(u)$, integrali delle (9), donde si prendon le mosse, si possono scegliere in guisa che ∞^1 raggi di $[C]$ si trasformino, raggio per raggio, in ∞^1 raggi assegnati di $[C']$.

Per dimostrarlo, supponiamo che

$$x_i = x_i(u, \alpha)\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

$$y_i = y_i(u, \beta)\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

definiscano rispettivamente le due date rigate γ e γ' di $[C]$ e di $[C']$, rappresentando, sopra ognuna di esse, $u =$ cost. generatrici rettilinee, $\alpha =$ cost., $\beta =$ cost. traiettorie ortogonali e intendendo che abbiano a corrispondersi i raggi, cui compete il medesimo valore di u. Potremo anzi ritenere che α e β rappresentino lunghezze, contate sulle generatrici rettilinee a partire da una stessa traiettoria ortogonale e che u misuri l'arco sopra questa traiettoria. Avremo con tale ipotesi $\partial x_i/\partial\alpha = X_i$, $\partial y_i/\partial\beta = Y_i$; di più anche le $\partial x_i/\partial u$, per $\alpha = 0$, le $\partial y_i/\partial u$, per $\beta = 0$, rappresentano coseni direttori.

Vincoliamo i parametri α e β ad essere funzioni di u in modo da soddisfare alle (9), ossia scrivendo per disteso, conformemente a quanto ora s'espose,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du}\sum_1^3{}_i\left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)X_i + \sum_1^3{}_i\left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u} = 0\,,\\ &\frac{d\beta}{du}\sum_1^3{}_i\left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right)Y_i + \sum_1^3{}_i\left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right)\frac{\partial y_i}{\partial u} = 0\,.\end{aligned}\right. \tag{9'}$$

Questo sarà possibile, almeno in un certo campo di valori delle u, α, β, purchè soltanto i valori iniziali corrispondano a punti P_0, P_0' delle due rigate γ, γ', per cui non si annullino i coefficienti

$$\sum_1^3 {}_i\left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) X_i\,, \qquad \sum_1^3 {}_i\left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right) Y_i\,,$$

di $d\alpha/du$, $d\beta/du$.

Scelti con questa precauzione i valori iniziali, rimangono, pel tramite delle (9′), determinate le sei funzioni

$$x_i(u, \alpha(u))\,, \qquad y_i(u, \beta(u))\,,$$

integrali delle (9), e da esse le due superficie rifrangenti σ e σ', in modo che, per $v = v_0$, si corrispondono appunto i due assegnati sistemi ∞^1 di raggi.

4. – Le due congruenze $[C]$ e $[C']$ abbiano un raggio g a comune e precisamente coincidano, sopra g, $-X_1$, $-X_2$, $-X_3$ con Y_1, Y_2, Y_3 ordinatamente.

I valori delle anormalità, relativi ai punti di g sieno diversi da zero.

Voglio mostrare che, almeno in un intorno abbastanza piccolo di g, sono effettivamente soddisfatte tutte le restrizioni di disuguaglianza, che assicurano la esistenza del sistema integrale e la biunivocità della corrispondenza fra i raggi delle due congruenze. In altri termini, *date ad arbitrio una rigata γ di $[C]$ e una γ' di $[C']$, aventi un raggio g a comune, e tra le loro generatrici rettilinee una corrispondenza, di cui sia g raggio unito, esistono* (e sono univocamente individuate dagli indici di rifrazione e dalla condizione di passare per due dati punti P_0, P_0' di g) *due superficie rifrangenti σ e σ', atte a trasformare $[C]$ in $[C']$* (più esattamente un pennello abbastanza piccolo di raggi di $[C]$, intorno a g, in analogo pennello di $[C']$).

Prendiamo per semplicità la retta g come asse x_3, e, dati arbitrariamente sopra di essa due punti non coincidenti P_0, P_0', assumiamone le coordinate come valori iniziali delle nostre funzioni x_i, y_i.

