XX.

SULLA INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONE $\Delta_2\Delta_2 u = 0$.

« Atti Acc. Torino », vol. XXXIII (1897–1898), pp. 932-956.

La integrazione dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ entro un'area piana semplicemente connessa, per dati valori al contorno di u e della sua derivata normale, venne effettuata in modo completo soltanto per contorni di forma molto particolare (1).

È mio proposito di mostrare anzitutto (§ 1) come la questione possa in ogni caso essere ricondotta:

1) alla rappresentazione conforme dell'area data sopra un cerchio;

2) alla risoluzione di un certo sistema (Ω) di infinite equazioni lineari con infinite incognite.

Con ciò il problema si potrebbe, almeno dal punto di vista teorico, ritenere esaurito, se si sapessero assegnare le incognite del sistema (Ω): ma la cosa non è senz'altro fattibile, rimanendo tale sistema fuor della cerchia, trattata finora col metodo dei determinanti infiniti (2).

È dunque necessario studiare da vicino il sistema (Ω).

Premesso (§ 2) un criterio generale assai semplice, per risolvere i sistemi lineari infiniti a mezzo di successive approssimazioni (3), passo

(1) Cfr. principalmente: É. Mathieu, *Mémoire sur l'équation aux différences partielles...* « Journal de Mathématiques », 2ª série, t. XIV, 1869; O. Venske, *Zur integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche*, « Göttinger Nachrichten », 1891; G. Lauricella, *Integrazione dell'equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare*, in questi « Atti », vol. XXXI, 1896; E. Almansi, *Sulla integrazione dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$*, ibidem. I risultati generali, stabiliti dal sig. Lauricella per le equazioni della elasticità, inducono, a mio credere, la persuasione che sia possibile estendere anche all'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ il metodo di Neumann della media aritmetica, ma la teoria è ancora da edificare.

(2) Veggasi: T. Cazzaniga, *Sui determinanti d'ordine infinito*, « Annali di Matematica », 1897. Si riconoscerebbe facilmente che il nostro sistema (Ω) non rientra nei tipi risoluti dall'Autore (Cap. XIV, nn. 1, 7, 8).

(3) Il Prof. Volterra ha avuto la bontà di comunicarmi un metodo di risoluzione, di cui già da tempo egli era in possesso. La via delle approssimazioni successive, qui seguita, è apparentemente diversa, ma in sostanza coincide con quella proposta dal Prof. Volterra.

a indagarne le condizioni di applicabilità al sistema (Ω). Non mi è riuscito di stabilire in generale la validità effettiva del procedimento, ma solo (§ 3) introducendo una considerevole restrizione sulla natura del contorno. Rimane ciò non pertanto una classe ben ampia di aree piane, per cui si è messi in grado di condurre a termine la ricerca. A ciò è dedicato il § 4. Il § 5 contiene due esempi, che mi sembrano notevoli per la loro generalità.

Del resto io vorrei che il lettore risguardasse la classe di contorni, in tal modo circoscritta, piuttosto come una illustrazione del metodo che come la sua definitiva portata, sembrandomi assai verosimile che il campo di validità ne sia di gran lunga più esteso.

Mi si conceda di aggiungere che il procedimento, di cui qui è parola, porta ad una espressione della funzione incognita u relativamente molto semplice. Essa si presenta come somma di due integrali, uno semplice e uno doppio, che dipendono direttamente dai dati del problema e dal parametro di rappresentazione conforme dell'area, che si considera. L'integrale doppio contiene *linearmente* le costanti, provenienti dalla risoluzione del sistema (Ω).

1. – Sia data nel piano x', y' un'area semplicemente connessa σ'; designi s' il contorno, p' la normale diretta verso l'interno. Si tratta di assegnare una funzione u finita e continua assieme alle sue derivate dei primi quattro ordini in ogni punto di σ', la quale soddisfaccia entro σ' alla equazione:

$$\Delta_2'\Delta_2' u = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(\Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

e sul contorno s' alle:

$$u = \varphi\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p'} = \psi\,, \tag{3}$$

in cui φ e ψ rappresentano due funzioni continue dei punti del contorno, comunque assegnate.

Consideriamo in un secondo piano x, y (eventualmente sovrapposto al primo) il cerchio σ di raggio 1 col centro nell'origine delle coordinate; poniamo poi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z' = f(z)$, intendendo che f stabilisca la rappresentazione conforme del cerchio sopra l'area σ'.

Se si immagina di sostituire alle variabili x', y' le nuove variabili x, y mediante la trasformazione $z' = f(z)$, risulterà:

$$dx'^2 + dy'^2 = H^2(dx^2 + dy^2),$$

con $H(x, y) = |f'(z)|$; quindi $dp' = H dp$ (essendo dp' e dp elementi lineari normali rispettivamente ad s' e alla circonferenza); e, per la nota teoria dei parametri differenziali:

$$\Delta_2' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{H^2}\Delta_2 u .$$

Ciò posto, risguardando u quale funzione dei punti x, y del cerchio, avremo:

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\Delta_2 u\right) = 0 ,$$

entro il cerchio σ;

$$(2^{\text{bis}}) \qquad u = \varphi ,$$

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = H\psi ,$$

sopra la circonferenza, dove i valori di φ e ψ in un punto qualunque della circonferenza sono quelli fissati per il punto corrispondente di s'.

