XXII.

# SULLE CONGRUENZE DI CURVE (*)

« Rendiconti Acc. Lincei », s. 5°, vol. VIII, 1° sem. 1899

pp. 239-246

Data nello spazio ordinario una congruenza $[C]$ di curve $c$, fissiamo ad arbitrio un punto $P$ (nell'intorno del quale la congruenza si comporti in modo regolare) e diciamo $t_P$ la tangente, $\pi_P$ il piano normale a $c$ nel punto $P$.

Le tangenti $t$ alle curve $c$, spiccate dai punti di $\pi_P$, costituiscono una congruenza rettilinea $[T_P]$, ed è ben chiaro che la natura di essa dipende esclusivamente dalla natura della congruenza fondamentale $[C]$.

In particolare gli elementi metrici di prim'ordine (ascisse dei punti limiti, distanza focale, angolo dei piani focali, ecc.), che competono al raggio $t_P$, in quanto appartiene a $[T_P]$, si possono esprimere per mezzo dei coseni direttori della congruenza $[C]$, relativi al punto $P$, e loro derivate prime.

L'impiego dei simboli di RICCI permette di attribuire a queste espressioni una forma assai semplice, da cui discendono alcune facili conseguenze.

Si ha in primo luogo che una congruenza $[C]$ è o no normale assieme a $[T_P]$, o più esattamente, che in un generico punto $P$, la condizione di normalità per la congruenza $[C]$ equivale alla condizione di normalità della congruenza rettilinea $[T_P]$, e si può quindi enunciare dicendo che devono essere perpendicolari i piani focali, relativi al raggio $t_P$.

Ma più notevole è il caso, in cui sopra $t_P$ coincidono i punti limiti.

Con naturale estensione dell'appellativo, usato per le congruenze rettilinee, diremo *isotrópe* le congruenze $[C]$, per cui si presenta questa circostanza. Esse godono di due proprietà interessanti, che non credo siano state osservate, nemmeno per le congruenze rettilinee.

---

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI nella seduta del 5 marzo 1899.

La prima proprietà si deduce immediatamente dalla definizione di isotropia, in base a un teorema del prof. Ricci, e consiste in ciò che ogni congruenza isotrópa $[C]$ si può in infiniti modi risguardare come risultante dalle intersezioni di due famiglie ortogonali di superficie. In altri termini, la equazione lineare ed omogenea del prim'ordine, che ha per caratteristiche le curve $c$, possiede infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

La seconda proprietà è che le rette cicliche, passanti per i vari punti $P$, e appartenenti ai rispettivi piani $\pi_p$, costituiscono due congruenze coniugate (anzichè due complessi, come avverrebbe in generale). Ciò è quanto dire che *ogni congruenza isotrópa* (reale) *è ortogonale a due congruenze rettilinee coniugate, costituite da rette cicliche, e reciprocamente.*

Di qua segue tosto la costruzione di tutte le congruenze isotrópe, e in pari tempo la espressione generale pei coefficienti $A$, $B$ (supposti reali) delle equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y},$$

che ammettono infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

**1.** – Alla congruenza data $[C]$ associamone due altre $[1]$ e $[2]$, che costituiscano con essa una terna ortogonale. Per individuarla, ci varremo dei simboli ben noti del prof. Ricci (¹). Si designerà la $[C]$ con $[3]$ e in generale con $\lambda_{h/r}$, $(r = 1, 2, 3)$ il sistema coordinato covariante della congruenza $[h]$, $(h = 1, 2, 3)$.

Lo spazio si intenderà riferito ad un sistema di coordinate curvilinee $x_1$, $x_2$, $x_3$, che ci riserviamo di far coincidere, quando giovi, colle ordinarie coordinate cartesiane ortogonali. Il supporle tali a priori non recherebbe alcuna maggiore semplificazione.

Sieno $x_1$, $x_2$, $x_3$ le coordinate di $P$, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ quelle di un generico punto $Q$, vicino a $P$ in $\pi_p$.