Collocando l'origine delle coordinate nel punto medio del segmento $P_0P_0'(= 2l > \varepsilon)$ e scegliendo la P_0P_0' per direzione positiva dell'asse x_3, avremo come valori iniziali

$$(15) \qquad \begin{cases} x_1^0 = 0\,, & x_2^0 = 0\,, & x_3^0 = -l\,, \\ y_1^0 = 0\,, & y_2^0 = 0\,, & y_3^0 = l\,, \end{cases}$$

e inoltre

$$
(16) \qquad \begin{cases}
X_1^0 = 0\,, \quad X_2^0 = 0\,, \quad X_3^0 = -1\,, \\
Y_1^0 = 0\,, \quad Y_2^0 = 0\,, \quad Y_3^0 = 1\,, \\
\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_1}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x_2}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_2}\right)_0 = 0\,, \\
\qquad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x_3}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_3}\right)_0 = -1\,, \\
r_0 = 2l > 0\,, \quad A_0 \gtrless 0\,, \quad A'_0 \gtrless 0\,.
\end{cases}
$$

Comunque si assegnino le rigate γ, γ', e le generatrici che debbono corrispondere sopra di esse, per essere g raggio unito, le rappresentazioni parametriche (del tipo poc'anzi dichiarato) fanno corrispondere, in entrambe le rigate, il raggio g ad uno stesso valore u_0 del parametro u. Riterremo che questo individui sopra γ l'arco di traiettoria, ortogonale alle generatrici, passante per P_0; sopra γ' l'arco della traiettoria, passante per P'_0.

Dacchè le tangenti a queste curve in P_0, P'_0 sono entrambe ortogonali a g, le direzioni delle bisettrici costituiscono con g una terna ortogonale e potremo supporre gli assi x_1, x_2 paralleli a queste bisettrici. Chiamando 2ϑ l'angolo delle due tangenti in questione, i valori, per $u = u_0$, di $\partial x_i/\partial u$, $\partial y_i/\partial u$ (coseni direttori delle dette tangenti) saranno del tipo

$$
\frac{\partial x_1}{\partial u} = \cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = -\operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0\,,
$$

$$
\frac{\partial y_1}{\partial u} = \cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial u} = \operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \frac{\partial y_3}{\partial u} = 0\,,
$$

potendosi ancora ritenere $0 \leq \vartheta < \pi/2$.

Cominciamo dal constatare che, coi valori iniziali (16), non si annullano i coefficienti di $d\alpha/du$, $d\beta/du$ nelle (9'). Essi divengono infatti $n-1$, $n'-1$, che sono proprio diversi da 0, perchè $n = 1$ o $n' = 1$ significherebbero assenza di rifrazione, e noi supponiamo essenzialmente che rifrazione (o riflessione) vi sia. Determinate dalle (9') le funzioni α e β di u, portandole nelle (13), (14), se ne traggono sei funzioni

$$
(17) \qquad x_1(u),\ \ x_2(u),\ \ x_3(u)\,; \qquad y_1(u),\ \ y_2(u),\ \ y_3(u),
$$

che soddisfanno alle (9) e si riducono ai valori (15) per $u = u_0$.

Circa ai valori delle derivate di queste funzioni, per $u = u_0$, si ha intanto dalle (9)

$$\left(\frac{dx_3}{du}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{dy_3}{du}\right)_0 = 0\ ;$$

d'altra parte

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + X_1 \frac{d\alpha}{du}\,,$$

quindi

$$\left(\frac{dx_1}{\partial u}\right)_0 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)_0 = \cos\vartheta\ ;$$

analogamente per

$$\left(\frac{dx_2}{du}\right)_0, \quad \left(\frac{dy_1}{du}\right)_0, \quad \left(\frac{dy_2}{du}\right)_0.$$

In definitiva i valori iniziali delle sei derivate delle funzioni (17) sono

$$(18)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dx_1}{du}\right)_0 = \cos\vartheta\,, & \left(\dfrac{dx_2}{du}\right)_0 = -\operatorname{sen}\vartheta\,, & \left(\dfrac{dx_3}{du}\right)_0 = 0\,, \\[2ex] \left(\dfrac{dy_1}{du}\right)_0 = \cos\vartheta\,, & \left(\dfrac{dy_2}{du}\right)_0 = \operatorname{sen}\vartheta\,, & \left(\dfrac{dy_3}{du}\right)_0 = 0\,. \end{cases}$$

Ciò posto, consideriamo il sistema (10), (11), cui si aggiungano le equazioni ausiliarie (12), particolarizzandole, per es., in

$$(12)\qquad \begin{cases} H_4 \equiv \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\dfrac{\partial x_2}{\partial v} + l = 0\,, \\[2ex] K_4 \equiv \dfrac{\partial y_1}{\partial u}\dfrac{\partial y_1}{\partial v} - \dfrac{\partial y_2}{\partial u}\dfrac{\partial y_2}{\partial v} - l = 0\,. \end{cases}$$

Tutto si riduce ormai a far vedere che le sei equazioni (10), (11), (12), per $u = u_0$, $x_i = x_i^0$, $y_i = y_i^0$, si possono risolvere rispetto alle derivate $\partial x_i/\partial v$, $\partial y_i/\partial v$, e che i valori, che se ne traggono per queste derivate, non annullano Δ nè Δ'. Con ciò infatti, il sistema integrale delle (10), (11), (12), il quale, per un valore qualunque v_0 di v, si riduce alle funzioni (17) della sola u, soddisfa a tutte le condizioni volute.