La (1^{bis}) ci dice che $(1/H^2)\Delta_2 u$ è una funzione armonica (regolare, per la natura stessa di u e di H, nei punti interni a σ). Perciò, introducendo le coordinate polari ϱ e θ, potremo porre:

$$(4) \qquad w(\varrho, \theta) = \frac{1}{H^2}\Delta_2 u = \alpha_0 + \sum_1^\infty \varrho^m\{\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta\} ,$$

le α e β essendo per ora indeterminate. La (1^{bis}) diviene così:

$$(1^{\text{ter}}) \qquad \Delta_2 u = H^2 w(\varrho, \theta) .$$

Se si ammette che $H^2 w(\varrho, \theta)$ sia integrabile nel cerchio di raggio 1 (il dubbio può sorgere, perchè nulla si sa a priori circa il comportamento di H^2 e di $w(\varrho, \theta)$ per $\varrho = 1$), alla (1^{ter}) e alla (2^{bis}) si soddisfa, come ben si sa, definendo u mediante l'equazione:

$$(5) \qquad u(\varrho_1, \theta_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} GH^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1} \varphi\, d\theta ,$$

in cui G rappresenta la funzione di Green, cioè:

$$G = \log\sqrt{1 + \varrho^2\varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\theta - \theta_1)} + \log\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\theta-\theta_1)}} ,$$

Tutto si riduce oramai a determinare w in modo che riesca sulla circonferenza $-\partial u/\partial\varrho_1 = H\psi$.

Per evitare ogni discussione, facciamo l'ipotesi che il contorno s' dell'area, originariamente assegnata, abbia in ogni punto un raggio di curvatura finito e quindi che la funzione H si conservi finita e derivabile (la derivata soddisfacendo alle condizioni di Dirichlet) anche nei punti della circonferenza; supponiamo di più che la funzione φ sia dotata di derivata prima e seconda, la ψ almeno di derivata prima, soddisfacenti esse pure alle condizioni di Dirichlet lungo s'.

Risulta da ciò che φ ed $H\psi$ possono essere rappresentate sopra la circonferenza mediante serie di Fourier:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(\theta_1) = \dfrac{1}{2}p_0' + \sum_1^\infty{}_n (p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1) , \\[2ex] H(1, \theta_1)\psi(\theta_1) = \dfrac{1}{2}p_0 + \sum_1^\infty{}_n (p_n''\cos n\theta_1 + q_n''\,\mathrm{sen}\, n\theta_1), \end{cases}$$

i cui coefficienti p_n', q_n'; p_n'', q_n'' riescono in valore assoluto rispettivamente minori di M/n^3, M/n^2 $(n = 1, 2, \ldots)$, M designando una opportuna costante.

In tale condizione avremo senz'altro:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=1}\varphi\, d\theta = \frac{1}{2}p_0' + \sum_1^\infty{}_n \varrho_1^n\{p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1\} ,$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=1}\varphi\, d\theta\right]_{\varrho_1=1} = -\sum_1^\infty{}_n n\{p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1\} ,$$

e la (5), derivando, ci darà:

$$(5') \qquad \left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varrho_1=1}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta - \\ - \sum_1^\infty{}_n\, n\{\, p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1 \,\}.$$

Ammettiamo, salvo a verificarlo a posteriori, che sia lecito sostituire nella (5′) a

$$\lim_{\varrho_1=1}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta\,, \qquad \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta\,;$$

e a $-(\partial G/\partial \varrho_1)_{\varrho_1=1}$ il suo sviluppo $1+2\sum_1^\infty{}_n\, \varrho^n \cos n(\theta-\theta_1)$, nonchè eseguire termine a termine l'integrazione rispetto a ϱ.

Si ottiene in tal modo

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta \\ - \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta-\theta_1)\, d\theta \\ - \sum_1^\infty{}_n\, n\{\, p'_n \cos n\theta_1 + q_n \operatorname{sen} n\theta_1 \,\}.$$

Di qua, ricordando che dev'essere:

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = H\psi = \frac{1}{2}\, p_0 + \sum_1^\infty{}_n\, (p''_n \cos \theta_1 + q''_n \operatorname{sen} n\theta_1)\,,$$

e ponendo per brevità:

$$(7) \qquad \begin{cases} p_n = p''_n + n p'_n\,, \\ q_n = q''_n + n q'_n\,, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

segue identicamente:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho,\theta)\cos n\theta\,d\theta = -\,p_n\,, \quad (n=0,1,2,\dots);\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho,\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta\,d\theta = -\,q_n\,, \quad (n=1,2,\dots)\,.
\end{aligned}\right.
$$

È dunque necessario che la funzione armonica w soddisfaccia a queste equazioni funzionali.

Per $\varrho \leqslant 1-\varepsilon$ (ε positivo e piccolo a piacere), la serie (4) è uniformemente convergente; dunque:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho,\theta)\cos n\theta\,d\theta = \alpha_0\int_0^{2\pi} H^2\cos n\theta\,d\theta\\
&\qquad + \sum_1^\infty{}_m\,\varrho^m\left\{\alpha_m\int_0^{2\pi} H^2\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta + \beta_m\int_0^{2\pi} H^2\cos n\theta\,\mathrm{sen}\, m\theta\,d\theta\right\},\\
&\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho.\,\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta\,d\theta = \alpha_0\int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}\, n\theta\,d\theta\\
&\qquad + \sum_1^\infty{}_m\,\varrho^m\left\{\alpha_m\int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}\, n\theta\cos m\theta\,d\theta + \beta_m\int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}\, n\theta\,\mathrm{sen}\, m\theta\,d\theta\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Ora:

$$\cos m\theta\cos n\theta = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta\}\,,$$