Detto $ds$ il segmento elementare $PQ$, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = (\pi/2) - \varphi$ gli angoli che esso forma colle direzioni positive delle linee 1, 2, passanti per $P$, $\lambda_{3/r} + \mu_r ds$ i valori delle $\lambda_{3/r}$ in $Q$, avremo, colle notazioni del calcolo differenziale assoluto:

$$dx_r = ds\,(\cos\varphi\,\lambda_1^{(r)} + \operatorname{sen}\varphi\,\lambda_2^{(r)}) = ds\sum_{h}^{1\ldots2}\cos\varphi_h\,\lambda_h^{(r)},$$

$$(r = 1, 2, 3)$$

$$\mu_r = \sum_{q}^{1\ldots3}\lambda_{3/rq}\frac{dx_q}{ds} = \sum_{q}^{1\ldots3}\lambda_{3/rq}\sum_{h}^{1\ldots2}\cos\varphi_h\,\lambda_h^{(q)}.$$

(¹) Cfr. principalmente: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, 1896.

(Per convincersene, basta notare che queste formule hanno carattere invariantivo e sussistono evidentemente in coordinate cartesiane ortogonali).

Introducendo gli invarianti $\gamma$, definiti dalla formula generale:

$$\gamma_{ljk} = \sum_{rs}{}_1^3 \lambda_{l/rs}\lambda_j^{(r)}\lambda_k^{(s)}, \qquad (l, j, k = 1, 2, 3),$$

si ha:

$$\sum_q{}_1^3 \lambda_{3/rq}\lambda_h^{(q)} = \sum_i{}_1^3 \gamma_{3ih}\lambda_{i/r},$$

e quindi, ricordando che $\gamma_{33h} = 0$, l'espressione delle $\mu_r$ diviene:

$$\mu_r = \sum_{ih}{}_1^2 \lambda_{i/r}\gamma_{3ih}\cos\varphi_h, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{1}$$

donde:

$$\left\{\begin{aligned} \mu^{(r)} &= \sum_{ih}{}_1^2 \lambda_i^{(r)}\gamma_{3ih}\cos\varphi_h, \\ \frac{1}{\varrho^2} &= \sum_r{}_1^3 \mu_r\mu^{(r)} = \sum_{ihjk}{}_1^2 \gamma_{3ih}\gamma_{3ik}\cos\varphi_h\cos\varphi_k \sum_r{}_1^3 \lambda_{i/r}\lambda_j^{(r)} \\ &= \sum_{ihk}{}_1^2 \gamma_{3ih}\gamma_{3ik}\cos\varphi_h\cos\varphi_k = (\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2)\cos^2\varphi + \\ &+ 2(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322})\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + (\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Abbiamo designato $\sum_r{}_1^3 \mu_r\mu^{(r)}$ con $1/\varrho^2$, supponendo implicitamente $\sum_r{}_1^3 \mu_r\mu^{(r)}$ diverso da zero. L'ipotesi opposta equivale a $\mu_r = 0$, $(r=1, 2, 3)$. La congruenza $[T_P]$ si comporta allora, rispetto a $t_P$, come se fosse costituita da rette parallele; e non c'è nulla da aggiungere. Ecco perchè si può escludere a priori che $\sum_r{}_1^3 \mu_r\mu^{(r)}$ si annulli.

In coordinate cartesiane, le $\lambda_{3/r}$ (o $\lambda_3^{(r)}$) sono i coseni direttori di $t_P$ e le $\lambda_{3/r} + \mu_r ds$ (o $\lambda_3^{(r)} + \mu^{(r)} ds$) quelli di $t_Q$ (la direzione positiva sopra le $t$ corrispondendo a quella delle curve $c$). Diciamo ancora $\nu_r$ (o $\nu^{(r)}$) i coseni direttori della minima distanza $dp$ fra $t_P$ e $t_Q$; $\psi$ l'angolo fra la direzione positiva di $dp$ e quella della linea 1, relativa al punto $P$; $\alpha$ l'ascissa del piede di $dp$ sopra $t_P$, contata a partire da $P$.

Colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici, congrui fra loro rispetto al modulo 3, e notando che $\sum_1^3 {}_r \lambda_{3/r}\mu^{(r)} = 0$, $\sqrt{a} = 1$ ($a$ è il discriminante della forma fondamentale) potremo scrivere:

$$(3) \qquad \nu^{(r)} = \varrho \frac{\lambda_{3/r+1}\mu_{r+2} - \lambda_{3/r+2}\mu_{r+1}}{\sqrt{a}}, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e (²),

$$(4) \qquad dp\,\nu^{(r)} = ds\{\cos\varphi\,\lambda_1^{(r)} + \operatorname{sen}\varphi\,\lambda_2^{(r)} + \alpha\mu^{(r)}\}, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

le quali formule seguitano a sussistere in coordinate generali, purchè si risguardino anche le $\nu^{(r)}$ come elementi di un sistema contravariante.