Per la dimostrazione, notiamo in primo luogo che le equazioni (10) e le nostre ausiliarie (12) pei valori (16) e (18), si riducono a

$$(10') \qquad \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)_0 = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial y_3}{\partial v}\right)_0 = 0\,,$$

$$(12') \qquad \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 + \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0 = -\,l\,, \quad \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 - \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 = l\,;$$

si ha poi

$$-\Delta_0 = \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0, \qquad \Delta'_0 = -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial y}\right)_0.$$

La identità

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial y_j} + \varepsilon_{ij}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

(in cui ε_{ij} designa al solito lo zero o l'unità, secondochè gli indici i e j sono distinti o coincidenti) porge

$$-\sum_1^3{}_{ij}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\sum_1^3{}_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial y_j}\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v\end{pmatrix} + \frac{1}{r}\sum_1^3{}_i\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ u & v\end{pmatrix},$$

e, introducendovi i valori (16) e (18), il secondo membro diventa

$$\frac{\cos\vartheta\left\{\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0\right\} - \operatorname{sen}\vartheta\left\{\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0\right\}}{2l},$$

che, in virtù delle ausiliarie (12′), è uguale all'unità.

Le (11) assumono con ciò la forma

$$(11') \qquad \begin{cases} \Delta_0 = -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 - \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0 = -\dfrac{1}{nA_0}\,, \\[2ex] \Delta'_0 = -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 = \dfrac{1}{n'A'}\,. \end{cases}$$

Da esse e (12′) si traggono le quattro derivate $(\partial x_1/\partial v)_0$, $(\partial x_2/\partial v)_0$, $(\partial y_1/\partial v)_0$, $(\partial y_2/\partial v)_0$, purchè soltanto non si incontrino sotto angolo retto i piani tangenti in P_0, P_0' alle due rigate γ e γ', sia cioè $\cos 2\vartheta$ diverso da zero.

Per il suo significato geometrico, questa condizione è indipendente dal modo, con cui si particolarizzano le equazioni ausiliarie (12); si può del resto riconoscerlo direttamente, osservando che, qualunque sieno le equazioni ausiliarie, se il sistema deve fornire valori non infiniti per

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0,$$

lo stesso è d'uopo avvenga per

$$\Delta_0, \quad \Delta_0', \quad -\sum_{1}^{3}{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ u & v \end{pmatrix}_0.$$

Ora il quadrato della matrice dei coefficienti di $(\partial x_1/\partial v)_0$, $(\partial x_2/\partial v)_0$, $(\partial y_1/\partial v)_0$, $(\partial y_2/\partial v)_0$ in queste tre espressioni, vale $\cos^2 2\vartheta/2l^2$ e si annulla quindi per $\cos 2\vartheta = 0$. D'altra parte, detto k il valore di

$$-\sum_{1}^{3}{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\right)_0\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v \end{pmatrix},$$

dovrebbero sussistere, a norma delle (11), le tre equazioni

$$-\sum_{1}^{3}{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\right)_0\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v \end{pmatrix}_0 = k, \qquad -\Delta_0 = \frac{k}{nA_0}, \qquad \Delta_0' = \frac{k}{n'A_0'},$$

(per $\vartheta = \pi/4$; $k \lesseqgtr 0$) e questo richiederebbe, come tosto si riconosce,

$$2l + \frac{1}{nA_0} + \frac{1}{n'A'} = 0,$$

il che in generale non è.

Escluso pertanto che l'angolo 2ϑ sia retto, le equazioni del nostro sistema sono risolubili rispetto alle sei derivate $(\partial x_i/\partial v)_0$, $(\partial y_i/\partial v)$, e $\Delta_0 = -1/nA_0$, $\Delta_0' = 1/n'A_0'$ riescono, come è necessario, diversi da zero.

Gioverà aggiungere, riportandosi ad una osservazione, fatta alla fine del § 2, che, nell'intorno considerato, *la soluzione del problema è, non solo geometricamente, ma anche fisicamente possibile.*