

XVIII.

SULLA STABILITÀ DELL' EQUILIBRIO
PER I SISTEMI A LEGAMI COMPLETI

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », s. 7^a, t. VIII (1896-1897).

pp. 1247-1250.

La questione della stabilità ⁽¹⁾ del movimento, od anche più particolarmente dell'equilibrio, presenta, come è noto, difficoltà assai gravi, nè può cogli attuali stromenti d'analisi venire completamente risolta, poichè c'è di mezzo il comportamento degli integrali di un sistema di equazioni nell'intorno di un punto singolare.

Sono classiche le ricerche istituite a tale riguardo dal sig. POINCARÉ ed esse contribuiscono infatti ⁽²⁾, come si può rilevare da un recente scritto del sig. LIAPOUNOFF ⁽³⁾, a risolvere la questione della stabilità in un numero abbastanza esteso di casi.

Per dire soltanto dell'equilibrio, ecco i due risultati fondamentali, dovuti al sig. LIAPOUNOFF:

1) Se, nello sviluppo del potenziale intorno ad una posizione di equilibrio, non tutti i termini di secondo ordine sono nulli e il potenziale non ammette un massimo, l'equilibrio è instabile.

2) Se, in una posizione di equilibrio, il potenziale presenta un minimo (qualunque sia del resto la forma del suo sviluppo) l'equilibrio in quella posizione è instabile.

Queste due proposizioni, unitamente al teorema di DIRICHLET, riassumono, per quanto so, la letteratura dell'argomento ⁽⁴⁾. Il contributo,

⁽¹⁾ Intendiamo alludere al significato ordinario di stabilità. Dal punto di vista astronomico si definisce spesso la stabilità in modo diverso; veggasi per es. il tomo terzo, cap. 26, della *Mécanique Céleste* del sig. POINCARÉ.

⁽²⁾ Cfr. in particolare il capitolo sulle soluzioni asintotiche nel tomo primo della *Mécanique céleste*.

⁽³⁾ *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum*, « Journal de Math. », 1897.

⁽⁴⁾ Rimangono evidentemente fuor di questione tutte le ricerche non rigorose, istituite, specie dagli autori inglesi, col così detto metodo delle piccole oscillazioni.

che io mi propongo di apportare colla presente nota, è modesto assai: si tratta di esaurire la ricerca per il caso più semplice, quello dei sistemi materiali a legami indipendenti dal tempo, dotati di un solo grado di libertà e sollecitati da forze, che dipendono soltanto dalla posizione del sistema.

Si designi con x la coordinata lagrangiana di un sistema siffatto, con $X(x)$ la forza, che lo sollecita e si supponga, come è sempre lecito, che la posizione di equilibrio corrisponda al valore 0 di x . Combinando il teorema di DIRICHLET col secondo del sig. LIAPOUNOFF, si ha immediatamente: se lo sviluppo di $X(x)$ comincia con una potenza dispari cx^n di x , l'equilibrio è stabile o instabile, secondochè c è positivo o negativo.

Io dimostrerò più generalmente che l'equilibrio è sempre instabile, a meno che non siano insieme n dispari e $c < 0$. Vale adunque pei sistemi a legami completi la reciproca del teorema di DIRICHLET:

L'equilibrio è instabile, se il potenziale $\int X(x) dx$ non è massimo.

Per la dimostrazione, cominciamo coll'osservare che, rappresentando con $Ax'^2/2$ la forza viva del nostro sistema, si ha l'integrale delle forze vive:

$$Ax'^2 = 2 \left\{ C + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \dots \right\}.$$

Se, come noi vogliamo supporre, la posizione di equilibrio $x = 0$ non è singolare pel nostro sistema, il valore A_0 di A per $x = 0$ sarà maggiore di zero; si potrà dunque sviluppare $1/A$ in serie di potenze di x , $1/A_0 + \dots$, donde, ponendo $C = 0$, e designando con $P(x)$ una serie di potenze:

$$(1) \quad x'^2 = \frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x).$$

Per provare la instabilità dell'equilibrio nei casi accennati, basterà far vedere che, comunque si prenda un numero positivo ε , arbitrariamente piccolo, tra i movimenti determinati dalle condizioni iniziali $|x_0| < \varepsilon$, $|x'_0| < \varepsilon$ ve ne ha sempre qualcuno, per cui il sistema si allontana dalla posizione di equilibrio più di una certa quantità h indipendente da ε . Il nostro h sarà, per esempio, il più piccolo dei due numeri 1 e $|\xi|/2$, essendo ξ l'ascissa del più vicino all'origine tra i punti seguenti:

a) infiniti reali della funzione

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x);$$

b) zeri reali della stessa funzione, diversi dall'origine.

Riferiamoci, per fissare le idee, al caso di n pari e $c < 0$. Potremo supporre ε già tanto piccolo che, per $|x| < \varepsilon$, il segno del secondo membro della (1) sia quello di

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0}.$$

Fra i movimenti, che rispondono alle condizioni iniziali $|x_0| < \varepsilon$, $|x'_0| < \varepsilon$, consideriamo, come è evidentemente permesso, quelli, per cui $x_0 < 0$ e x'_0 , pure negativo, soddisfa all'equazione:

$$(1') \quad x_0'^2 = \frac{2cx_0^{n+1}}{(n+1)A_0} + x_0^{n+2}P(x_0).$$

Il moto successivo del sistema sarà in tal caso retto dalla (1); ne viene che x' , essendo inizialmente negativo, seguirà a rimaner tale, finchè

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)$$

non passi per un valore nullo od infinito; frattanto la funzione x di t sarà decrescente. Ciò mostra che, per $-h < x < x_0$, la (1) può essere scritta:

$$dt = - \frac{dx}{\sqrt{\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}},$$

il radicale intendendosi preso positivamente.

Mediante integrazione si ha:

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}},$$

donde infine apparisce che, al crescere di t da zero a

$$\int_{-h}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}},$$

il sistema passa dalla posizione $x = x_0$ alla posizione $x = -h$.

In modo affatto analogo si dimostra il teorema negli altri due casi ($c > 0$ e n pari o dispari); basta soltanto partire da valori positivi di x_0, x'_0 , legati sempre dalla (1').

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.