Con facile trasformazione si trova:

$$(3') \quad \nu^{(r)} = \varrho\cos\varphi\{\gamma_{311}\lambda_2^{(r)} - \gamma_{321}\lambda_1^{(r)}\} + \varrho\operatorname{sen}\varphi\{\gamma_{312}\lambda_1^{(r)} - \gamma_{322}\lambda_2^{(r)}\}, \quad (r=1,2,3),$$

e da queste, moltiplicando successivamente per $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ e sommando ciascuna volta rispetto ad $r$, ove si tenga conto che $\sum_1^3 {}_r \nu^{(r)}\lambda_{1/r} = \cos\psi$, $\sum_1^3 {}_r \nu^{(r)}\lambda_{2/r} = \operatorname{sen}\psi$:

$$(5) \qquad \left|\begin{array}{l} \cos\psi = -\,\varrho\,\{\gamma_{321}\cos\varphi + \gamma_{322}\operatorname{sen}\varphi\} \\ \operatorname{sen}\psi = \quad \varrho\,\{\gamma_{311}\cos\varphi + \gamma_{312}\operatorname{sen}\varphi\}. \end{array}\right.$$

Poniamo:

$$(6) \qquad \Delta = \gamma_{311}\gamma_{322} - \gamma_{312}\gamma_{321}$$

ed osserviamo che $\Delta^2$ è il discriminante di

$$\frac{1}{\varrho^2} = (\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2)\cos^2\varphi + 2(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322})\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + (\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2)\operatorname{sen}^2\varphi$$

e non può quindi annullarsi. Ne viene che le (5) sono certamente risolubili rispetto a $\varrho\cos\varphi$, $\varrho\operatorname{sen}\varphi$ e la effettiva risoluzione porge:

$$(5') \qquad \left\{\begin{array}{l} \varrho\cos\varphi = \quad \dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{312}\cos\psi + \gamma_{322}\operatorname{sen}\psi\}, \\ \varrho\operatorname{sen}\varphi = -\dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos\psi + \gamma_{321}\operatorname{sen}\psi\}. \end{array}\right.$$

---

(²) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; pag. 247 [2ª ed., vol. I (1902), pag. 300].

In causa delle (3), $\sum_{1}^{3}{}_r \nu^{(r)}\mu_r = 0$, e perciò, se si moltiplicano le (4) per $\mu_r$ e si somma, avendo riguardo alle (1), (2) e (5), risulta:

$$\alpha = \varrho \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\,. \tag{7}$$

A mezzo delle (5′), si può esprimere tutto per $\psi$ e si ha, fra l'anomalia $\psi$ della minima distanza e la ascissa $\alpha$ del suo piede, la relazione:

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos^2\psi + (\gamma_{312} + \gamma_{321})\cos\psi \operatorname{sen}\psi + \gamma_{322}\operatorname{sen}^2\psi\}\,,$$

cui, posto:

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta\cos\vartheta\,,\\ &\gamma_{312} + \gamma_{321} = \delta \operatorname{sen}\vartheta\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

si attribuisce la forma:

$$\alpha = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} - \frac{\delta}{2\Delta}\cos(2\psi + \vartheta)\,. \tag{9}$$

Di qua apparisce che i valori di $\alpha$ rimangono necessariamente compresi fra:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} - \frac{\delta}{2\Delta}\,,\\ &\alpha_2 = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} + \frac{\delta}{2\Delta}\,, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

talchè $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono le ascisse dei punti limiti. I corrispondenti valori $\psi_1$ e $\psi_2$ di $\psi$ (anomalie dei piani principali) sono determinati, per $\delta$ diverso da zero, dalle equazioni:

$$2\psi_1 + \vartheta = \pi\,,$$

$$2\psi_2 + \vartheta = 0\,,$$

e differiscono quindi tra loro di un angolo retto.