$$\cos n\theta\,\mathrm{sen}\, m\theta = \frac{1}{2}\{\mathrm{sen}\,(m+n)\theta + \mathrm{sen}\,(m-n)\theta\}\,,\quad \text{ecc.},$$

e siccome, in virtù delle ipotesi fatte su H,

$$\int_0^{2\pi} H^2\cos(m\pm n)\theta\,d\theta\,,\qquad \int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}\,(m\pm n)\theta\,d\theta\,,$$

rimangono, anche per $\varrho = 1$, inferiori in valore assoluto al quoziente di un numero finito per $(m-n)^2$ ($m \gtrless n$), mentre (a patto di verificarlo a tempo debito) possiamo ritenere α_m, β_m inferiori ad un numero pure finito, così le serie dei secondi membri convergono uniformemente rispetto a ϱ in tutto l'intervallo (0, 1). Ne viene che le (9) sussistono anche per $\varrho = 1$ e che si può valersene per trasformare le (8), integrando termine a termine.

Troviamo così:

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty{}_m \left\{ \alpha_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta \right.$$
$$\left. + \beta_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \right\} = - p_n ,$$

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty{}_m \left\{ \alpha_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta \right.$$
$$\left. + \beta_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \right\} = - q_n ,$$

o, più concisamente, ponendo:

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,\,2m} , \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,\,2m-1} , \quad (n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,\,2m} , \quad (n=1,2,\ldots;\ m=0,1,2,\ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,\,2m-1} , \quad (n, m = 1, 2, \ldots) ;
\end{aligned} \right.$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{-p_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta\,d\theta} = v_{2n}\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),\\
&\frac{-q_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta\,d\theta} = v_{2n-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha_m = x_{2m}\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots),\\
&\beta_m = x_{2m-1}\,, && (m = 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(13)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j = v_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Le a e le v, come si rileva dalle (6), (7), (10), (11), sono costanti conosciute (e finite, perchè i divisori, che intervengono nelle (10), (11), sono essenzialmente diversi da zero).

Se si può risolvere il sistema lineare infinito (13) e i valori, che si trovano per le x_i, cioè, in causa delle (12), per le α e β, *ammettono un limite superiore finito e definiscono una $w(\varrho, \theta)$ integrabile nel cerchio di raggio* 1 *e tale che*:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varrho_1 = 1} \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} -\frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\,d\theta &= \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\,d\theta \\
&+ 2 \sum_{1}^{\infty}{}_n \int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\,d\theta\,,
\end{aligned}
$$

siam fatti certi, eseguendo a ritroso le operazioni indicate, che la funzione u, definita dalla (5), soddisfa alle (1^{bis}), (2^{bis}), (3^{bis}); basta allora esprimere u a mezzo di x', y', per avere la funzione inizialmente richiesta.

L'unica difficoltà consiste pertanto nella determinazione delle costanti x_j dal sistema (13), il quale, osservando che $a_{i,i} = 1$, può anche essere scritto:

$$
(\Omega)\qquad x_i = v_i - \sum_{0}^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Ad esso si riattaccano le seguenti considerazioni generali.

2. – Definiamo delle approssimazioni successive delle incognite x_i, prendendo:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} x_i^{(0)} = v_i\,, & (i = 0, 1, 2, \ldots)\,, \\ x_i^{(1)} = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(1)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(0)}, & (i = 0, 1, 2, \ldots)\,, \end{cases}$$

e in generale:

$$\text{(15)} \qquad x_i^{(n)} = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n-1)}\,, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)\,,$$

con che, ammessa la convergenza delle serie dei secondi membri, riescono individuate le approssimazioni di dato ordine $x_i^{(n)}$ per mezzo di quelle d'ordine anteriore, purchè si abbia cura di fare *successivamente* $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Se le $x_i^{(n)}$ tendono per $n = \infty$ a limiti finiti e determinati x_i, atti a rendere convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j$, le (15) mostrano senz'altro che detti limiti sono le soluzioni del sistema proposto.

Un caso notevole per l'applicazione, che abbiamo in vista, è quello, in cui le a e le v soddisfanno a disuguaglianze del tipo

$$\text{(16)} \qquad |a_{i,j}| < A\lambda^{|i-j|}\,, \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ i \gtrless j)\,,$$

$$\text{(17)} \qquad |v_i| < \frac{B}{(i+g)^s}\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\text{(18)} \qquad 2A\,\frac{\lambda}{1-\lambda} < 1\,,$$

con A, B, g, s numeri positivi finiti e $\lambda < 1$.

Si osserverà che, aumentando convenientemente B, è sempre possibile immaginare g abbastanza grande perchè sia soddisfatta, assieme alla (18), la:

$$\text{(18')} \qquad 2A\,\frac{\lambda\left(1 + \frac{1}{g}\right)^s}{1 - \lambda\left(1 + \frac{1}{g}\right)^s} < 1\,.$$

Dico che in questo caso il metodo delle approssimazioni successive riesce completamente.

Cominciamo coll'osservare che le (15), avuto riguardo alle (14), dànno:

$$x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} = -\sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j}(x_j^{(n)} - x_j^{(n-1)}) - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j}(x_j^{(n-1)} - x_j^{(n-2)}),$$

ovvero anche, ponendo per brevità:

$$(19)\qquad y_i^{(0)} = v_i\,,\quad y_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)},\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$(15')\qquad y_i^{(n)} = -\sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)},\quad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots).$$

A giustificazione del nostro asserto conviene provare:

a) che le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} v_j$ convergono (e ciò risulta immediatamente dalle (16) e (17));

b) che le y, definite per ricorrenza dalle (15'), rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)}$;

c) che le $x_i^{(n-1)}$, cioè, per le (19), $y_i^{(0)} + y_i^{(1)} + \ldots + y_i^{(n-1)}$, rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n-1)}$;

d) che le $x_i^{(n)}$ tendono, per $n = \infty$, a limiti finiti e determinati, ossia che sono convergenti le serie $\sum_0^{\infty}{}_n\, y_i^{(n)}$;

e) che le somme x_i di tali serie rendono a lor volta convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j$.

Le proposizioni *b*), *c*), *d*), *e*) sono vere, come tosto si riconosce, quando si abbia, per esempio,

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B}{(i+g)^s}\,\eta^n\,,$$

con

$$\eta = \left(\frac{g}{g+1}\right)^s < 1\,.$$

Potremo così limitarci a stabilire questa formula, che, a tenore delle (11) e (19), sta intanto per $n = 0$.

Si immagini di averla provata per $y_i^{(n-1)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ e per $y_j^{(n)}$ $(j < i)$; sarà necessario e sufficiente far vedere che essa sussiste anche per $y_i^{(n)}$.

Le (15′) porgono:

$$|y_i^{(n)}| < AB\eta^n \sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} + AB\eta^{n-1} \sum_{i+1}^{\infty}{}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s},$$

mentre si ha ovviamente:

$$\sum_{i+1}^{\infty}{}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s} < \frac{1}{(i+g)^s}\frac{\lambda}{1-\lambda} < \frac{1}{(i+g)^s}\frac{\eta\dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}},$$

$$\sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} = \frac{1}{(i+g)^s}\sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{\dfrac{(j+g)^s}{(j+g+1)^s}\dfrac{(j+g+1)^s}{(j+g+2)^s}\cdots\dfrac{(i-1+g)^s}{(i+g)^s}},$$

donde anche, per essere $\eta = (g/g+1)^s$ e quindi più piccola di $(g+1/g+2)^s$, $(g+2/g+3)^s$, ecc.

$$\sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} \leq \frac{1}{(i+g)^s}\sum_0^{i-1}{}_j \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{i-j} < \frac{1}{(i+g)^s}\frac{\dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}}.$$

Dopo ciò la disuguaglianza precedente diviene:

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}\frac{2A\dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}} = \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}\,2A\,\frac{\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s}{1-\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s},$$

e, in virtù della (18′), assume l'aspetto voluto:

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}.$$

Di qua si deducono per le incognite $x_i = \sum_0^\infty{}_n\, y_i^{(n)}$ le condizioni:

$$|x_i| < \frac{B}{(i+g)^s} \sum_0^\infty{}_n\, \eta^n = \frac{B}{(i+g)^s} \frac{1}{1-\eta}, \tag{20}$$

che sono della medesima natura di quelle ammesse per i secondi membri v_i.

3. – Ritornando al particolare sistema (Ω), donde abbiam preso le mosse, vogliamo ora occuparci di caratterizzare una classe di aree σ', per cui si trovano soddisfatte le condizioni (16) e (18).

Suppongasi in primo luogo che il contorno sia costituito da una sola linea analitica. Per un teorema di SCHWARZ [4], la funzione $z' = f(z)$ (di cui al § 1) è allora prolungabile analiticamente al di là di ogni punto della circonferenza di raggio 1; esistono quindi circonferenze di raggio $1/\lambda^3 > 1$, entro e sopra le quali la funzione si mantiene regolare. Vedremo ben presto quale partito si può trarre da questa circostanza.

Poniamo intanto:

$$f'(z) = \sum_0^\infty{}_n\, c_n z^n,$$

ovvero, mettendo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria:

$$f'(z) = \sum_0^\infty{}_n\, (\gamma_n + i\delta_n)\varrho^n e^{in\theta}.$$

Se si cambia i in $-i$ e si moltiplica membro a membro, risulta:

$$H^2(\varrho, \theta) = |f'(z)|^2 = \sum_0^\infty{}_{n\nu} \{ (\gamma_n\gamma_\nu + \delta_n\delta_\nu) - i(\gamma_n\delta_\nu - \delta_n\gamma_\nu)\} \varrho^{n+\nu} e^{i(n-\nu)\theta},$$

che, ordinata per i seni e coseni d'archi multipli di θ, ove si faccia per brevità:

$$\left\{\begin{aligned} h_\mu(\varrho) &= \varrho^\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, (\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu)\varrho^{2\nu}, \\ k_\mu(\varrho) &= \varrho^\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, (\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)\varrho^{2\nu}, \end{aligned}\right. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots), \tag{21}$$

[4] É. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2ème éd., Gauthier-Villars, Paris, 1904, t. II, chap. X.

assume l'aspetto:

$$H^2(\varrho, \theta) = h_0(\varrho) + 2 \sum_1^\infty {}_\mu \{ h_\mu(\varrho) \cos \mu\theta + k_\mu(\varrho) \operatorname{sen} \mu\theta \} . \tag{22}$$

Si designi ora con L il massimo dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ sopra la circonferenza di raggio $1/\lambda^2$; sarà, come è ben noto,

$$|c_n| \leqslant L\lambda^{3n},$$

quindi anche:

$$|\gamma_\nu - i\delta_\nu| \leqslant L\lambda^{3\nu},$$

$$|\gamma_{\mu+\nu} + i\delta_{\mu+\nu}| \leqslant L\lambda^{3\mu+3\nu},$$

$$|(\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu) + i(\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu},$$

e per conseguenza:

$$|\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu},$$

$$|\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu}.$$

Dopo ciò, le (21) porgono:

$$|h_\mu(\varrho)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu \sum_0^\infty {}_\nu\, \lambda^{6\nu}\varrho^{2\nu} \leqslant \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6\varrho^2},$$

$$|k_\mu(\varrho)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu \sum_0^\infty {}_\nu\, \lambda^{6\nu}\varrho^{2\nu} \leqslant \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6\varrho^2},$$

o, intendendovi $\varrho < 1$, addirittura:

$$\left\{ \begin{aligned} |h_\mu(\varrho)| &< \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6}, \\ |k_\mu(\varrho)| &< \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6}. \end{aligned} \right. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots). \tag{23}$$