Se si suppone che le linee 1 e 2 abbiano in ogni punto $P$ le direzioni dei piani principali, $\vartheta$ è nullo e le (8) divengono:

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta\,,\\ &\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{8'}$$

ossia (³) *le dette linee costituiscono il sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza* [3], *e* $\delta$ *è la differenza fra le due radici della equazione caratteristica della congruenza.*

Se $t_Q$ incontra $t_P$, dovrà essere evidentemente (avuto riguardo al modo, con cui rimane fissata dalle (3) la direzione positiva sopra la normale) $\varphi = \psi + \pi/2$, e, per individuare $\psi$, si hanno dalle (5) le equazioni:

$$\cos\psi = \varrho\{-\gamma_{322}\cos\psi + \gamma_{321}\,\mathrm{sen}\,\psi\},$$

$$\mathrm{sen}\,\psi = \varrho\{\ \ \gamma_{312}\cos\psi - \gamma_{311}\,\mathrm{sen}\,\psi\},$$

ovvero, eliminando $\varrho$, la:

$$\gamma_{321}\,\mathrm{tg}^2\psi + (\gamma_{311}-\gamma_{322})\,\mathrm{tg}\,\psi - \gamma_{312} = 0\,. \tag{11}$$

Se invece si elimina $\psi$, si ottiene:

$$\Delta\varrho^2 + (\gamma_{311}+\gamma_{322})\varrho + 1 = 0\,, \tag{12}$$

la quale equazione, risultando dalla (7) $\alpha = \varrho$, ha per radici le ascisse $\varrho_1$, $\varrho_2$ dei fuochi.

Dalle (10) e (12) si trae:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\gamma_{311}+\gamma_{322}}{\Delta}\,,$$

cioè i punti limiti e i fuochi hanno il medesimo punto di mezzo, ecc.

**2.** – La condizione necessaria e sufficiente affinchè la nostra congruenza [3] sia normale, è data, come si sa, da $\gamma_{312} - \gamma_{321} = 0$, la quale, a tenore delle (11), (12) e (10), esprime che i piani focali sono ortogonali fra loro, od anche che i fuochi cadono nei punti limiti.

Se $\delta = 0$, i punti limiti coincidono e (semprechè ciò avvenga per ogni punto $P$ del campo, che si considera) la congruenza [3] è a dirsi isotrópa.

La condizione di isotropia equivale a:

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_{311} - \gamma_{322} = 0\,,\\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0\,,\end{array}\right. \tag{8''}$$

(³) Ricci, Mem. cit., pag. 31.

donde risulta [4] che la equazione caratteristica di [3] ha le radici eguali e quindi che, ad ogni integrale della equazione

$$\sum_1^3 {}_r\, \lambda_3^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0\,,$$

ne corrisponde un secondo ortogonale.

**3.** – Affinchè una generica congruenza:

$$\text{(13)} \qquad \frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \frac{dx_3}{X^{(3)}}\,,$$

consti di linee rette, è necessario e basta che le $\sum_1^3 {}_s\, X_{rs} X^{(s)}$ riescano proporzionali alle $X_r$, si abbia cioè, designando $M$ un moltiplicatore arbitrario [5]:

$$\text{(14)} \qquad \sum_1^3 {}_s\, X_{rs} X^{(s)} = M X_r\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Ciò posto, io dico che, se [3] è una congruenza isotrópa, e si suppone:

$$\text{(15)} \qquad X_r = \lambda_{1/r} \pm i\lambda_{2/r}\,, \qquad (i = \sqrt{-1},\ r = 1, 2, 3),$$

le (14) sono soddisfatte.

Si ha infatti:

$$\text{(16)} \qquad \sum_1^3 {}_s\, X_{rs} X^{(s)} = \sum_1^3 {}_s\, (\lambda_{1/rs} \pm i\lambda_{2/rs})(\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)})$$

$$= \sum_1^3 {}_{hk}\, (\gamma_{1hk} \pm i\gamma_{2hk})\lambda_{h/r} \sum_1^3 {}_s\, (\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)})\lambda_{k/s} = \sum_1^3 {}_h \{(\gamma_{1h1} - \gamma_{2h2}) \pm i(\gamma_{2h1} + \gamma_{1h2})\}\lambda_{h/r}\,,$$

e, siccome, in virtù delle (8″), il coefficiente di $\lambda_{3/r}$ si annulla, così segue tosto:

$$\sum_1^3 {}_r\, X_{rs} X^{(s)} = (\gamma_{122} + i\gamma_{211}) X_r\,, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

giusta l'asserto.