Riprendiamo le posizioni (10) e trasformiamole a mezzo delle (22). Otterremo:

$$(10')\quad \left\{\begin{aligned}
a_{2n,2m} &= \frac{\pi\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\varrho)+h_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, && (n, m = 0, 1, 2, \ldots),\\
a_{2n,2m-1} &= \frac{\pi\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\varrho)\pm k_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, && (n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m} &= \frac{\pi\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\varrho)\mp k_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}^2\, n\theta\,d\theta}, && (n=1,2,\ldots;\ m=0,1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m-1} &= \frac{\pi\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\{h_{|n-m|}(\varrho)-h_{n+m}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}^2\, n\theta\,d\theta}, && (n, m = 1, 2, \ldots),
\end{aligned}\right.$$

dove van presi i segni superiori o gli inferiori secondochè $m \lesseqgtr n$.

Di qua si deducono agevolmente dei limiti superiori per le a.

Consideriamo, per fissar le idee, il primo gruppo delle (10′). Sia l_1 il limite inferiore dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ entro il cerchio di raggio 1 (limite inferiore, che è, per la univocità della corrispondenza fra z' e z, essenzialmente diverso da zero). Si avrà:

$$H^2(\varrho, \theta) \geqslant l_1^2,$$

e

$$\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta \geqslant l_1^2\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta\,d\theta = \frac{\pi l_1^2}{2n+2};$$

d'altra parte, avendo riguardo alle (23), per $n > m$:

$$\pi\left|\int_0^1 \varrho^{n+m+1}\{\,h_{n+m}(\varrho)+h_{|n-m|}(\varrho)\,\}\,d\varrho\right| <$$

$$< \frac{\pi L^2}{1-\lambda^6}\,\lambda^{3(n-m)}\left\{\lambda^{6m}\int_0^1 \varrho^{2n+2m+1}\,d\varrho + \int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\right\} < \frac{\pi}{2n+2}\,\frac{2L^2}{1-\lambda^6}\,\lambda^{3(n-m)},$$

e per $n < m$:

$$\pi \left| \int_0^1 \varrho^{n+m+1} \{ h_{n+m}(\varrho) + h_{|n-m|}(\varrho) \} \, d\varrho \right| <$$

$$< \frac{\pi L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{3(m-n)} \left\{ \lambda^{6n} \int_0^1 \varrho^{2n+m+1} \, d\varrho + \int_0^1 \varrho^{2m+1} \, d\varrho \right\} < \frac{\pi}{2m+2} \, \frac{2L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{3(m-n)},$$

quindi in entrambi i casi:

$$\pi \left| \int_0^1 \varrho^{n+m+1} \{ h_{n+m}(\varrho) + h_{|n-m|}(\varrho) \} \, d\varrho \right| < \frac{\pi}{2n+2} \, \frac{2L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{|3n-3m|} .$$

Se ne inferisce:

$$|a_{2n,2m}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}, \qquad (n \gtrless m); \tag{24}$$

in modo analogo, badando che $k_0(\varrho) = 0$, si trova:

$$\left. \begin{matrix} |a_{2n,\,2m-1}| \\ \\ |a_{2n-1,\,2m}| \end{matrix} \right\} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}, \quad \text{per} \quad n \gtrless m, \tag{25}$$

e:

$$\left. \begin{matrix} |a_{2n,2n-1}| \\ \\ |a_{2n-1,2n}| \end{matrix} \right\} < \frac{L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{6n} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda, \quad \text{per} \quad m = n > 0,$$

$$a_{21} = a_{12} = 0, \qquad \text{per} \quad m = n = 0;$$

cioè in ogni caso:

$$\left. \begin{matrix} |a_{2n,\,2n-1}| \\ \\ |a_{2n-1,\,2n}| \end{matrix} \right\} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda, \quad \text{per} \quad m = n; \tag{26}$$

infine:

$$|a_{2n-1,\,2m-1}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|}. \tag{27}$$

Dalle (24), (25), (26), (27) si raccoglie con tutta facilità (basta passare in rassegna i diversi casi possibili e notare che, per $m \lesseqgtr n$, $\lambda^{|3n-m|}$ è certamente minore di $\lambda^{|2n-2m|}$ e di $\lambda^{|2n-2m\pm 1|}$):

$$(28) \qquad |a_{i,j}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|i-j|}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ i \gtrless j).$$

Questa disuguaglianza corrisponde alla (16) del caso generale; per stabilirla, ci è stata sufficiente l'ipotesi che il contorno dell'area σ' consti di una sola curva analitica. Altra cosa è per la (18), che assume ora l'aspetto:

$$(29) \qquad 4\frac{L^2}{l_1^2}\frac{\lambda}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1,$$

e dà luogo, come ben si vede, ad una condizione parecchio restrittiva circa la forma del contorno. Dacchè infatti il fattore L^2/l_1^2 è maggiore di $(1-\lambda^3)^2$ ([5]), bisogna per lo meno che sia

$$\lambda < \frac{1}{4}\frac{(1-\lambda^6)(1-\lambda)}{(1-\lambda^3)^2} < \frac{1}{4}\frac{1-\lambda^6}{1-\lambda^3} = \frac{1+\lambda^3}{4} < \frac{1+\lambda}{4},$$

quindi $\lambda < 1/3$ e $1/\lambda^3 > 27$, cioè la funzione $f(z)$ deve mantenersi regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27.

Una disuguaglianza un po' meno restrittiva si ha quando l'area data possiede un asse di simmetria. In questo caso è sempre possibile ([6]) stabilire la rappresentazione conforme in modo che l'asse di simmetria della figura corrisponda all'asse delle x, o, se si vuole, in modo che la funzione $f(z)$ abbia i coefficienti reali .Le (21) e (10′) portano allora a concludere che $a_{2n,2m-1}$, $a_{2n-1,2m}$ si annullano identicamente. Il sistema lineare da risolvere, rimettendo per x_{2m}, x_{2m-1}; α_m, β_m, si scinde in:

$$\sum_0^\infty {}_m\, a_{2n,2m}\,\alpha_m = v_{2n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e

$$\sum_1^\infty {}_m\, a_{2n-1,2m-1}\,\beta_m = v_{2n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

([5]) Questo si ricava facilmente, osservando che, se L è il massimo dei valori assoluti di $f'(z)$ per $|z| = 1/\lambda^3$, il modulo di $f'(z)$, per z compreso entro il cerchio di raggio 1, non può superare $L/(1-\lambda^3)$, quindi $l_1 < L/(1-\lambda^3)$ e per consegienza $L^2/l_1^2 < 1/(1-\lambda^3)^2$.

([6]) Cfr. H. A SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, « Crelle's Journal », B. LXX, 1869.

ai quali sistemi, ponendo:

$$a_{2n\,2m} = a'_{n,m}\,, \qquad (n,\, m = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$a_{2n-1\,2m-1} = a''_{n,m}\,, \qquad (n,\, m = 1, 2, \ldots);$$
$$v_{2n} = v'_n\,, \qquad (n \quad = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$v_{2n-1} = v''_n\,, \qquad (n \quad = 1, 2, \ldots),$$

può essere attribuita la forma:

$$\sum_0^\infty{}_j\, a'_{i,j}\,\alpha_j = v'_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_0^\infty{}_j\, a''_{i,j}\,\beta_j = v''_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Consideriamone uno qualunque; il primo, per es., e notiamo che, dalle posizioni testè fatte e dalle (24), segue senz'altro:

$$|a'_{n\,m}| = |a_{2n\,2m}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)}\,\lambda^{|3n-3m|}\,, \qquad (n \gtrless m),$$

o, ciò che è lo stesso:

$$(28') \qquad |a'_{ij}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)}\,\lambda^{3|i-j|}\,, \quad (i\,j = 0, 1, 2, \ldots;\ i \gtrless j),$$

la quale, confrontata colla (16), ci mostra che il λ è qui sostituito da λ^3, per cui la condizione, che tien luogo della (29) si cangia in:

$$(29') \qquad 4\,\frac{L^2}{l_1^2}\,\frac{\lambda^3}{(1-\lambda^6)(1-\lambda^3)} < 1\,.$$

Partendo dal secondo sistema $\sum_1^\infty{}_j\, a''_{i,j}\,\beta_j = v''_i$, si perviene evidentemente alla medesima disuguaglianza.

Per essa, $\lambda^3 < 1/3$ (non occorre, come prima, $\lambda < 1/3$), quindi non è più a priori indispensabile che $f(z)$ si mantenga regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27, ma solo che questo abbia luogo fin oltre la circonferenza di raggio 3.

4. – In questo § si considereranno esclusivamente aree σ', per cui sia possibile, prendendo λ in modo opportuno, soddisfare alla disuguaglianza (29) (o rispettivamente alla (29′) nel caso della simmetria).

Si tratta di fissare in modo definitivo, per codeste aree, la validità del nostro procedimento di integrazione.

Ferme stando per le funzioni φ e ψ, date al contorno, le condizioni, di cui a § 1, si ha, come abbiam visto,:

$$\begin{aligned} &|p_n'| < \frac{M}{n^3}, \qquad |q_n'| < \frac{M}{n^3}, \\ &|p_n''| < \frac{M}{n^2}, \qquad |q_n''| < \frac{M}{n^2}, \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

quindi:

$$\begin{aligned} |p_n| &= |p_n'' + np_n'| < \frac{2M}{n^2}, \\ |q_n| &= |q_n'' + nq_n'| < \frac{2M}{n^2}, \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ed è ben chiaro che, designando con g una costante positiva arbitraria, basta prendere M' maggiore di $p_0(g+2)^2$ e di $2M(g+4)^2$, per poter scrivere:

$$|p_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|q_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Le (11) dànno per i secondi membri v_i del sistema (Ω):

$$v_{2n} = \frac{-p_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$v_{2n-1} = \frac{-q_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

I denominatori, per quanto si è osservato nel precedente §, si mantengono superiori a $l_1^2/(2n+2)$; se ne trae (prendendo $B = M'/l_1^2$):

$$|v_{2n}| < \frac{M'}{l_1^2}\frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n+g}, \qquad (n = 0, 1, 2, ..),$$

$$|v_{2n-1}| < \frac{M'}{l_1^2}\frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n-1+g}, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

le quali fanno riscontro alle (17) del caso generale, dove si sia posto $s = 1$. Possiamo quindi asserire (cfr. l'osservazione fatta alla fine del § 2) che le incognite del sistema lineare, cioè i coefficienti α e β della funzione w soddisfanno a disuguaglianze dello stesso tipo.