---

(4) Ricci, ibidem, e pag. 44.

(5) La verifica è ovvia, se si tratta di coordinate cartesiane ortogonali. Il carattere invariantivo delle (14) ne assicura d'altra parte la validità, qualunque sia il sistema di riferimento.

Se dunque nelle (13) si intendono attribuiti alle $X$ i valori (15), si hanno due congruenze rettilinee immaginarie coniugate ed è ben chiaro che, per ogni punto $P$, i raggi corrispondenti delle due congruenze sono le rette cicliche situate in $\pi_P$.

Reciprocamente, data ad arbitrio una coppia di congruenze coniugate, costituite da rette cicliche, la congruenza [3], che rimane univocamente determinata, è isotrópa. Infatti l'annullarsi del coefficiente di $\lambda_{3/r}$ nelle (16) porta per necessità le ($8''$).

**4.** – Possiamo valerci della proprietà, testè dimostrata, per costruire tutte le congruenze isotrópe.

Le coordinate $x_1$, $x_2$, $x_3$ essendo cartesiane ortogonali, si faccia:

$$\xi = x_1 + ix_2 \,, \quad \eta = x_1 - ix_2 \,, \quad \zeta = x_3 \,,$$

$$\Xi = \frac{X^{(1)} + iX^{(2)}}{X^{(3)}} \,, \quad H = \frac{X^{(1)} - iX^{(2)}}{X^{(3)}} \,,$$

(il che è sempre lecito, perchè una almeno delle $X$ è diversa da zero). Le (13) divengono:

$$\frac{d\xi}{\Xi} = \frac{d\eta}{H} = d\zeta \,, \tag{13'}$$

e si vede subito che la congruenza sarà costituita da rette cicliche, purchè:

$$H = -\frac{1}{\Xi} \,, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\,\Xi - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}\,\frac{1}{\Xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} = 0 \,. \tag{18}$$

L'integrale generale di quest'ultima equazione è dato da:

$$f\left(\Xi,\ \xi - \Xi\zeta,\ \eta + \frac{\zeta}{\Xi}\right) = 0 \,,$$

ossia, ripassando alle variabili $x_1$, $x_2$, $x_3$, da:

$$f\left(\Xi,\, x_1 + ix_2 - \Xi x_3,\, x_1 - ix_2 + \frac{x_3}{\Xi}\right) = 0 \,, \tag{18'}$$

dove $f$ è simbolo di funzione arbitraria.

Noto $\Xi$, si ha $H$ dalla (17) e, ponendo:

$$\Xi + H = \sigma_1 + i\tau_1 \,, \qquad \Xi - H = -\tau_2 + i\sigma_2 \,, \tag{19}$$

(con $\sigma$ e $\tau$ funzioni reali) le congruenze di rette cicliche restano individuate da:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 + i\tau_1} = \frac{dx_2}{\sigma_2 + i\tau_2} = dx_3 \,. \tag{20}$$

Lo scambio di $i$ in $-i$ determina le congruenze coniugate:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 - i\tau_2} = \frac{dx_2}{\sigma_2 - i\tau_2} = dx_3 \,, \tag{21}$$

e le isotrópe devono risultare ortogonali alle (20), (21). Assumendole per esempio sotto la forma:

$$\frac{dx_1}{A} = \frac{dx_2}{B} = - dx_3 \,,$$

saranno $A$, $B$ soluzioni del sistema:

$$A(\sigma_1 \pm i\tau_1) + B(\sigma_2 \pm i\tau_2) = 1 \,,$$

da cui:

$$A = \frac{\tau_2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \,, \quad B = \frac{-\tau_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \,. \tag{22}$$

Ne viene, scrivendo $x$, $y$, $z$ per $x_1$, $x_2$, $x_3$:
*Le equazioni*

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial y} + B\frac{\partial u}{\partial y} \,,$$

*a coppie di integrali ortogonali sono tutte e soltanto quelle, in cui* $A$, $B$ *hanno i valori* (22), *che si ricavano, per mezzo delle* (17), (19) *da ogni soluzione* $\Xi$ *della* (18').