Le assumeremo addirittura sotto la forma:

$$|\alpha_m| < \frac{N}{m}, \quad |\beta_m| < \frac{N}{m}, \qquad (m = 1, 2, ...),$$

con N numero fisso positivo.

Delle condizioni, enumerate alla fine del § 1, ci rimangono così da verificare:

1) *la integrabilità di* $w(\varrho, \theta)$ *entro il cerchio di raggio* 1;

2) *la eguaglianza fra*

$$P = \lim_{\varrho_1 = 1} \int_0^1 \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} -\frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta,$$

e

$$Q = \int_0^1 \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta + 2\sum_1^{\infty}{}_n \int_0^1 \varrho^{n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta.$$

Essendo, per definizione:

$$w(\varrho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}{}_m \varrho^m \{\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta\},$$

risulta:

$$|w(\varrho, \theta) < |\alpha_0| + 2N \sum_1^{\infty}{}_m \frac{\varrho^m}{m} < |\alpha_0| - 2N \log(1 - \varrho),$$

quindi:

$$\lim_{\varrho=1}\left|\frac{w(\varrho,\theta)}{\log(1-\varrho)}\right| \leqslant 2N\,,$$

la quale ci assicura che $w(\varrho,\theta)$ è integrabile entro il cerchio di raggio 1 (circonferenza inclusa). Saranno per conseguenza integrabili $H^2w(\varrho,\theta)$, $GH^2w(\varrho,\theta)$, $(\partial G/\partial\varrho_1)H^2w(\varrho,\theta)$ $(\varrho_1<1)$, ecc., e, come tosto si riconosce, anche $(\partial G/\partial\varrho_1)_{\varrho_1=1}H^2w(\varrho,\theta)$.

Ciò posto, è lecito chiaramente di attribuire a P la forma:

$$\int_0^1 \varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2w(\varrho,\theta)\,d\theta\,,$$

o, se si vuole:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon} \varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2w(\varrho,\theta)\,d\theta\,.$$

D'altra parte, per ε positivo e arbitrariamente piccolo, si ha, tutto essendo regolare:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2w(\varrho,\theta)\,d\theta = \int_0^{1-\varepsilon}\varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi}H^2w(\varrho,\theta)\,d\theta$$

$$+\,2\sum_1^\infty{}_n\int_0^{1-\varepsilon}\varrho^{n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi}H^2w(\varrho,\theta)\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta\,;$$

quindi basterà mostrare che il limite del secondo membro, per $\varepsilon=0$, è Q, o, ciò che è lo stesso, che la differenza converge a zero con ε. Prescindendo dal primo termine, che ha manifestamente per limite 0, si tratta di constatare che:

$$\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^\infty{}_n\int_{1-\varepsilon}^{1}\varrho^{n+1}\,d\varrho\int_0^{2\pi}H^2w(\varrho,\theta)\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta = 0\,.$$

A tale scopo si osservi che, per $\varrho < 1$:

$$(30) \quad \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} H^2 \cos^n (\theta - \theta_1)\, d\theta$$

$$+ \sum_1^\infty {}_m\, \varrho^m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\},$$

e, nella ipotesi, cui ci riferiamo, esistono (come tosto si ricava dal § antecedente) due numeri positivi A_1, e $\lambda_1 < 1$, tali che:

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\, (\theta - \theta_1) \cos m\, \theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1{}^{|n-m|},$$

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\, (\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1{}^{|n-m|},$$

per qualunque valore di $\varrho \leqslant 1$.

La serie del secondo membro ha dunque i suoi termini ordinatamente inferiori a quelli della serie convergente a termini costanti:

$$A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2 \sum_1^\infty {}_m \frac{\lambda_1{}^{|n-m|}}{m} \right\} = A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2\lambda_1^{n-1} + 2 \sum_2^{n-1} {}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} + 2 \sum_n^\infty {}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} \right\},$$

e perciò la (30) sussiste anche quando vi si fa $\varrho = 1$.

Supponendo n già abbastanza grande (maggiore di n', diciamo) sarà $\lambda_1^{n/2} < 1/n^2$, $1/n \log n/2 < 1$; e, siccome:

$$\sum_2^{n-1} {}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm,$$

mentre:

$$\int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm = \int_1^{n/2} \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm + \int_{n/2}^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm < \frac{1}{n^2} \int_1^{n/2} \frac{dm}{m} + \frac{2}{n} \int_{n/2}^n \lambda_1^{n-m}\, dm =$$

$$= \frac{1}{n^2} \log \frac{n}{2} - \frac{2}{n} \frac{1}{\log \lambda_1} (1 - \lambda_1^{n/2}) < \frac{1 + \dfrac{2}{\log \dfrac{1}{\lambda_1}}}{n},$$

così riescirà, per $n > n'$:

$$2\sum_0^{n-1}{}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \frac{2+\dfrac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}}}{n};$$

ancora:

$$2\sum_n^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} < \frac{2}{n}\,\frac{1}{1-\lambda_1},$$

$$\lambda_1^n < \frac{1}{n},$$

$$2\lambda_1^{n-1} < \frac{2}{n}.$$

Ne viene

$$A_1 N\left\{\lambda_1^n + 2\sum_1^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m}\right\} < A_1 N \frac{5+\dfrac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}}+\dfrac{2}{1-\lambda_1}}{n};$$

o finalmente, col porre:

$$A_1 N\left\{5+\frac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}}+\frac{2}{1-\lambda_1}\right\} = K,$$

$$\left|\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho,\theta)\cos n\,(\theta-\theta_1)\,d\varrho\right| < A_1 N\left\{\lambda_1^n + 2\sum_1^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m}\right\} < \frac{K}{n},\ (n > n').$$

In tal condizione la serie:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \int_{1-\varepsilon}^{1} \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho,\theta)\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta$$

converge assolutamente, poichè, a partire dal valore n' di n, i suoi termini sono ordinatamente minori di:

$$\frac{K}{n}\int_{1-\varepsilon}^{1} \varrho^{n+1}\,d\varrho = K\,\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+2}}{n(n+2)} < \frac{K}{n(n+2)};$$

per la medesima ragione, essa converge uniformemente rispetto ad ε. Si conclude:

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_1^\infty {}_n \int_{1-\varepsilon}^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta =$$

$$= \sum_1^\infty {}_n \lim_{\varepsilon=0} \int_{1-\varepsilon}^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = 0 ,$$

come dovevasi dimostrare.

5. – Un esempio semplice di contorni, per cui la condizione (29) trovasi effettivamente soddisfatta, si ha immaginando che il parametro di rappresentazione conforme $f(z)$ sia un polinomio, la cui derivata si annulla in punti abbastanza discosti dall'origine. Ecco in qual modo lo si riconosce.

Posto

$$f'(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) ,$$

avremo, designando con ζ_i il modulo della radice z_i (che è, per natura sua, > 1):

$$l_1^2 \leqslant |a_0|^2 \prod_1^n {}_i (\zeta_i - 1)^2 ,$$

mentre, sulla circonferenza di raggio $1/\lambda^3$, il massimo L dei valori assoluti spettanti a $f'(z)$ non potrà superare:

$$|a_0| \prod_1^n {}_i \left(\zeta_i + \frac{1}{\lambda^3}\right) .$$

Se si chiama ζ la più piccola delle ζ_i e si nota che, per $\zeta < \zeta_i$:

$$\frac{\zeta_i + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta_i - 1} < \frac{\zeta + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1} ,$$

la disuguaglianza, cui conviene soddisfare per qualche valore di λ, può a fortiori essere sostituita da:

$$4 \left\{ \frac{\zeta + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1} \right\}^{2n} \frac{\lambda}{(1 - \lambda^6)(1 - \lambda)} < 1 , \tag{31}$$

e λ è ora in nostro arbitrio, poichè $f(z)$ si mantiene regolare in tutti i punti del piano, situati a distanza finita.

Ricordando la osservazione che λ dev'essere certamente minore di $1/3$, si ha:

$$\frac{1}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{729}\right)^{2/3}} < 2,$$

e quindi la (31) sussisterà a più forte ragione, purchè sia:

$$8\lambda\left\{\frac{\zeta+\frac{1}{\lambda^3}}{\zeta-1}\right\}^{2n} < 1,$$

ovvero:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}-1}{\frac{1}{\lambda^3}+\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}} < \lambda^3\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}-1\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt[2n]{8}}\lambda^{\frac{6n-1}{2n}} - \lambda^3\right\}.$$

Ora il massimo valore del secondo membro corrisponde al valore (non nullo) di λ, che annulla

$$\frac{6n-1}{2n\sqrt[2n]{8}}\lambda^{\frac{4n-1}{2n}} - 3\lambda^2,$$

cioè:

$$\lambda = \left(\frac{6n-1}{6n\sqrt[2n]{8}}\right)^{2n} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{2n}.$$

A noi basta che la disuguaglianza sia verificata per un qualche valore di λ; giova dunque pigliare addirittura

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{2n},$$

con che si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{1}{512}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}\frac{1}{6n-1},$$

ossia:

$$\zeta > \frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}.$$

Rimane così assicurata la validità del procedimento di integrazione per il corrispondente contorno, ogniqualvalta le radici di $f'(z)$ distano dall'origine più di

$$\frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}.$$

Analogamente si proverebbe che, quando i coefficienti del polinomio $f(z)$ sono reali, la (29′) conduce a:

$$\zeta > \frac{8(2n-1)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Un tipo affatto diverso di contorni, che rientrano nella nostra categoria, si ha, ponendo $f'(z) = e^{F(z)}$, con $F(z)$ trascendente intera d'ordine apparente (7) minore di 1/6.

Si ha infatti in questo caso, designando con ε un numero positivo abbastanza piccolo, perchè $(1-\varepsilon)/6$ sia ancora superiore al detto ordine apparente:

$$e^L < e^{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{6}}}$$

ossia:

$$L^2\lambda < \lambda^\varepsilon ,$$

per valori di $1/\lambda^3$ sufficientemente grandi.

Siccome anche ora è lecito scegliere a piacere il valore di λ da portare nella (29), così basterà immaginarlo già tale che $L^2\lambda < \lambda^\varepsilon$ perchè la (29) possa essere sostituita da:

$$\frac{4}{l_1^2}\,\frac{\lambda^\varepsilon}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1 ,$$

e questa condizione riesce senz'altro soddisfatta, quando si abbia cura di prendere λ abbastanza piccolo.

(7) Secondo la nomenclatura, introdotta dal sig. BOREL nelle sue belle ricerche sulle funzioni intere (« Acta Mathematica », t. 20, 1897 e « Comptes Rendus », 24 Gennaio, 1898), si dice che una funzione intera $F(z)$ è d'*ordine apparente* ϱ, quando il massimo $M(r)$ del modulo della funzione, per $|z| = r$, cresce, da un certo valore di r in avanti, come e^{r^ϱ}.